LUIZ FELIPE SIMÕES DE GODOY

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DA NOÇÃO DE DERIVADA
E O PROCESSO DE APRENDIZAGEM

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC / SP

2004

LUIZ FELIPE SIMÕES DE GODOY

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DA NOÇÃO DE DERIVADA E O PROCESSO DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Prof.ª Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

PUC / SP

São Paulo

2004

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:____ **Local e Data:**____________

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter concedido mais este presente à minha vida e me fortalecido durante a realização deste trabalho.

À minha orientadora, *professora doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori*, pelo exemplo de profissionalismo, pela sua dedicação e paciência em conduzir meus estudos, conhecendo minhas dificuldades e compromissos.

Aos membros da banca, pelas contribuições oferecidas a este estudo. Em particular ao *professor doutor José Geraldo de Souza*, pelo seu exemplo de caráter e autenticidade, que ajudaram a formar meus valores e atitudes como professor e cidadão desde os tempos de faculdade.

À minha esposa, *Raquel Junqueira B. de Godoy*, pela sua compreensão e apoio nas dificuldades encontradas neste tempo, em que muitas vezes estive ausente e cansado, pelas excessivas horas de trabalho e estudo.

Aos meus pais, irmãos, sogro e sogra, que, sempre preocupados, respeitaram minhas omissões e rezaram para o bom êxito deste trabalho.

Aos colegas, pelo convívio, alegrias e tristezas compartilhados nessa jornada.

RESUMO

Esta é uma pesquisa de caráter diagnóstico, que tem como objetivo investigar o conhecimento de alunos que já passaram por um curso de Cálculo Diferencial e Integral sobre a noção de derivada, à luz da teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval.

Os dados foram obtidos pela aplicação de testes. As análises são qualitativas e quantitativas. Como conclusão, destacam-se: o registro figural (gráfico) que foi o registro de maior dificuldade, tanto em questões em que esse é registro de partida quanto no caso em que ele é registro de chegada; o registro de língua natural foi o mais utilizado pelos alunos pesquisados quando realizaram questões envolvendo conversão de registro, nos casos em que o registro de partida era o figural, o simbólico ou mesmo registro de língua natural; dificuldade de reconhecer no registro de representação simbólico $f'(x)$ o significado da derivada como coeficiente angular.

Palavras Chave: Ensino, Aprendizagem, Cálculo, Derivada; Registro de Representação semiótica.

ABSTRACT

This is a diagnostic standard research that aims at investigating the knowledge of the students that have already attended a Differential and Integral Calculus Course about the derivative notion, under Raymond Duval´s theory of Representation and Register. Data were reached through tests application. The analyses were qualitative and quantitative. As a conclusion it's possible to highlight: the figural register (graphic) was the most difficult one, both in questions in which it is the starting register as cases which it is the arrival register; the natural language register was the most used one by the students researched when they used questions involving register conversion, in the cases in which the starting register was the figural one, the symbolic or the same natural language register; difficulty in recognizing in the register of the symbolic representation $f'(x)$ the meaning of the derivative as angular coefficient.

Key Words: Teaching, Learning, calculus, Derivative, Semiotic Representation Register.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O nosso interesse por esta pesquisa foi identificado a partir da nossa prática docente, a qual está direcionada ao processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A atenção estava voltada às dificuldades que os estudantes apresentam relativamente à aprendizagem das noções como Função, Limite, Derivada, entre outras. Um projeto de estudos mais amplo, desenvolvido pela orientadora do nosso trabalho, definiu a escolha e direcionou a pesquisa para fenômenos relacionados à aprendizagem da noção de derivada. A perspectiva deste estudo foi a de investigar o processo de ensino-aprendizagem dessa noção sob a ótica da teoria dos registros de representação de Duval.

O presente trabalho é referente ao processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, em particular o da noção de Derivada.

É um estudo diagnóstico sobre o conhecimento de alunos que já passaram por um curso de Cálculo.

Fundamenta-se nas noções teóricas de registro de representação de Raymond Duval.

Investiga quais registros de derivada os alunos reconhecem como tal e suas competências nos tratamentos e conversões dos registros de derivada. Os dados foram obtidos por meio de testes

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No Capítulo 1, são apresentados a Problemática e o Quadro Teórico, ou seja, é delimitado o problema desta pesquisa, e introduzidas noções da teoria dos *Registros de*

Representação e suas implicações no processo de ensino-aprendizagem de um conceito científico. O capítulo 2 é destinado à descrição dos procedimentos metodológicos. Nele estão caracterizados os sujeitos pesquisados; descrita a realização das fases da pesquisa e o instrumento de coleta de dados. No capítulo 3 está apresentado um estudo sobre a noção de derivada e seus significados à luz de livros didáticos mais utilizados pelos professores dos alunos investigados. O capítulo 4 é reservado à descrição e à análise dos dados. No capítulo 5 estão as conclusões e as considerações finais.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA E QUADRO TEÓRICO

A necessidade de distinguir uma noção científica de suas representações semióticas[1] (representação *versus* representado) bem como conhecer a "funcionalidade" dessas representações são elementos essenciais a serem levados em conta no processo de ensino-aprendizagem da matemática segundo a teoria do pesquisador francês Raymond Duval[2] , teoria essa que tem

[1] Representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. (Duval, 1993, p.39)

[2] Raymond Duval – Filósofo e psicólogo francês, desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França (1970-1999). Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d'Opale, França. Em suas pesquisas trata principalmente do funcionamento cognitivo, implicado sobretudo na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem.

trazido valiosa contribuição às pesquisas que tratam de aspectos do funcionamento cognitivo relacionados à aquisição de conhecimentos no âmbito da Educação Matemática.

Para Duval, dois importantes tipos de aquisições funcionais são indispensáveis na formação do indivíduo: as aquisições funcionais relativas aos sistemas orgânicos, disponíveis ao indivíduo desde seu nascimento, como a audição, a visão, o tato e a memória; e as aquisições funcionais relativas aos sistemas semióticos, estes últimos não usados somente para se comunicar, mas também para organizar e tratar as informações. A presente pesquisa é relativa ao segundo tipo de aquisição funcional, no que tange à aprendizagem do conhecimento matemático, em particular o de derivada

Para a análise de uma atividade de aquisição de conhecimento matemático, é necessário observar dois componentes distintos: um deles é constituído pelos próprios conteúdos desta noção, nos quais há os métodos e processos para descobrir e estabelecer resultados, a validação; e o outro é o componente cognitivo que visa a observar os processos pelos quais o indivíduo tem acesso aos conhecimentos, e que é fundamental para a compreensão dos processos de aprendizagem.

Nesta perspectiva, observar os processos que levam o estudante a ter acesso à noção de derivada é observar se ele tem ou não familiaridade com as diferentes representações semióticas do conceito e com as conseqüentes conversões de um registro a outro.

Destaca-se que Duval toma como Pierce (apud Duval, 1999) que representação é: *“alguma coisa que se tem, (para alguém), no lugar de alguma* *outra coisa" e,* para ele, esta definição permite de imediato distinguir representação e objeto que ela representa.

Segundo Duval (1999), a confusão entre uma noção matemática e a representação que permite o acesso a ela pode constituir-se num dos problemas centrais da aprendizagem dessa noção. A noção de derivada como todo objeto matemático, é uma noção abstrata, isto é, não é acessível à percepção. Assim sendo, é a representação que possibilita sua apreensão. Para a representação de um objeto matemático são utilizados símbolos, gráficos, tabelas, língua natural. São esses os meios de correspondência entre o objeto matemático em estudo e as atividades cognitivas do pensamento do estudante. Cada tipo de representação traz consigo um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ela foi produzida e, desta forma, representações distintas do conceito de derivada apresentam características também distintas deste conceito. O conceito de derivada é por exemplo: "o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f num ponto p de abscissa x" (registro da língua natural); simbolicamente representa-se esse conceito por "$f'(x)$". A apreensão dessas características diferentes só será efetiva quando o sujeito atingir o estágio no qual seja capaz de tratar as diversas representações de derivada, efetuar tratamentos e conversões de uma representação para a outra atribuindo a elas o significado adequado de representação de "alguma coisa".

Duval (1999) afirma: "O ponto comum do bloqueio para a aprendizagem à grande maioria dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em outra representação do mesmo objeto".

Já a função de tratamento de uma representação é a transformação desta no interior do mesmo registro em que foi formada, obedecendo às regras próprias de cada registro e ao número de tratamentos e sua natureza que variam consideravelmente de um registro para outro. É importante destacar que os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático.

Exemplo 1: Tratamento no registro simbólico algébrico

Sendo $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (2x - 3)$, determine $f'(x)$. Para tal é necessário efetuar os passos seguintes no interior do registro algébrico.

$$f'(x) = (x^2 + 1) \cdot 2 + (2x - 3) \cdot 2x$$

$$f'(x) = 2x^2 + 2 + 4x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 2$$

É próprio da atividade matemática mobilizar simultânea ou alternadamente vários registros de representação semiótica. As mudanças de registros de representação, assim como um tratamento, são de grande importância para o ensino e a aprendizagem do conceito de derivada.

A conversão não é um processo puramente conceitual, envolve o conceito de congruência e não-congruência. Quando a passagem de um registro de representação (registro de partida) leva a outro registro de representação (registro de chegada) de forma natural, isto é, a representação do registro de partida é transparente à representação no registro de chegada, diz-se que na conversão ocorreu um fenômeno de congruência ***(Exemplo 2)***. De outra forma, quando o registro de partida impõe maior dificuldade de pensar ou *visualizar* a representação do registro de chegada, diz-se, então, que na conversão ocorreu um fenômeno de não-congruência ***(Exemplo 3)***.

Exemplo 2: Fenômeno de Congruência
$\frac{dy}{dx}(a) \Longrightarrow$ Derivada de y em relação a x no ponto *a*

Exemplo 3: Fenômeno de Não-congruência
$f'(a) \Longrightarrow$ Coeficiente angular da reta tangente à curva de função f no ponto onde $x = a$
$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \Longrightarrow$ Derivada da função f no ponto onde $x = p$

Segundo Duval, no ensino e aprendizagem da matemática, os fenômenos de não-congruência são mais comuns nas conversões entre os registros que os de congruência.

Apesar das dificuldades encontradas, é imprescindível que ocorram as conversões nos dois sentidos, pois a aprendizagem requer uma coordenação dos distintos registros de representação que um domínio de conhecimento mobiliza.

Estudos sobre a aprendizagem da noção de derivada sob o prisma da teoria dos registros de representação não são muito encontrados na literatura.

A tese de doutorado: *"Continuites et ruptures dans la transition terminale S/ DEUG Sciences em analyse. Le cas de la notion de derivée et son environnement"*, de Frédéric Praslon da Université de Marne La Vallée et equipe DIDIREM (Université de Paris) (2000) é um dos trabalhos que encontramos nessa direção e tomado como referência para esta pesquisa. Nessa tese, Praslon explora o processo de aprendizagem da noção de derivada, na transição do ensino médio para os primeiros anos da Universidade, na França. Em sua pesquisa, Praslon toma os diversos registros da noção de derivada: algébrico, gráfico, numérico e língua natural, sem a identificação dos mesmos. O autor classificou os registros de representação de derivada em vários grupos em função da importância que eles tomam nos enunciados das questões ou nas soluções, a saber: “registros dominantes”, “registros secundários”, “registros minoritários”. Dentro desta classificação, o autor fez uma análise dos registros que aparecem nos enunciados das questões propostas pelos livros didáticos e pelas soluções esperadas. Todo esse estudo (classificação, tabulação dos dados, análise...) foi resultante da análise de livros e manuais adotados nas últimas séries do ensino médio e de livros e manuais adotados nas primeiras séries do ensino superior, selecionados por serem os mais utilizados, cada um em seu respectivo ambiente.

Recebem destaque também os tipos de conversões entre os registros, utilizadas nos exercícios de livros e manuais didáticos, adotados nas escolas francesas de ensino médio. Em poucos casos, essas conversões estão ao encargo dos alunos; entretanto, na maioria das vezes, são solicitadas explicitamente pelos textos, como no exemplo: *“... usando a curva e os valores da função tangente, deduzir as soluções da equação...”* (Praslon, 2000). Praslon destaca: *“as conversões entre os registros de representação de Derivada, não são pedidas como meio de reduzir as dificuldades particulares encontradas no registro de origem, para resolver um problema dado, mas para traduzir simplesmente um resultado já obtido”*. Por exemplo, o aluno deve saber interpretar graficamente uma propriedade que ele acaba de estabelecer no registro algébrico, em termos de posição relativa curva/tangente, tangente vertical, inclinação (positiva ou negativa) da reta tangente, etc. Estas interpretações são freqüentemente sugeridas pelos enunciados.

O nosso trabalho investiga quais registros de derivada os alunos reconhecem como tal e suas competências nos tratamentos e conversões dos registros de derivada com alunos que já estudaram Cálculo Diferencial e Integral, e ainda, quais destes registros são preferencialmente mobilizados pelos alunos e em quais significados do conceito de derivada (coeficiente angular; taxa de variação).

Em geral dois tipos de enfoques podem ser encontrados no ensino da noção de Derivada, o teórico, ligado aos conceitos e definições, ou o técnico voltado mais para processos e técnicas. A prática docente e também pesquisas, como: Amit e Vinner (1990), Hiebert e Lefevre (1986) e Leme (2003), têm indicado que estudantes conseguem bons resultados em trabalhos sobre derivada que enfocam os aspectos operatórios, não sendo o caso quando realizam trabalhos sobre o mesmo tema, porém com enfoques conceituais. Mas o que se constata em pesquisas é que as noções fundamentais desse ramo da matemática, em particular a noção de derivada, apresentam dificuldades aos estudantes que cursam o ensino superior.

Referenciando-nos na Teoria dos Registros de Representação, levantamos, como hipótese de pesquisa, que muitas das dificuldades dos estudantes estejam exatamente em distinguir a noção de derivada e suas representações semióticas, bem como transitar pelos diversos registros que representam essa noção. Admitindo também que a atribuição dos significados depende dos diversos registros de representação do objeto matemático, e que o conhecimento da funcionalidade dos registros pode ser um dos entraves na aprendizagem deste conceito, são formuladas como questões para esta pesquisa:

Quais os registros de representação do conceito de derivada são reconhecidos pelos alunos como tal?

Os alunos dominam os tratamentos efetivados no interior de cada registro e as conversões entre eles?

Quais conversões entre os registros de derivada são mais espontaneamente utilizadas pelos alunos?

É possível identificar que registro da noção de derivada gera para o aluno maior dificuldade de interpretação?

O objetivo desta pesquisa é, portanto, contribuir para a análise de dificuldades na aprendizagem da noção de derivada e conseqüentemente indicar elementos que devem ser levados em conta nas abordagens para a melhoria do ensino do Cálculo. Nossa contribuição está em diagnosticar dificuldades que os alunos possam apresentar em distinguir representações semiótica da noção de derivada e seus significados, bem como de domínio de tratamentos e conversões. Estamos considerando que a apresentação ou exposição dos registros de representação de derivada pelos livros didáticos e também pelos professores, nas diferentes situações em que este conceito é abordado, nem sempre segue uma padronização. O que estamos apontando é que um registro simbólico de derivada, como taxa de variação instantânea, pode ser preferencialmente utilizado por um livro didático em uma certa situação (como, por exemplo: elasticidade), enquanto que para a mesma situação, outros livros e professores privilegiem outra representação simbólica, e até mesmo outro registro como o de língua natural. É possível que este fato corrobore com outras dificuldades dos estudantes em reconhecer o significado da derivada e assim os impeça de transitar entre os registros de representação do mesmo conceito matemático.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A primeira tarefa que realizamos para o desenvolvimento desta pesquisa foi a de identificação dos registros de representação do conceito de derivada que são apresentados aos estudantes. Para isso, selecionamos alguns livros didáticos de Cálculo I pelo critério dos mais utilizados pelos professores das Universidades que os sujeitos pesquisados freqüentam. Foram entrevistados seis professores.

Após as entrevistas, fizemos um levantamento maior de dados com a intenção de verificar a ocorrência desta bibliografia em todo o país. Foram enviados cerca de 120 e-mails e obtidas 18 respostas (anexo II).

Utilizamos dois critérios para a escolha dos livros didáticos:

1) Os livros adotados e/ou indicados pelos seis professores entrevistados deveriam aparecer na bibliografia da maioria dos professores (consultados) dos cursos de Cálculo no Brasil, isto é, considerou-se o nível de aceitação e predileção por parte dos docentes que responderam aos e-mails enviados.

2) Os livros deveriam conter um número considerável de exemplos, exercícios resolvidos, que contivessem vários tipos de registros de representação.

A análise dos livros didáticos teve a intenção de delimitar os possíveis registros de representação de derivada que serviriam de referência para uma análise comparativa com os registros utilizados pelos sujeitos pesquisados. Foram selecionados, no total, quatro livros didáticos subdivididos em dois grupos:

1) Autores nacionais

- *Cálculo A* – Diva Marília Flemming & Miriam Buss Gonçalves – Editora Makron Books – 5ª Edição – São Paulo – 1992

- *Um Curso de Cálculo* – Hamilton Luiz Guidorizzi – LTC Editora – 5ª Edição – Rio de Janeiro – 2001

2) Autores estrangeiros

- *O Cálculo com Geometria Analítica* – Louis Leithold – Editora Harba – Volume 1 – 3ª Edição – São Paulo – 1994

- *Cálculo com Geometria Analítica* – Earl William Swokowski – Editora Makron Volume 1 – São Paulo – 1994

A segunda tarefa foi a de revisão de literatura, da qual destacamos três trabalhos de conclusão de mestrado, (Meyer, Leme, D'Avoglio) sobre o ensino e a aprendizagem da derivada, orientados por Sonia Igliori, na PUC-SP. Nosso trabalho vem compor, junto com os trabalhos de Meyer e Leme, um grupo de pesquisa que tem como foco de pesquisa a aprendizagem, enquanto que o trabalho de D'Avoglio enfoca o ensino.

Entendemos que esses trabalhos podem contribuir para uma reflexão sobre as dificuldades apontadas no ensino/aprendizagem do conceito de derivada. De uma forma especial, estamos interessados em verificar se dificuldades podem ter origem na problemática relativa à representação semiótica e conceito representado.

O trabalho de Meyer (2003), intitulado *Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual*, propõe investigar elementos da imagem conceitual e definição conceitual, relativos ao conceito de derivada, quando interpretados geometricamente. Meyer, em seu levantamento bibliográfico, apresenta diversas pesquisas que mostram o sucesso dos estudantes em tarefas que abordam aspectos operatórios no ensino do Cálculo, em contraposição ao fracasso em realizar tarefas de Cálculo que enfocam os aspectos conceituais. Essa questão evidencia a existência de diferentes tipos de conhecimento matemático: um deles relacionado à compreensão dos conceitos matemáticos, o outro, aos procedimentos adotados para resolver tarefas matemáticas. A partir disso, se propõe-se a investigar o processo de estabelecimento de relações entre as várias partes da informação que constituem o conhecimento matemático. E busca responder às seguintes questões: *"Que imagem conceitual e definição conceitual podem ser inferidas de estudantes que* *já cursaram as disciplinas Cálculo I e II, a partir dos aspectos relativos ao conceito de derivada, mobilizados por eles na resolução de tarefas que envolvam tal conceito?", "Que tipos de relações existem entre imagem conceitual, definição conceitual e a definição formal de derivada?".* Considerando que o conceito de derivada admite várias interpretações, Meyer supõe a existência de uma ampla diversidade de representações visuais, imagens mentais e coleções de impressões e experiências relativas ao conceito de derivada, constituindo a *imagem conceitual* a ser investigada em alunos que já cursaram as disciplinas de Cálculo I e II. A pesquisadora ainda expõe que seu interesse não é avaliar o sistema cognitivo do sujeito pesquisado no que diz respeito ao conceito de derivada, mas somente a parte do sistema cognitivo que venha a ser ativado pelos problemas propostos. Pensamos que nosso trabalho complementa a pesquisa de Meyer, pois, para que o estudante possa ativar seu sistema cognitivo na apreensão de qualquer objeto matemático, é necessário passar pelos registros de representação.

Achamos importante destacar, nas considerações finais do trabalho de Meyer, algumas conclusões sobre as respostas dos sujeitos investigados por ela, a saber:

- A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto (a,b), é concebida como sendo a função derivada de f, quando se deseja determinar $f'(a)$.
- A propriedade segundo a qual se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, $f(a) = f'(a) = b$, isto é, a derivada de f em $x = a$ é interpretada como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no

qual a reta tangencia o gráfico da função f, quando se deseja determinar $f'(a)$.

Avaliando as afirmações acima, verificamos como são confusas as interpretações dos alunos pesquisados. Por exemplo, podemos notar pelo 1º tópico que a *função derivada* (língua natural), que está sendo interpretada como a equação da reta tangente, foi mobilizada pelo aluno na determinação de $f'(a)$ (registro simbólico), que, na verdade, representa a inclinação desta reta tangente. Esta confusão cometida pelos estudantes pode ser um indício da dificuldade relacionada a registros de representação do conceito de derivada.

A pesquisa de Leme (2003), intitulada *"Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada"*, realiza uma análise de livros didáticos, conduzida pelo pressuposto teórico de Sfard (1991), segundo o qual, *"noções abstratas podem ser concebidas de duas maneiras fundamentalmente diferentes: estruturalmente, como objetos, e operacionalmente, como processos"*. Sfard afirma que interpretar uma noção matemática como objeto significa poder referir-se a ela como se fosse algo real, uma estrutura estática, existindo em algum lugar no espaço e no tempo, podendo-se reconhecer a idéia desde o primeiro momento, dominando-a e tendo controle sobre seu significado. De outra forma, interpretar uma noção matemática como processo implica vê-la como algo dinâmico em que a noção se revela através de uma seqüência de ações e procedimentos.

Sfard (1991) atesta que

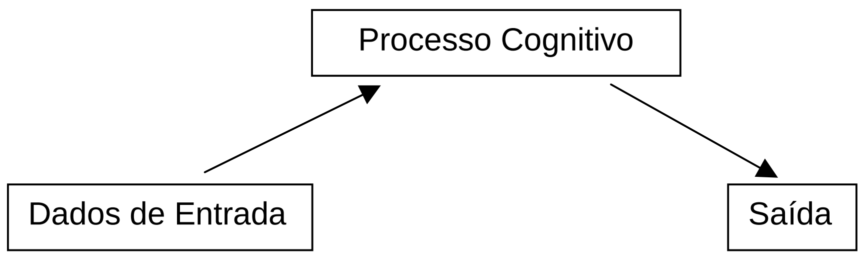
"Diferente de objetos materiais, as elaborações de matemática avançada são totalmente inacessíveis para nossos sentidos – elas só podem ser vistas pelos olhos de nossa mente. Além disso, quando desenhamos uma função ou escrevemos um número, temos o cuidado em enfatizar que tal signo no papel é uma entre as várias representações possíveis da mesma entidade abstrata, que não pode ser vista nem tocada..." (grifo nosso)

Sublinhamos na fala de Sfard aquilo que acreditamos corroborar com nossa pesquisa. *"O cuidado em enfatizar que tal signo no papel (...)"* vem ao encontro da nossa intenção de verificar o reconhecimento dos registros de representação do conceito de derivada como tal e as especificidades de cada um. Este cuidado deve ser próprio daqueles que participam do ensino da matemática, sejam como autores de livros didáticos ou professores, lembrando que cada registro traz consigo diferentes características e informações sobre o conceito ensinado. Neste estudo, Leme pretendia apontar possíveis causas de dificuldades para a compreensão conceitual da noção de derivada, e, segundo suas conclusões, podemos citar algumas dessas possíveis dificuldades: dificuldades inerentes ao desenvolvimento do pensamento científico; a falta de atividades, discussões ou exercícios que propiciem aos estudantes atingirem o estágio de reificação; e, por fim, o privilégio das representações simbólicas do conceito de derivada encontradas nos livros didáticos. Pensamos que nosso trabalho possa complementar as investigações de Leme (2003) no que se refere aos registros de representação. Estaremos verificando quais destes registros estão sendo, realmente, mobilizados pelos alunos.

D'Avoglio em, *"Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito"*, desenvolveu uma pesquisa interventiva, com alunos que iniciavam o curso superior na área de Exatas. E tinha como objetivo investigar se a introdução do conceito de derivada de uma função num ponto, por meio de conceitos familiares aos alunos, implicaria uma melhor aprendizagem dessa noção. Para isso, utilizou-se de uma seqüência didática, contendo sete atividades, elaboradas a partir do conceito de cinemática, mais especificamente o de velocidade instantânea, já estudado pelos alunos.

Outros trabalhos que fizeram parte de nossa investigação e que entendemos vir ao encontro do nosso interesse de pesquisa são a seguir apresentados.

Kendal (2001), em sua tese de doutorado, na Universidade de Melbourne – Austrália, na qual é feito um levantamento das representações que envolvem o conceito de derivada. Nesse trabalho é apresentado o que a autora denomina Arquitetura Conceitual da Derivada e que possui a seguinte configuração:



Com a análise centrada na estrutura das questões, Kendal (2001) construiu três parâmetros para o estudo das representações do conceito da derivada; são eles:

- **Representação de *entrada***
- **Processo cognitivo que relaciona as representações de *entrada* com as representações de *saída***
- **Representação de *saída***

Entrada	**Processo Cognitivo**	**Saída**
Numéricos **(N)**	Formulação **(F)**	Numéricos **(n)**
Gráficos **(G)**	Interpretação **(I)**	Gráficos **(g)**
Simbólicos **(S)**		Simbólicos **(s)**

Kendal (2001) utilizou letras maiúsculas e letras minúsculas para diferenciar as representações de entrada das representações de saída. Chamou de Formulação (F) a habilidade de reconhecer a representação de entrada, sejam representações numéricas, gráficas ou simbólicas. E chamou de Interpretação (I) a habilidade de discorrer sobre uma entrada explicando em língua natural ou dando sentido equivalente, de uma derivada, nas representações numérica, gráfica ou simbólica. Construiu com isso um protótipo formado por 18 casos, os quais ela denomina "competências", *a partir da combinação das possibilidades de ocorrência destes três parâmetros.*

		ENTRADA		
		Numérica**(N)**	Gráfica **(G)**	Simbólica **(S)**
SAÍDA	*Numérica* ***(n)***	N F n N I n	G F n G I n	S F n S I n
	Gráfica ***(g)***	N F g N I g	G F g G I g	S F g S I g
	Simbólica ***(s)***	N F s N I s	G F s G I s	S F s S I s

Tabela 1

Kendal (2001) fez um trabalho centrado na utilização de um software, Computer Algebra Systems (CAS), no ensino do Cálculo (a noção de derivada) utilizado por professores no ensino médio. Investigou o processo de ensino-aprendizagem na utilização deste software por dois professores, que abordaram as múltiplas representações da noção de derivada. A tabela 1 (Quadro das competências da Diferenciação) acima foi desenvolvida para identificar as competências fundamentais associadas com as múltiplas representações do conceito de derivada. Essas competências fundamentais foram analisadas a partir da aplicação de várias atividades pedagógicas e funcionais através da utilização do software (CAS). Esse quadro guiou a construção dos instrumentos de teste, monitoramento dos professores e análise da aprendizagem em relação ao ensino da noção de derivada. Vale destacar neste trabalho a seguinte afirmação de Kendal: "*as representações simbólicas e gráficas provaram ser as representações mais importantes e úteis do conceito de derivada para enfatizá-la e fazer conexões."* Consideramos que essa afirmação se remete às atividades aplicadas no contexto da pesquisa de Kendal no qual o computador e a calculadora gráfica são focados como ferramentas de ensino. Outro dado importante observado nas conclusões deste trabalho é a relação de ensino aprendizagem, na qual se destaca a importância da metodologia utilizada pelo professor e suas práticas de ensino.

> *"As aulas desenvolveram compreensões diferentes do conceito de derivada que parecem relacionar diretamente ao efeito combinado das preferências dos professores por representações métodos e estilo de ensino, e o uso da tecnologia do CAS." (Kendal, 2001, p.192)*

> *"Os privilégios dos professores, reforçados pelas suas crenças no propósito de ensinar e em suas visões de aprendizagem, influenciaram, no contexto matemático que eles ensinavam e como eles ensinavam, e em conseqüência quais processos cognitivos foram enfatizados ou ignorados." (Kendal, 2001, p.190)*

Essa pesquisa foca o ensino introdutório do Cálculo, especificamente a noção de derivada, utilizando a ferramenta computacional (CAS). Aponta os bons resultados conseguidos pelos professores que utilizaram o que ela chama de múltiplas representações do conceito de derivada, mostrando ainda que o uso destas representações é próprio da experiência e do conhecimento de cada professor.

O trabalho de Kendal (2001) reforça a importância em diagnosticar como os alunos dos cursos de exatas, preferencialmente licenciatura em matemática, tratam e articulam a diversidade dos registros de língua natural, expressões algébricas, representações gráficas, expressões numéricas no ensino-aprendizagem da derivada.

A pesquisa feita por Cassol (1998) "Produção de Significados para a Derivada: Taxa de Variação" investiga a compreensão dos alunos com relação ao significado deste conceito. Nesse estudo o autor faz um exame dos significados que podem ser produzidos para a derivada no processo de ensino e aprendizagem. Ele utilizou o Modelo Teórico dos Campos Semânticos - MTCS[3] desenvolvido por Lins (1992), e, com base nesse modelo, formulou cinco significados para derivada: derivada como um limite, derivada como declividade de reta tangente, derivada como resultado da aplicação de uma fórmula, derivada como velocidade e derivada como taxa de variação. No desenvolvimento desse trabalho, Cassol realizou uma pesquisa de campo, composta por um teste diagnóstico e entrevistas, na tentativa de verificar quais significados são produzidos para a derivada com as aulas tradicionais de Cálculo I na universidade

[3] O MTCS foi formulado por Rômulo Campos Lins em sua tese de doutorado submetida à Universidade de Nottingham em 1992. Em sua proposição inicial, o MTCS foi concebido como um meio de explicar conhecimento e diferenciar pensamento algébrico de Álgebra. "O MTCS surgiu devido à necessidade do autor de responder às perguntas 'O que é conhecimento?' O que é o significado?" (LINS apud Cassol (1998)

UNISINOS. Cassol constata no final de sua pesquisa a falta de hábito do aluno em examinar e declarar significados produzidos, com conceitos, fórmulas, representações gráficas e numéricas. Dos cinco significados propostos e examinados nessa pesquisa, a derivada como taxa de variação foi aquele em que os alunos se sentiam mais próximos da compreensão do conceito de derivada, contudo foi muito difícil, para eles, fazerem uso desse significado para expressar descrições de fenômenos. Durante a descrição desse trabalho o autor faz uma análise da construção de cada significado de derivada, levantado por ele, mostrando detalhadamente as dificuldades concernentes a essa construção. Dificuldades que vêm desde lacunas deixadas no ensino médio com relação ao estudo de funções, à compreensão conceitual de limite, à articulação entre os registros de derivada, entre outros.

Logo, trouxemos esses apontamentos sobre o significado do conceito de derivada, não porque eles contribuam significantemente para a nossa questão de investigação, mas, sim, para constatarmos que a problemática, envolvendo a relação entre o conceito de derivada e seus significados, passa pelos registros de representação e suas conversões.

Citamos ainda os seguintes artigos apresentados no IV EPEM (1996), que concorrem com nosso tema: Fusco e Almouloud, "*Um Estudo da Transposição Didática da Derivada*", no qual os autores apresentam a origem do conceito de derivada e também fazem uma análise crítica das dificuldades encontradas nos manuais didáticos, ligadas à transposição didática do "saber sábio" da derivada para o "saber ensinado". E o artigo de Silva e Igliori, *"Um Estudo Exploratório sobre o conceito de Derivada"* Neste artigo é apresentada uma forma alternativa de propiciar ao aluno a construção do conhecimento da derivada em substituição ao tratamento clássico (apresentação de definições, propriedades, técnicas e algumas aplicações).

Outros trabalhos pesquisados também proporcionaram a evolução dos nossos estudos e nos motivaram, uma vez que, a partir desses levantamentos, pudemos perceber quão restrita é a pesquisa na área da Educação Matemática, no Brasil, que enfoca o estudo do conceito de Derivada. Para encerrar nosso levantamento bibliográfico, deixamos aqui como referência estes trabalhos consultados, para que possam contribuir com o estudo do ensino e aprendizagem do Cálculo, em particular a noção de derivada, a saber:

> ***DALL'ANESE, Cláudio,*** *"Conceito de Derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem", Este trabalho tem como objetivo analisar a contribuição da prática pedagógica do trabalho em grupo ao se introduzir os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, em particular, o conceito de Derivada.*
>
> ***FIGUEIRA, R. P****. "Um ensino individualizado sobre a derivada de funções algébricas." Apresenta uma alternativa para a introdução do conceito de Cálculo nos primeiros anos do curso superior, que se trata da "a apresentação da teoria de forma a obrigar o estudante a seguir individualmente uma linha de trabalho onde lhe é exigida operatividade à medida que assimila o conteúdo teórico".*
>
> ***KOGA, Miguel Tadayuki*. "***Uma análise no discurso de alguns professores de Cálculo Diferencial e Integral do Curso de Licenciatura em Matemática."* Koga (1998) investigou a importância da disciplina de Cálculo a partir de entrevistas e análise de documentos pedagógicos e curriculares. Os resultados desses estudos apontaram para a necessidade de estruturar uma formação específica para o licenciando que seja distinta do bacharel.
>
> ***PACHECO, Adilson Roberto****. Um estudo de Atitudes em Relação ao Cálculo Diferencial e Integral, em Estudantes Universitários. Neste estudo teve-se por objetivo verificar o tipo de atitudes em relação ao cálculo,*

presente em estudantes universitários, utilizando como instrumento a Escala de Atitudes elaborada por Aiken (1969), revista por Aiken e Dreger (1971) e adaptada por Brito (1993).

REIS, Frederico da Silva. *"A Tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos." Com a intenção de investigar o papel do ensino de Cálculo e Análise na formação do professor, Reis (2001) combinou um estudo histórico-epistemológico destas disciplinas com análise de entrevistas com professores pesquisadores e/ou autores desta área e, ainda, uma análise de alguns manuais didáticos produzidos ou recomendados pelos entrevistados.*

***SCHREINER, Ingo Valter**. Cálculo integral e diferencial – uma abordagem integradora ao estudo de funções em Cálculo I e no ensino médio*

***GIRALDO, V. e CARVALHO, L. M**. "Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada." Os autores têm por objetivo neste trabalho apresentar uma proposta alternativa para a abordagem do conceito de Derivada. Esta proposta se baseia na formulação teórica desenvolvida por David Tall, na qual a Derivada é apresentada a partir da noção de local straightness, com a visualização de gráficos de funções no computador. A partir da noção de imagem conceitual os autores propõem alguns passos para construção gráfica deste conceito, com objetivo de enriquecer ao máximo as formas de representação e conexões que o aluno venha a construir no processo de entendimento da definição de Derivada.*

O procedimento metodológico propriamente dito foi o seguinte: Foram aplicados dois testes com objetivo diagnóstico com o intervalo de seis meses entre eles.

O primeiro teste foi aplicado em três instituições universitárias particulares da região sudeste. A primeira é uma faculdade de Engenharia Elétrica, que funciona em período integral com alunos oriundos, em sua maioria, de escolas particulares do ensino médio. As outras duas são faculdades de Licenciatura em Matemática do período noturno com grande parte dos alunos trabalhando durante o dia e com procedência de escolas da rede pública de ensino médio. O pesquisador esteve presente durante as aplicações do teste e o professor da disciplina de Cálculo deixou de comparecer na aplicação em uma das instituições. A aplicação durou sempre 50 minutos, tempo correspondente a uma aula.

Na Faculdade de Engenharia (Faculdade I), o teste foi aplicado a 78 alunos, correspondendo a uma turma do 2ª Semestre (curso de regime semestral). Os estudantes estavam sentados em uma bancada que comporta 5 pessoas, o que interferiu na postura dos estudantes quanto à resolução de forma individual. Alguns dos alunos dessa turma devolveram rapidamente as folhas do teste, entregando as questões em branco. Houve, assim mesmo, outros alunos (sentados mais próximos do pesquisador e do professor) que desenvolveram suas atividades atendendo aos critérios estabelecidos, isto é, dentro do prazo e individualmente. Alguns estudantes comentaram sobre a dificuldade relacionada à interpretação do conceito envolvido nas atividades, justificando que, durante o curso de Cálculo I, o que havia sido cobrado foi a técnica de derivação e que o conceito e o significado da derivada tinham sido menos explorados.

Na primeira faculdade de Licenciatura em Matemática (Faculdade II), o teste foi aplicado em duas turmas, 4º e 6º períodos (curso de regime semestral), em um total de 63 alunos. O 4º período contava com 30 alunos na sala que aceitaram as condições estabelecidas, resolvendo as questões individualmente e com interesse. Neste caso, a aplicação do teste realizou-se de modo mais tranqüilo, sendo o fato de as salas de aula terem espaço suficiente para que as carteiras fossem separadas, interpretado como favorável a isso. Nessa turma os alunos ficaram todos até o final do tempo estabelecido, mesmo aqueles que entregaram as questões em branco, ou com justificativas do tipo – “não lembro”, “esqueci” e “só sei derivar”. Na outra turma de Licenciatura em Matemática, dessa mesma faculdade, 6º período, 33 alunos participaram do teste. Da mesma forma, como ocorrido no 4º período, cada um procurou responder a suas questões, sem necessidade da interferência do professor ou do pesquisador.

Na última faculdade (faculdade III), de Licenciatura em Matemática, 28 alunos responderam às questões, sendo 16 do 4º período e 12 do 6º período (curso de regime semestral). A relação dos alunos da Faculdade III com a atividade foi idêntica para os dois períodos. Mostraram-se indispostos a fazer o teste, justificando que não conseguiram entender nada sobre o assunto em pauta. Porém, após algumas explicações do pesquisador sobre a intenção da pesquisa, os alunos cooperaram e participaram das atividades na presença apenas do pesquisador. Foram muitos os pedidos de esclarecimento sobre as questões, contudo o pesquisador respondeu apenas – “faça o que você lembrar” ou “responda o que você acha”, tentando não interferir nas resoluções.

De todos os 169 alunos que participaram do teste, 43 alunos não responderam a nenhum item, entregaram o teste em branco, ou com as seguintes respostas: “não sei responder”, “não me lembro” e “só sei derivar”.

A estratégia adotada em todas as salas das três faculdades foi a seguinte: primeiramente foi distribuída aos alunos a folha com as duas primeiras questões, e, após a devolução desta, a outra folha com as duas últimas questões.

Este procedimento foi utilizado para garantir que os alunos resolvessem as questões na ordem de preparação das mesmas, sendo que deveriam desenvolver um trabalho inicial com as representações simbólicas, contempladas na primeira questão, e que, possivelmente, pudessem interferir na resolução das últimas questões, o que não desejávamos. Pois era suposição inicial que os alunos encontrariam maior dificuldade em mobilizar as representações simbólicas do que as representações na língua natural.

Na análise *a posteriori*, de alguns itens do teste, não pudemos interpretar as soluções apresentadas pelos alunos pelo fato de não conseguirmos estabelecer uma relação entre a representação utilizada em suas respostas e o conceito matemático envolvido. O questionário foi composto por quatro questões, envolvendo os registros de representação do conceito de derivada encontrados nos livros didáticos selecionados.

O segundo teste abrangeu parte dessa população num total de 32 alunos do 6º período da Licenciatura em Matemática. Durante a aplicação deste teste, alguns alunos relutaram em questionar o *item b* da questão 3, indagando se este não estava incompleto. Apenas sugerimos que escrevessem no item suas interpretações e queixas. O professor da disciplina de Cálculo esteve presente durante todo o tempo, colaborando com a aplicação do teste, que durou 80 minutos aproximadamente. A expectativa era a de que os alunos gastassem 50 minutos para a conclusão das questões, porém, a pedido dos mesmos, acrescentamos 30 minutos para o término.

As análises dos dados (1º teste e 2º teste) foram tanto qualitativas quanto quantitativas.

CAPÍTULO 3

A NOÇÃO DE DERIVADA

Com o objetivo de entender o processo de conceitualização da noção de derivada, elaboramos alguns estudos. No primeiro, procuramos analisar os aspectos históricos que levaram ao desenvolvimento dessa noção, apontando, dentre esses, a concepção dos registros de representação desse conceito matemático, uma vez que os registros de representação são alvo desta pesquisa. De acordo com o historiador Florian Cajori, *"sem uma notação bem desenvolvida o cálculo diferencial e integral não poderia ter desempenhado o seu grande papel na matemática moderna".* No segundo estudo, buscamos analisar as definições encontradas nos livros didáticos, levantando os registros de representação que eles apresentam, bem como o significado da noção de derivada, considerando nesta análise as situações em que estes registros aparecem.

A noção de derivada é, na História da Matemática, uma noção relativamente recente uma vez que surgiu pela primeira vez no século XVII. Nesta época os outros ramos da Matemática já eram considerados desenvolvidos, mas foi só neste século que o cálculo diferencial e integral se consolida como área da Matemática. Até este século não estavam definidos os conceitos de função, de variável, de limite e de derivada. O conceito de derivada surge ligado à determinação da velocidade instantânea, à determinação de tangentes a curvas e à determinação de máximos e mínimos de uma função.

Acredita-se que, por volta de 1629, Fermat[4] elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e os pontos de mínimo de uma função. Ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico de uma função tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo.

> *"Ele comparou o valor de* $f(x)$ *num ponto com o valor* $f(x+E)$ *num ponto vizinho . (...) Portando para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava* $f(x)$ *e* $f(x+E)$*, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo* E *entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação, de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por* E *fazia* $E=0$*."* *(Boyer,1996. p.240)*

O processo de Fermat equivale hoje, a achar: $\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E)-f(a)}{E}$

Naquela época Fermat não dispunha do conceito de limite, contudo seu método para máximos e mínimos se assemelha ao usado hoje no Cálculo, só que agora se usa em geral o símbolo h ou Δx em lugar do E de Fermat. Após alguns anos ele também descobriu como aplicar seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y=f(x)$. A idéia de tangente usada por Fermat é a de posição limite de uma secante quando os dois pontos de

[4] FERMAT,Pierre de (1601-1665), matemático francês, dentre as variadas contribuições à matemática, a mais importante é a fundação da *Moderna Teoria dos Números*.

intersecção com a curva tendem a coincidir. Por tudo isso é razoável acompanhar Laplace ao saudar Fermat como descobridor do Cálculo Diferencial.

Newton[5], no estudo da Cinemática (ramo da Física que estuda o movimento dos corpos), designava as derivadas da função x(t) por meio de pontos por cima da letra x, ($\dot{x}$), um ponto para a primeira derivada, dois pontos para a segunda derivada ($\ddot{x}$). É uma representação simples, mas tem o inconveniente de ser muito fácil "esquecer" ou "não ver" um ponto. A notação $\frac{dy}{dx}$ para a derivada foi introduzida por Leibniz[6] e esta foi a mais seguida na época (em particular no primeiro livro publicado sobre o Cálculo Diferencial, o livro do Marquês De L'Hospital de 1715), sendo ainda hoje muito usada. Foi Leibniz quem, a partir de 1675, veio algebrizar a análise infinitesimal. Foi ele quem introduziu as palavras variável, constante e parâmetro. Newton e Leibniz são apontados pelos historiadores da matemática como os maiores responsáveis pelo desenvolvimento do Cálculo não só devido aos seus métodos de derivação, mas principalmente pelos seus resultados, entre os quais se destaca o Teorema Fundamental do Cálculo.

No livro "Teoria das funções analíticas", de 1797, (traduzido para o português em 1798 por Manuel Jacinto Nogueira da Gama), o matemático francês

---

[5] NEWTON, Isaac (1642-1727), físico, matemático e astrônomo inglês, introduziu o método de interpolação baseado no cálculo de diferenciais finitos.

[6] LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646-1716), filósofo, matemático, jurista e homem de negócios alemão, foi o primeiro matemático que utilizou o termo função. Para ele e para os matemáticos do século XVIII, o conceito de função estava relacionado com uma fórmula algébrica que expressava a dependência entre duas variáveis.

Lagrange[7] introduziu novas notações, que são, hoje, muito utilizadas: $f'(x)$ e y' designam a primeira derivada, $f''(x)$ e y'' a segunda derivada, etc. A própria designação "função derivada" foi introduzida por Lagrange (antes eram usados os termos fluxão e fluente)[8]. Hoje também é usada a notação $D_X y$ para designar a derivada de y em relação a x; esta notação foi introduzida pelo matemático francês Arbogast[9] em 1800.

Apesar dos estudos desenvolvidos pelos grandes matemáticos durante o século XVII, é necessário esperar por 1823 para encontrar na obra de Cauchy[10] a noção de limite e a definição formal de derivada. Assim o conceito de derivada começa a surgir no século XVII, mas só com Cauchy é que se definem claramente limite e derivada.

O estudo sobre a noção de derivada nos livros didáticos substancia-se no seguinte: como o nosso trabalho consiste em analisar a representação semiótica do conceito de derivada no processo de aprendizagem, entendemos que os livros selecionados pelos professores, e os próprios professores, com suas respectivas anotações, apontamentos e propostas, são indissociáveis. A escolha do livro revela uma primeira compatibilidade entre a proposta do autor e a estratégia do professor. Essa premissa nos parece razoável diante do grande número de livros didáticos de Cálculo existentes e das escolhas realizadas. Um livro não é

---

[7] LAGRANGE, Joseph Louis (1736-1813) foi um matemático francês que esteve ligado à evolução da análise e foi considerado o maior matemático europeu da sua época.

[8] Os Fluxions - ou Fluxões - eram para Newton as derivadas
Os Fluents - ou Fluentes - eram para Newton as integrais

[9] ARBOGAST, Louis François Antoine (1759-1803), "De Calcul des dérivations et ses usages dans la théorie des suites et dans le calcul différentiel," Strasbourg, xxii, pp. 404, Impr. de Levrault, fréres, an VIII (1800).

[10] CAUCHY, Augustin-Louis (1789-1857), matemático francês, escreveu extensivamente e profundamente tanto sobre matemática pura como sobre matemática aplicada. Deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do Cálculo apresentado nos textos universitários atuais.

escolhido por acaso, a opção de um professor por um determinado livro didático revela sua maior identificação com o mesmo. Consideramos que, nesta identificação do professor com o livro didático, os registros de representação têm importância fundamental. Optamos em verificar nos quatro livros já selecionados, em nosso trabalho, os registros que, possivelmente, os professores também adotam para a representação do conceito de derivada. Não descartamos as possibilidades de os professores interferirem, em alguns momentos, com conceitos e registros diferentes dos livros adotados, mesmo porque é nesses momentos que se revelam a criatividade e a potencialidade que cada professor possui. Assim o curso não se desenvolve necessariamente de modo idêntico ao livro, mas, de modo geral, a organização apresentada no texto e a linguagem utilizada nestes livros fornecem indícios das intenções do professor e de sua crença em que os registros privilegiados pelos livros didáticos adotados podem facilitar a construção do conhecimento por parte de seus alunos.

Na apresentação do conceito de Derivada, pelos livros que selecionamos, encontramos uma seqüência quase que idêntica[11] de um para outro na forma e na ordem de abordagem desse conceito. Apesar dessa similitude na ordem dos assuntos abordados, podemos perceber a diferença do enfoque dado pelos autores – alguns privilegiam os procedimentos relacionados à taxa de variação instantânea; outros privilegiam os procedimentos relacionados à representação gráfica da derivada, e outros os tratamentos no interior dos registros simbólicos da derivada. Escolhemos apresentar, neste momento, as definições e as seqüências utilizadas nos livros citados anteriormente, para

[11] Apenas o livro Swokowski, apresenta já na primeira abordagem, o conceito de Derivada como Taxa de Variação Instantânea, juntamente com o conceito de coeficiente angular da reta tangente.

analisarmos e detectarmos os vários registros de representação contemplados pelos autores e as situações onde são mobilizados.

3.1. CÁLCULO A – DIVA MARÍLIA FLEMMING

O livro de Flemming & Gonçalves é um dos livros de autoria nacional, que mais apareceu em nossa pesquisa com professores de variadas instituições de ensino superior e que está apresentado no anexo II. É produto de uma experiência de mais de vinte anos das autoras e professoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC – cobrindo basicamente todos os conteúdos programáticos de Cálculo I. Recebeu, posteriormente, uma continuação através dos livros *Cálculo B* e *Cálculo C.*

Observando o capítulo 4 – Derivadas – destacamos os seguintes itens:

- **Inclinação da Reta Tangente**

"Dada uma curva $y = f(x)$*, seja* $P(x_1, y_1)$ *um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto* P *é dada por:"*

$$\boxed{m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

Inicialmente é feita uma apresentação do conceito de inclinação de uma reta tangente a uma curva, em um ponto específico, apoiando-se na idéia de limite. Até este momento as autoras ainda não fizeram referência à derivada, apesar de explorarem sua representação simbólica algébrica. Esta forma de representação é usada nas soluções dos exercícios resolvidos e esperada nas atividades propostas aos alunos, da seguinte forma:

a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1)

Notamos a presença da língua natural "inclinação da reta tangente" no registro de partida, porém, até aqui, ainda não foi feita a interpretação conceitual desta *inclinação*, como sendo a derivada da função para o ponto considerado. No exemplo apresentado, as autoras utilizam, em suas resoluções, a representação simbólica algébrica de derivada como limite.

- **Equação da Reta Tangente**

Conhecendo-se a inclinação da reta tangente à curva no ponto P, passa-se ao estudo da equação da reta tangente à curva em P.

$$\boxed{y - f(x_1) = m \cdot (x - x_1)}$$

Da mesma forma como foi colocado no exemplo anterior, para o cálculo da inclinação da reta tangente, são apresentados agora exercícios resolvidos com a finalidade de se encontrar a equação da reta tangente a uma curva dada, explorando o tratamento dentro do registro de representação simbólico algébrico de limite. É contemplado, também, nestes exercícios resolvidos, o registro de representação gráfica da reta tangente à curva. Entretanto, não se vê a intenção de reduzir as dificuldades encontradas nos registros de origem; uma vez que não é solicitada análise ou interpretação gráfica, nos parece que essa forma de representação é utilizada para traduzir simplesmente um resultado já obtido.

- **Derivada de uma função em um ponto.**

"A Derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, é definida pelo limite:"

$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

É neste momento que as autoras começam a estabelecer uma relação do registro simbólico, apresentado acima, com o registro de língua natural da derivada. Informando pela primeira vez que a derivada, f', de uma função pode ser interpretada como uma função, cujo valor em x, é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em x.

- **A Derivada de uma Função**

"*A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, (lê-se f linha de x), tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por*

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

se este limite existir."

Estes dois últimos tópicos são apresentados seguidamente. Dessa forma, os próximos exemplos contemplam tanto *derivada de uma função em um ponto*, quanto *derivada de uma função*. Entretanto, a distinção entre um e outro conceito é sugerida apenas pela representação simbólica da forma:

i) Encontre $f'(2)$

ii) Encontre $f'(x)$

No final deste tópico são apresentadas outras formas de representação simbólica da derivada, no lugar de $y' = f'(x)$, a saber:

1. $D_x f(x)$ *(lê-se derivada de* $f(x)$ *em relação a* x*)*
2. $D_x y$ *(lê-se derivada de* y *em relação a* x*)*
3. $\dfrac{dy}{dx}$ *(lê-se a derivada de* y *em relação a* x*)*

Achamos importante ressaltar que, em todos os exemplos (exercícios resolvidos) e exercícios propostos apresentados, até este momento, foram usadas como registro de partida apenas duas representações: no registro de língua natural *"derivada da função"* ou no registro simbólico *"*$f'(x)$*".* Foi considerada também a representação $f'(3)$ para a determinação do valor da derivada da função no ponto $x = 3$. No entanto, não é utilizado o registro de língua natural: *derivada da função no ponto* $x = 3$*.* Enfatizamos este caso por não constar nos exercícios a distinção entre os conceitos: derivada de uma função X derivada da função em um ponto. Torna-se nosso interesse verificar, também, se os sujeitos desta pesquisa conseguem distinguir, pelos registros de representação simbólico, esses dois conceitos.

- **Regras de Derivação**

São deduzidas, nesta seção, várias regras, chamadas de regras de derivação, que permitem determinar as derivadas das funções sem o uso da definição. Nesta seção, para o caso específico da "Regra da Cadeia" foi utilizado também o registro simbólico $\dfrac{dy}{dx}$.

- Derivada de uma constante
- Derivada de somas e diferenças

- ➢ Regra do Produto
- ➢ Regra do quociente
- ➢ Regra da Cadeia
- ➢ Derivada de funções trigonométricas

- **Interpretação da Derivada como a taxa de variação instantânea**

Após percorrermos 101 páginas que tratam do conceito de derivada, o livro apresenta, pela primeira vez, a definição de derivada como taxa de variação instantânea. Para isso aborda, inicialmente, o conceito físico de velocidade média considerando-a como taxa de variação média, e em seguida apresenta o conceito de velocidade instantânea para então instituir a noção de taxa de variação instantânea.

Segundo as autoras:

"Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$*, quando a variável independente varia de* x *a* $x + \Delta x$*, a correspondente variação de* y *será* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$*. O quociente* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *representa a taxa de variação média de y em relação a x. A derivada* $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *representa a taxa de variação instantânea ou simplesmente taxa de variação de* y *em relação a* x*."*

A partir dessa definição são apresentados, neste livro, diversos exemplos (exercícios resolvidos) nos quais é utilizado o registro simbólico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para taxa de variação média e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para taxa de variação instantânea.

Nesses exemplos, a aplicação da derivada, interpretada como uma razão de variação, é mostrada nos diferentes ramos das ciências. Procuramos acrescentar neste trabalho dois exemplos que nos permitissem verificar as situações em que tal interpretação da derivada é objetivada.

1. Na Economia

O custo, em reais, da fabricação de x relógios em uma fábrica é dado por:
$C(x) = 2x^2 + x + 8$

a) ache o custo marginal quando x = 40
b) O custo real de fabricação 41º relógio

Para propor esse tipo de questão, o conceito de custo marginal deve ter sido abordado anteriormente. Para resolver o *item a,* devemos compreender que o custo marginal define, neste caso, a forma como o custo da fabricação está variando com a variação da quantidade do produto fabricado a cada instante. Assim, esse exercício nos remete ao conceito de derivada como taxa de variação instantânea.

Solução:

Item a) Derivando a função C, que representa o custo, teremos uma nova função que determina como o valor do custo está variando em um instante considerado. Desta forma: $C'(x) = 4x + 1$, então, para x = 40 teremos, $C'(40) = 4 \cdot 40 + 1$ $\therefore$ C'(40)= 161 reais/unidade, o que significa que, para o instante em que a fabricação chegar a 40 relógios, o custo operacional estará valendo R$ 161,00 por unidade fabricada.

Item b) Notemos que neste item não há interesse de conhecer como o preço de fabricação dos relógios está variando com o número de relógios fabricados, mas sim, qual é o custo apenas do quadragésimo primeiro relógio fabricado.

C(40) representa o custo dos primeiros quarenta relógios fabricados.
C(41) representa o custo dos primeiros quarenta e um relógios fabricados.

$C(40) = 2.(40)^2 + 40 + 8 \quad \therefore \quad C(40) = 3248$

$C(41) = 2.(41)^2 + 41 + 8 \quad \therefore \quad C(41) = 3411$ assim $C(41) - C(40) = 163$ que representa o custo do 41º relógio vendido, isto é, esse relógio custa para a fábrica
R$ 163,00.

2. Na Física

A voltagem em certo circuito elétrico é de 100 volts. Se a corrente (em ampères) é i e a resistência (em ohms) é R, então, pela lei de Ohm, $i = \frac{100}{R}$. Se R está aumentando:

a) encontre uma expressão (fórmula) que determine a taxa de variação da corrente elétrica em relação à resistência R.

b) qual o valor da variação da corrente elétrica no instante em que a resistência for igual a 20 .

Solução:

Item a) Na situação proposta, é dada a função que relaciona o valor da corrente elétrica com o valor da resistência, para uma tensão constante de 100 V. Para obtermos a taxa de variação da corrente em relação à resistência, derivamos a função $i = \frac{100}{R}$; desta forma, teremos: $\frac{di}{dR} = -\frac{100}{R^2}$ que representa a maneira como a corrente estará variando em relação à variação da resistência elétrica. Pela função encontrada, podemos dizer que a corrente varia de forma inversamente proporcional ao quadrado da resistência.

Item b) Substituindo o valor R = 20 , na função encontrada no item a, temos:

$$\left.\frac{di}{dR}\right|_{R=20} = -\frac{100}{20^2} = -0{,}25 \text{ A / } .$$

O sinal negativo indica que quando R = 20 a corrente está decrescendo à taxa de 0,25 Ampère por ohm.

Muitas outras situações são mostradas nos exercícios de aplicação de derivada como taxa de variação na Estatística, na Medicina, na Química, etc.

Por fim, encontramos o conceito de derivada abordado na *Análise do comportamento das Funções*. Esta situação refere-se à determinação dos pontos de máximo e de mínimo de uma função, denominados *pontos extremos,* e também da discussão dos intervalos onde a curva é crescente ou decrescente. São apresentadas as definições de máximo relativo e mínimo relativo seguidas da proposição:

"Suponhamos que f *tem um ponto de máximo relativo em* c *e que* $f'(c)$ *existe, então,* $f'(c)=0$ *".* Esta proposição é demonstrada a partir do registro simbólico de derivada como o limite: $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ e é descrita sua interpretação geométrica: *" Se* f *tem um extremo relativo em* c *e se* $f'(c)$ *existe, então o gráfico de* $y = f(x)$ *tem uma reta tangente horizontal no ponto onde* $x = c$ *"*; todavia não é utilizado nesta proposição o registro de representação gráfica.

Depois desse estudo, na seção seguinte, encontramos questões de maximização e minimização problematizando o conceito de derivada a partir da noção de variação. Espera-se, neste momento, que o estudante já tenha apreendido o conceito de derivada e consiga mobilizá-lo para resolução dos problemas propostos.

Passamos agora à análise de outro livro selecionado para o estudo e verificação dos registros de representação que pode fazer parte do contexto dos alunos, sujeitos desta pesquisa.

3.2. UM CURSO DE CÁLCULO – HAMILTON LUIZ GUIDORIZZI

No prefácio, o autor afirma que seu livro se baseia nos cursos de Cálculo que tem ministrado aos alunos da Escola Politécnica da USP, do Instituto de Matemática e Estatística da USP e do Instituto de Ensino de Engenharia Paulista. Alerta também para o fato de que procurou fazer com que os conceitos e teoremas apresentados venham, sempre que possível, acompanhados de uma motivação ou interpretação geométrica ou física.

Na introdução do capítulo 7, *DERIVADAS*, o autor faz uma breve interpretação geométrica da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, apontando o coeficiente angular como sendo $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$. Ainda na introdução é contemplada a idéia de velocidade média e velocidade instantânea. Até este momento, a derivada não é representada no registro de língua natural, isto é, o leitor não associa aos registros simbólicos o *“nome”* derivada.

- **Derivada de uma Função**

Definição: "*Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite* $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ *quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por f' (p) (leia: f linha de p). Assim* $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p."

Após essa definição, encontra-se: "*A derivada de* f*, em p é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p".*

Neste momento são apresentados os seguintes exemplos (exercícios resolvidos):

EXEMPLO 1. Seja $f(x) = x^2$. Calcule.

a) *f' (1)*

b) *f' (x)*

c) f' (-3)

Estes exemplos são resolvidos pela definição. No *item b* é posto que $f'(x) = 2x$, é a fórmula que nos fornece a derivada de $f(x) = x^2$ em todo x real. O livro não explicita, no registro de língua natural, *função derivada.* Podemos observar que os exercícios apresentados têm como registro de partida o registro simbólico de derivada.

EXEMPLO 2. Seja $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto:

a) (1, *f* (1))

b) (-1, *f* (-1))

Na solução apresentada pelo livro contempla-se o registro figural (gráfico); neste registro, encontra-se a curva da função f e a reta tangente, mas não é feita nenhuma notação a respeito da inclinação da reta tangente (coeficiente angular). Porém, em vários exercícios propostos, o autor insiste na construção do gráfico, e, também, na análise quanto ao sinal da derivada. Este tipo de abordagem pode proporcionar ao aluno mobilizar o conceito de derivada como declividade da reta tangente (coeficiente angular). Vejamos alguns exemplos.

Exercício 2 (pág. 143) – Seja $f(x) = 2x$. Pensando geometricamente, qual o valor que você espera para $f'(p)$? Calcule $f'(p)$.

Exercício 8 (pág. 144) – Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\Re$, tal que f'(x) > 0 para todo x.

Exercício 13 (pág. 144) – Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\Re$, tal que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 0$.

Após esse estudo, o livro passa a tratar a derivada apenas pela suas regras de determinação direta. Apresentando então:

- Derivadas de x^n e $\sqrt[n]{x}$
- Derivadas de e^x e $\ln x$
- Derivadas das Funções Trigonométricas
- Derivabilidade e Continuidade
- Regras de Derivação

Até este ponto, os exercícios resolvidos e os exercícios propostos não proporcionam aos estudantes uma maior articulação dos registros de representação, ficando restritos aos seguintes registros: *"derivada"* (língua natural); "$f'(x)$" (representação simbólica). O significado de derivada como coeficiente angular continua sendo explorado, implicitamente, na determinação da equação da reta tangente. Utilizamos o termo "*implicitamente*", pois os exercícios não mencionam o coeficiente angular e nem mesmo a inclinação da reta tangente; assim, acreditamos que o aluno possa desenvolver o procedimento para a determinação da equação da reta tangente sem compreender o significado da derivada como coeficiente angular.

- **Função Derivada e Derivadas de Ordem Superior**

Neste item o autor apresenta, pela primeira vez, no registro de língua natural, a *função derivada*. *"Sejam f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função f': $A \to \Re$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se* ***função derivada*** *ou derivada de 1ª ordem de f".*

Não há preocupação com a diferenciação entre os conceitos de função derivada e o valor da derivada de uma função num ponto.

- **Notações para a Derivada**

É interessante ressaltar que esse livro didático separa um item, exclusivamente, para apresentar os registros simbólicos da derivada, os quais são apresentados da seguinte forma:

"Se a função vem dada por $y = f(x)$ temos:"

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$ Para indicar a derivada de $y = f(x)$ em $x = x_0$.

$$\frac{df}{dx} = f'$$ Para indicar a função derivada de $y = f(x)$

A derivada de $y = f(x)$, em x, será então indicada por $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$

- **Velocidade e Aceleração. Taxa de Variação**

Encontra-se, então, após 60 páginas de estudos sobre o conceito de derivada, a interpretação deste conceito como Taxa de Variação.

"Suponhamos que uma partícula se desloca sobre o eixo x com função de posição $x = f(t)$. Isto significa dizer que a função f fornece a cada instante a posição ocupada pela partícula na reta. A velocidade média da partícula entre os instantes t e t + t é definida pelo quociente entre $\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, onde $\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes t e t + t. A velocidade da partícula no instante t é definida como sendo a derivada (caso exista) de f em t, isto é: $v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t)$ assim pela definição de derivada, temos:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

A aceleração no instante t é definida como sendo a derivada em t da função

$v = v(t)$ $\qquad a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ *pela definição de derivada,*

$$\boxed{a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}}$$

O quociente $\dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ *é a aceleração média entre os instantes t e t + t".*

O autor apresenta o significado de derivada como taxa de variação focando esse estudo no conceito físico de velocidade e aceleração, não explorando o conceito taxa de variação de uma forma mais ampla. Como, por exemplo, se x e y forem quantidades relacionadas por uma equação $y = f(x)$, podemos considerar a taxa segundo a qual y varia com x. Neste caso temos outras situações que decorrem do emprego de taxa, o custo marginal de um produto (economia), a taxa segundo a qual o raio de uma artéria varia com a concentração de álcool na corrente sangüínea (pesquisa médica), etc.

Os exercícios resolvidos pelo livro, nesta parte do assunto de derivada, seguem a seguinte forma: é apresentada a função segundo a qual uma partícula se movimenta e, em seguida, pede-se a velocidade no instante t. São poucos os exercícios que não especificam o movimento de uma partícula, através de uma função algébrica, para em seguida questionar o valor da velocidade e da aceleração. Entendemos que, dessa forma, o estudante pode ser levado a pensar em taxa de variação instantânea exclusivamente como velocidade instantânea e aceleração instantânea, restringindo sua aplicação geral como taxa de variação.

3.3. CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA – LOUIS LEITHOLD

Neste livro didático, o autor descreve em uma pequena introdução antes de entrar, efetivamente, no Capítulo 3 - A Derivada e a Derivação. Nesta descrição ele faz um apanhado geral sobre a derivada, seus estudos e aplicações. Parece-nos interessante esta colocação no início do assunto, pois já expõem, mesmo que brevemente, os significados do conceito de derivada.

- **A Reta Tangente e a Derivada**

Assim como nos dois primeiros livros analisados, o estudo da derivada se inicia pela interpretação geométrica e pelo conceito de reta tangente. O autor define *$m(x_1)$* como a inclinação da reta tangente.

"*Suponhamos que a função f seja contínua em x_1. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por:*

$m(x_1)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ *se o limite existir".*

São apresentados três exemplos (exercícios resolvidos); em dois deles ,são dadas as funções algébricas, e pedido, no registro de língua natural, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico destas funções. No terceiro exercício é dada a função e um ponto pertencente a ela; pede-se, neste, a equação da reta tangente. Nos três exercícios apresentados pelo livro é esboçado o gráfico das soluções.

- **Derivada de uma função**

"A derivada de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir".

"Se x_1 for um determinado número no domínio de f, então $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ *se este limite existir".*

Neste ponto do estudo o autor revela o significado da derivada como inclinação da reta tangente: *"Note que a inclinação da reta tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (x_1, f(x_1)) é precisamente a derivada de f calculada em x_1."*

Em seguida é mostrada, com um exercício resolvido, a determinação da derivada: *"Ache a derivada de f se f(x) = $3x^2+12$"*

Este livro apresenta, neste momento, outras representações simbólicas para derivada, relatando um pouco da história destas representações e seus autores. São elas:

Se y = f(x) então y' = f'(x) ou ainda $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *(y é chamado de incremento de y e denota a variação no valor da função quando x varia de x)*

Outras representações utilizadas:

$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$ para o valor da derivada em x = x_1

$\frac{d}{dx}[f(x)]$ e $D_x[f(x)]$

Nos exercícios propostos pelo livro, encontramos situações em que os registros de partida estão na língua natural: *determine a derivada da função (...),ache a inclinação da reta tangente (...), encontre a equação da reta tangente (...);* e situações em que os registros de partida estão no registro simbólico*, Ache* *f’(x)(...), Ache* $\frac{dy}{dx}$ *(...), Encontre para as funções dadas (...)* $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

A partir deste momento são apresentados alguns teoremas sobre derivação de funções algébricas para em seguida explorar o conceito de derivada como taxa de variação. Para introduzir o significado de taxa de variação, é apresentado inicialmente o conceito físico de movimento retilíneo no qual é mostrada a função do espaço em relação ao tempo e à noção de velocidade média. Define-se, então, a velocidade instantânea como a derivada da função do espaço em relação ao tempo.

“Se f for uma função dada pela equação $S = f(t)$ então $v = f'(t) \Leftrightarrow v = \frac{dS}{dt}$ ”

São dados dois exercícios resolvidos que exploram a idéia do movimento retilíneo e em seguida já é apresentada a definição de taxa de variação.

- **Taxa de Variação Instantânea**

“Seja $y = f(x)$*; a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em* x_1 *é* $f'(x_1)$ *ou, equivalentemente, a derivada de y com respeito a x em* x_1*, se ela existir no ponto* x_1*.”*

É mostrada, através de um gráfico, uma ilustração geométrica do significado de taxa de variação, apontando, no mesmo, a taxa de variação média de variação de y por unidade de variação de x, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Após essa abordagem, o livro apresenta uma seqüência de exemplos de aplicação do conceito de taxa de variação em dois ramos das ciências; em Física, mostrando que a resistência diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado da corrente elétrica; em Economia, utilizando o conceito de custo marginal e rendimento marginal. Os exemplos são seguidos de exercícios propostos nos quais se aplica o conceito de derivada com o significado, taxa de variação instantânea.

3.4 CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA – EARL W. SWOKOWSKI

Esse é o último dos quatro livros, selecionados por nós junto aos professores das disciplinas de Cálculo, com a finalidade de verificar os registros de representação do conceito derivada, que são apresentados aos estudantes. Em nota introdutória do capítulo 3 – A DERIVADA – o livro já destaca dois problemas de aplicação; o primeiro consiste em determinar o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função, e o segundo, em definir a velocidade de um objeto em movimento retilíneo. Nessa nota inicial o autor já afirma que os dois problemas citados conduzem ao conceito de derivada.

Como os demais livros analisados, esse também começa o estudo da derivada abordando o conceito de reta tangente, no intuito de definir o coeficiente angular desta reta em um determinado ponto. Faz-se a interpretação geométrica da reta tangente e chega-se, então, à definição do coeficiente angular.

“ O coeficiente angular m_a da tangente ao gráfico de uma função f em P(a, f(a)) é $m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *desde que o limite exista. Utiliza-se ainda a forma alternativa,* $m_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *fazendo* $h = x - a$ *ou equivalentemente,* $x = a + h$. Notamos que esse livro utiliza preferencialmente a última representação

simbólica, diferente dos demais que, como vimos, utilizam: $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

Nesse livro, há uma diferença na ordem de apresentação dos conceitos de derivada com relação aos demais livros selecionados. O autor, antes de estabelecer o conceito de derivada como sendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função, define velocidade média, velocidade instantânea, e, em seguida, define o conceito de taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Os exemplos e os exercícios propostos, nesta seção, não mencionam derivada no registro de língua natural, mas utilizam a definição de coeficiente angular, mostrada acima, para resolver as diversas situações propostas.

- **Definição de Derivada**

Após ter trabalhado o conceito de taxa de variação é que o livro apresenta a definição de derivada:

"A derivada de uma função f é a função f' definida por $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ **desde que o limite exista."**

E ainda afirma:

"É importante notar que, ao determinar f'(x), consideramos x um número real arbitrário e o limite quando h tende para zero. Obtida ***f'(x)****, podemos determinar* ***f'(a)*** *para um certo* ***a*** *substituindo x por* ***a****."* Nesta afirmação, fica clara a intenção do autor em distinguir, usando o registro simbólico, a função derivada, do valor da derivada da função num ponto, porém não o faz no registro de língua natural.

É mostrada, ainda, uma forma alternativa de representação de derivada: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ Autor destaca: *"esta foi a primeira fórmula para definir m_a."*

- **Notações para a derivada de** $y = f(x)$

Esse livro traz também um item no qual apresenta diversas formas de representação simbólica da derivada; são elas:

$$f'(x) = D_x f(x) = D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Mais à frente o autor observa:

"Note que $D_x y = y' = \frac{dy}{dx}$ são os símbolos da derivada de y em relação a x. Se quisermos indicar o valor da derivada $D_x y$, y' e $\frac{dy}{dx}$ para algum número $x = a$, costumamos utilizar um colchete simples ou duplo, escrevendo:"

$$\left. D_x y \right]_{x=a}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right]_{x=a}, \quad \left[D_x y \right]_{x=a} \text{ ou } \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=a}$$

A partir daqui o livro começa a trabalhar alguns exercícios resolvidos, que são modelos para os exercícios propostos. Nos exercícios propostos, desta seção, o autor explora diversas formas de representação do conceito de derivada e trabalha também diferentes significados como coeficiente angular e taxa de variação.

Finalizando o estudo inicial do conceito de derivada, são demonstradas as técnicas de diferenciação (regras diretas) e a seguir são propostos para o estudante exercícios que se destinam à aplicação direta das regras de derivadas.

Como já observamos anteriormente, esse livro adota uma seqüência de apresentação diferente para o estudo de derivada. Enquanto que nos outros livros, investigados, após a interpretação geométrica do conceito de derivada, são demonstradas as regras de derivação, Swokowski, após a interpretação geométrica e a definição de coeficiente angular, discute o significado de taxa de variação e propõe a resolução dos exercícios a partir do cálculo do coeficiente angular.

Terminamos assim uma investigação nos livros selecionados, o que nos permitiu conhecer a seqüência com que os registros de representação do conceito de derivada são apresentados, quais são estes registros, quais são as diferentes representações dentro de um mesmo registro, e ainda, reavaliar os significados de derivada e como estes são abordados por esses livros didáticos. A partir desse estudo nos livros escolhidos, confeccionamos os exercícios dos testes diagnósticos privilegiando os registros de representação de derivada utilizados nesses livros, considerando que os alunos, sujeitos desta pesquisa, tenham, em algum momento dos seus estudos, utilizado, como fonte de consulta, os mesmos livros didáticos.

Nesse estudo dos livros didáticos identificamos e selecionamos os diversos tipos de registros utilizados na representação do conceito de derivada.

Isso se faz necessário, uma vez que é nossa intenção analisar a diversidade de registros mobilizados pelos alunos, e que, possivelmente, estão relacionados com os registros contemplados nos livros didáticos utilizados por eles.

3.5. REGISTROS SEMIÓTICOS DO CONCEITO DE DERIVADA

Registro na Língua Natural

- Derivada da função f num ponto x
- Tangente do ângulo formado (no sentido anti-horário) entre a reta t (tangente à curva) e o eixo horizontal x.
- Função derivada
- Derivada de y
- Derivada de y em relação à x
- Taxa instantânea de variação de y em relação à x
- Coeficiente angular da reta tangente à curva.
- Limite da razão incremental
- Limite da variação de y em relação à variação de x, quando a variação de x tende a zero
- Derivada primeira
- Inclinação da reta tangente à curva no ponto de abscissa $x = a$
- Derivada de y em relação à x no ponto de abscissa $x = a$

Registro Simbólico/ Algébrico

$f'(x)$; $tg\alpha$; $D_x y$; y'; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx} f(x)$; $D_x f(x)$;

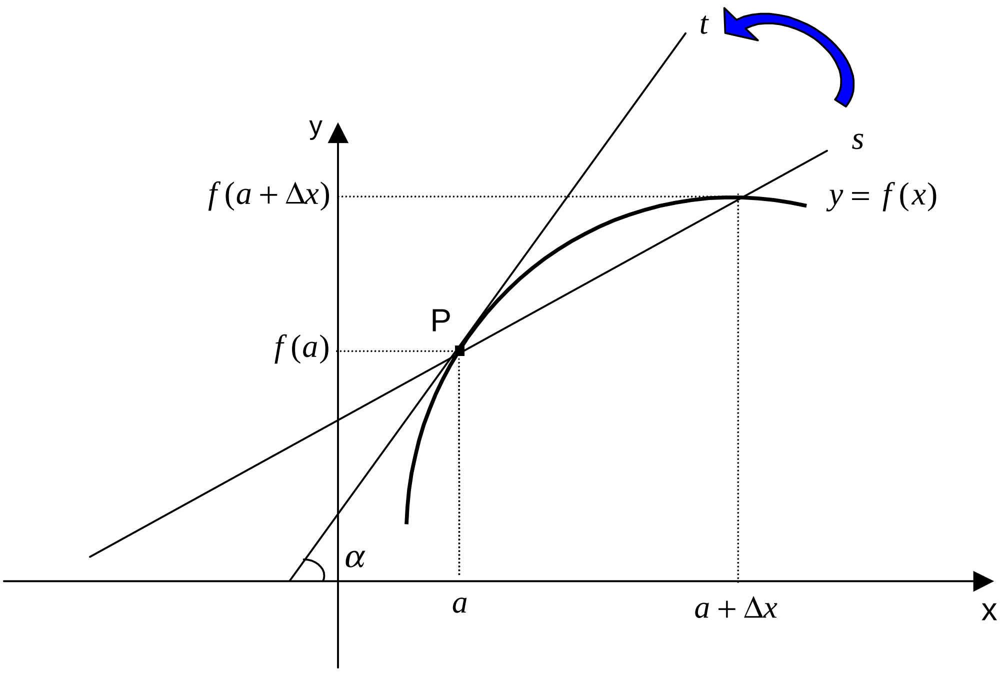
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; $f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; $y'(a)$; $\frac{dy}{dx}(a)$; $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$

Registro Simbólico Algébrico/ Numérico

$f'(2) = 4$

Registro Figural (Interpretação geométrica)



s : reta secante à curva $y = f(x)$

t : reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P$(a, f(a))$

Um teste de sondagem foi o instrumento elaborado para identificar quais registros de representação do conceito de derivada são mobilizados pelos sujeitos investigados e, também, como eles lidam com conversões de registros.

CAPÍTULO 4

OS TESTES DIAGNÓSTICOS

4.1. O 1º TESTE

As questões do teste foram elaboradas de modo a não contemplar exercícios iguais aos dos livros consultados, procurando evitar soluções típicas resolvidas em classe.

A análise *a priori* de cada item das questões apresenta nossas expectativas com relação às possíveis soluções dos alunos.

1ª Questão: Qual o significado dos seguintes símbolos? Responda por uma frase ou graficamente.

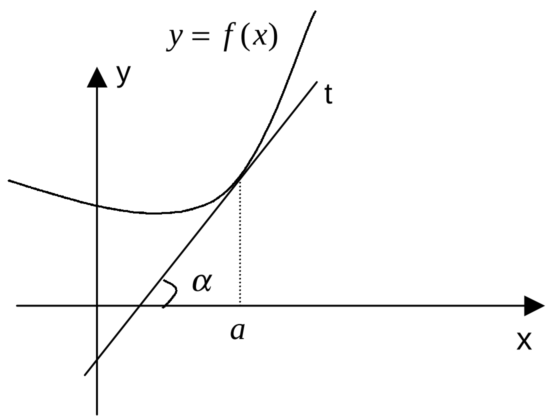
a) $\dfrac{dy}{dx}(a)$

b) $y'(a)$

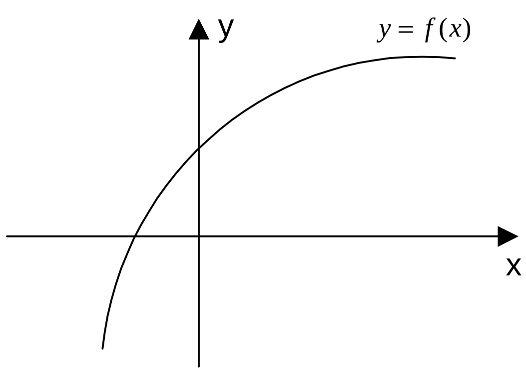
c) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Na primeira questão, procurou-se avaliar a desempenho dos alunos numa atividade em que se pretenda que ele efetue uma conversão cujo registro de partida é o registro simbólico/algébrico.

2ª questão: Dado o gráfico da função f e sabendo-se que t é uma reta tangente no ponto de abscissa a. Qual o significado da tangente do ângulo α?



3ª Questão: A partir das situações descritas nas questões anteriores represente no gráfico $f'(x)$.



A segunda e a terceira questões têm por objetivo analisar se o aluno identifica o conceito de derivada a partir de seu registro de representação figural (gráfica), isto é, analisar se ele identifica a derivada de uma função num ponto como a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta tangente ao gráfico da função e o eixo x, orientado no sentido anti-horário; como o coeficiente angular dessa reta tangente, e se o mesmo tem condição de apresentar suas representações nas formas simbólicas (algébricas/numérica) e de língua natural.

4ª Questão :

a) O que é derivada de uma função f num ponto *a*?
b) O que é taxa de variação instantânea de uma função num ponto *a*?
c) Qual é a sua interpretação para o coeficiente angular de uma reta tangente t ao gráfico de uma função f num ponto de abscissa a?

A quarta questão foi elaborada para possibilitar que o aluno fornecesse a resposta no registro que lhe fosse mais familiar e para investigar quais eram os registros utilizados mais freqüentemente por esses alunos. Essa questão também tem o objetivo de investigar as relações estabelecidas dentro do registro de língua natural, contemplando-se sua diversidade interna, ou seja, mais de uma representação dentro do mesmo registro como foi apontado acima. Fazendo um paralelo com a primeira questão, busca-se considerar o sentido inverso das conversões entre os registros, uma vez que, na primeira, favorece-se o sentido simbólico/língua natural; nesta, espera-se o sentido língua natural/simbólico ou língua natural/figural (gráfico).

4.1.1. ANÁLISE *A PRIORI* DAS QUESTÕES

1ª Questão: Qual o significado dos seguintes símbolos? Responda por uma frase ou graficamente.

a) $\frac{dy}{dx}(a)$

b) $y'(a)$

c) $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

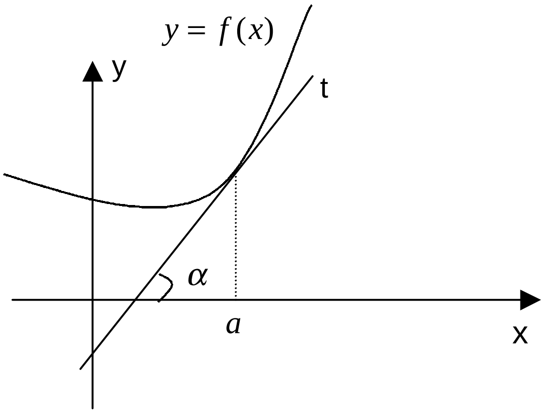
Para todos os itens, a resposta poderá ser dada por meio de uma conversão do registro simbólico para o registro de linguagem natural: "*derivada da função* y *no ponto a",* "*taxa de variação instantânea de* y *no ponto a"* e *"coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* y *no ponto de abscissa a",* ou ainda a conversão para o registro de representação figural (gráfico), isto é, dever-se-á traçar um gráfico de uma função de uma reta tangente à curva da função y, em um determinado ponto de abscissa *a*, destacar o ângulo formado por esta reta tangente e o eixo x no sentido anti-horário (a partir do eixo x), e apontar a tangente desse ângulo simbolicamente. É necessário, ainda, considerar a possibilidade de os alunos apresentarem, erroneamente, como resposta, o registro de língua natural, *função derivada de y*, não considerando o valor da função y no ponto x = a. No item b, como não está indicada a variável independente, caberiam duas interpretações:

$y'(a)$ derivada de y (y como função de a)

$y'(a)$ valor numérico da derivada de y *no ponto* a.

Vale ressaltar que foi esperada a interpretação do valor da derivada de y num ponto a, levando-se em conta o hábito de representar a variável independente pela letra x.

2ª Questão: Dado o gráfico da função f e sabendo-se que t é uma reta tangente no ponto de abscissa a. Qual o significado da tangente do ângulo α?



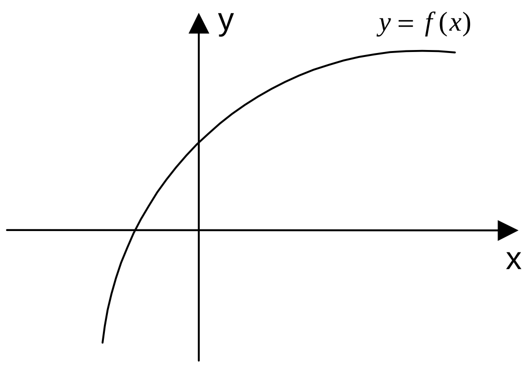
Nesta questão o registro de partida é o registro de representação figural (gráfico) e a expectativa é que os sujeitos pesquisados realizem a conversão do registro figural para o registro língua natural, e/ou para o registro simbólico: $\frac{dy}{dx}(a)$; $y'(a)$; $f'(a)$; $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Acredita-se que os estudantes possam apresentar uma maior dificuldade em responder a esta questão devido ao uso privilegiado do registro simbólico como registro de partida nos livros adotados.

Para Duval há dificuldade intrínseca das representações figurais gráficas. Diz ele: *"as representações figurais gráficas exigem um trabalho de aprendizagem particular, não se pode remeter para sua utilização à interpretação* *espontânea e imediata que está ligada à percepção das figuras e das imagens".* (Duval, 1996). Relativamente ao sentido de conversão entre os registros de representação, Duval (1996) apresenta resultados que evidenciam a maior facilidade dos alunos em fazer a conversão do registro simbólico para o figural (gráfico) do que no sentido oposto a este.

Essa constatação remete à necessidade de análise do fenômeno de *congruência* e *não-congruência*. No primeiro caso a representação do registro de partida é transparente à representação no registro de chegada, possibilitando uma passagem mais natural de um registro a outro; e, no segundo caso, o de *não-congruência*, a relação entre os registros de partida e de chegada não estabelece uma correspondência evidente. Por isso, acredita-se que para a 2ª questão o porcentual de conversões bem sucedidas seja menor que o das questões 1, 3 e 4.

3ª Questão: A partir das situações descritas nas questões anteriores represente no gráfico $f'(x)$



A expectativa aqui é que, tendo o estudante mobilizado o conceito de Derivada da função num ponto na tarefa de conversão entre o registro figural (gráfico) para o registro simbólico na questão anterior, isto favoreceria a resolução desta 3ª questão. Espera-se que o aluno trace uma reta tangente à curva da função f, num determinado ponto, denomine o ângulo formado por esta reta tangente e o eixo x no sentido anti-horário (a partir do eixo x), e escreva simbolicamente a tangente trigonométrica deste ângulo.

Vale destacar que se está considerando a representação $f'(x)$ como sendo o valor da função f num ponto de abscissa x. Mas tem-se a expectativa de que a interpretação do aluno para $f'(x)$ possa ser a função f' derivada de f.

4ªQuestão :

a) O que é derivada de uma função f num ponto *a*?
b) O que é taxa de variação instantânea de uma função num ponto *a* ?
c) Qual é a sua interpretação para o coeficiente angular de uma reta tangente t ao gráfico de uma função f num ponto de abscissa *a*?

Na 4ª questão o registro de partida é o mesmo para os itens a, b e c, isto é, registro de representação na língua natural. Tem-se a intenção de propiciar, nesta questão, a voluntariedade do aluno em contemplar as conversões no sentido inverso daquelas propostas na 1ª questão, isto é, deseja-se que o aluno faça a conversão para os registros simbólico e figural (gráfico). Dessa forma, poder-se-á analisar comparativamente com a 1ª questão qual a interferência de conversão congruente e não-congruente na resolução dos alunos.

4.1.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

1ª Questão

A resposta da 1ª questão – *item a*, fornecida pela grande maioria dos sujeitos pesquisados, mostra que o registro de representação simbólico de Derivada de uma função num ponto é convertido de forma mais freqüente para o registro de língua natural. Percebemos também que, dentro deste mesmo registro de língua natural, existe uma diversidade de expressões, algumas com certos erros que se repetiram, identicamente, numa quantidade importante; são elas: "*Derivada primeira de "a"; Derivada de y em relação à derivada de x; Função derivada*." (tabela1;anexo-I). Outras respostas incompletas que não mencionavam em que ponto estava sendo determinada a derivada da função, a saber: "*Derivada de y em relação à x; Derivada primeira de y; Derivada de uma função"* (tabela1;anexo-I). Acreditamos que os estudantes, sujeitos desta pesquisa, tenham apresentado respostas tão diversificadas, contendo, em sua maioria, formas errôneas, já citadas, pela dificuldade de reconhecer, nos registros de representação utilizados, a distinção entre o valor da derivada de uma função num ponto e a função derivada. Esta dificuldade está mais aparente nas respostas ***"função derivada"*** .

Pudemos notar, com a aplicação do teste, que o sucesso nas tarefas de conversão do registro simbólico para o registro de língua natural apresentado no *item a* não ocorreu como esperávamos. Acreditávamos que seriam contemplados, de forma mais expressiva, entre as respostas dos alunos, os registros: **"*taxa de variação instantânea no ponto a"*** *e* ***"coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto a"***. O registro simbólico utilizado na 1ª questão não garantiu, para estes estudantes, a conversão para o registro figural (gráfico), o que pode ser um indicativo de que esta conversão (simbólico/figural) é não-congruente, uma vez que o registro de partida não é transparente ao registro de chegada.

Quanto às respostas encontradas para o *item b*, chamaram-nos a atenção os registros da língua natural: ***"derivada primeira de a"*** e ***"derivada 1ª de y"*** que ocorreram com maior freqüência entre os alunos do curso de engenharia elétrica que estão estudando ou já estudaram Derivada de ordens superiores.

Para a simbologia utilizada neste item observamos também a confusão apresentada em 12,7% das respostas entre o valor numérico da função derivada com a função derivada propriamente. Alguns alunos usaram o registro simbólico $y'(a) = \frac{dy}{dx}(a)$ para expressar sua resposta; neste caso, pode ter ocorrido que o aluno tenha copiado a representação que está no enunciado do item anterior (tabela 1; anexo-I)

As respostas apresentadas no *item c* da 1ª questão mostram que o registro de representação simbólico foi convertido para o registro de representação da língua natural, porém quase 70% dos pesquisados descreveram-no como *o limite de uma função* e não fizeram nenhuma referência à *derivada da função num ponto*. Contudo, houve uma pequena porcentagem dos estudantes que atenderam à nossa expectativa de utilizar o registro de representação da língua natural: 9,7% **"*inclinação da reta tangente à curva no ponto a*"** e 9,7% **"derivada da função num determinado ponto"** (tabela 1; anexo-I).

2ª Questão

As respostas à 2ª questão evidenciaram que os estudantes, sujeitos da pesquisa, utilizaram tanto o registro da língua natural quanto o registro simbólico na leitura do registro gráfico. Percebemos também que o número de vezes que as respostas se repetiram foi bem distribuído, obtendo-se nesta questão a maior diversidade de representações utilizadas pelos alunos em todo o teste. Os resultados encontrados aqui, comparativamente com as outras questões, demonstraram que a conversão do registro figural para os demais registros aconteceu mais espontaneamente que o caso contrário. Verificamos que 82 alunos responderam a esta questão, um número menor apenas que o das respostas ao *item a* da 1ª questão (tabela 2; anexo-I). Isso nos surpreende, pois apresenta um dado oposto ao que esperávamos com relação à dificuldade de conversão entre os registros (figural/simbólico e figural/língua natural), apresentado por Duval no IREM de Strasbourg e comentado na análise a priori desta questão. Este fato permite que façamos a seguinte suposição: o sucesso dos estudantes na conversão do registro figural (gráfico) para os registros de língua natural e simbólico pode ser decorrente das atividades em sala, na introdução do conceito de Derivada, uma vez que a interpretação geométrica deste conceito é proposta nos livros didáticos utilizados pelos alunos pesquisados.

3ª Questão

Cerca de 65% dos sujeitos pesquisados não responderam a esta questão, o que nos leva a entender que a conversão entre o registro simbólico para o registro figural (gráfico) é, por alguma razão, para esse grupo de alunos, a conversão que apresenta maior dificuldade considerando-se as questões aplicadas.

É interessante ressaltar que a 3ª questão apresenta uma proposta de conversão no sentido inverso daquele considerado na 2ª questão, isto é, enquanto na 2ª questão o registro de representação de partida é o figural (gráfico), na 3ª questão o registro de partida é o simbólico, e a nossa expectativa é que o aluno utilize como resposta o registro figural (gráfico) como é indicado pelo enunciado.

Apontamos na análise da questão anterior o sucesso nas respostas dos alunos; em contrapartida, nesta questão em que a conversão tem sentido oposto, verificamos o mau êxito nas resoluções e o reduzido número de alunos que a responderam.

Desses resultados podemos fazer a seguinte conjectura: é possível que nas atividades escolares destes alunos os registros de representação simbólicos tenham sido privilegiados em detrimento do registro figural, ou ainda, que a introdução do conceito tenha se dado a partir do registro figural (gráfico), convertendo-se para o simbólico e/ou língua natural sem no entanto contemplar as conversões nos dois sentidos.

Percebemos, nesta questão, a existência de associação entre a interpretação da equação da reta tangente ao gráfico de f num ponto qualquer, como sendo f'(x) (tabela 3; anexo-I). Neste caso há uma confusão entre a reta tangente e a função derivada; o aluno está considerando o gráfico da função derivada da função f como sendo a reta tangente à curva de função *f.* Esta confusão foi discutida por Meyer (2003), quando levantou alguns elementos que compunham a imagem conceitual, relativa ao conceito de Derivada, quando interpretada geometricamente.

Uma representação incorreta foi apresentada, identicamente, por 19,1% dos que responderam a esta questão (tabela 3; anexo-I). Na análise pressupusemos a hipótese de estes alunos terem tomado a representação simbólica $f'(x)$ pela representação simbólica da função derivada f' ou $y = f'(x)$ e não como o valor da função num ponto de abscissa x. Aproximadamente 20% daqueles que responderam a esta questão fizeram-na corretamente.

4ª Questão

Nesta questão partimos dos registros de língua natural e procuramos deixar que os sujeitos pesquisados escolhessem os registros de representação que estariam utilizando para dar as respectivas respostas dos itens a, b e c. Para garantir esta possibilidade, deixamos para aplicar esta questão após a entrega das duas primeiras, considerando que as primeiras questões poderiam favorecer a reflexão sobre a diversidade de registros simbólico e figural.

No *item a*, as respostas mais freqüentes foram apresentadas no registro da língua natural, ***"inclinação da reta tangente à curva no ponto a"***, ***"coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto a"*** e ***"taxa de variação da função no ponto a"***. Neste item notamos a confusão em que a equação da reta tangente à curva, algumas vezes, é concebida como sendo a própria Derivada de uma função num ponto (tabela 4; anexo-I), também observada na 3ª questão. Embora tenha aparecido em menor número, aproximadamente 18% das soluções foram apresentadas no registro de representação simbólica (tabela 4; anexo-I)

No *item b* foi onde obtivemos menor número de respostas. Neste caso, 75% das respostas no registro de língua natural e 25% no registro de linguagem simbólica (tabela 4; anexo-I), não apareceu nenhum caso de conversão para o registro de língua figural (gráfica).

No *item c*, encontramos a maior diversidade de expressões dentro do mesmo registro de língua natural. Nesta questão percebemos, pelas respostas analisadas, a confusão entre o coeficiente angular da reta tangente e o ângulo formado pela tangente e o eixo do x (tabela 5; anexo-I). Encontramos alguns registros simbólicos (4,6%) e também alguns registros de representação figural (11,4%); aliás este foi o único item em que os sujeitos pesquisados utilizaram a conversão do registro de língua natural para o registro figural (gráfico), o que nos faz acreditar que o termo "em seu gráfico" utilizado na questão tenha favorecido esta conversão.

Considerando a análise de todas as questões, o registro de língua natural foi o mais mobilizado pelos alunos; neste registro observamos que a representação do conceito de Derivada que se inicia por "derivada da função..." é seguramente a mais utilizada. O registro menos utilizado nas respostas das questões foi o figural (gráfico). Neste registro também se encontra o maior porcentual de erro na representação do conceito de Derivada.

A análise dos resultados indicou a necessidade de retomarmos as questões respondidas no teste, com a finalidade de investigarmos uma questão que nos ocorreu, a saber: a representação utilizada por um determinado aluno em uma determinada questão não foi mantida sistematicamente como resposta das outras questões? Por exemplo, o aluno que respondeu na 1ª questão, item a:

"derivada da função no ponto a" manteve esta resposta para os itens seguintes e também para as questões 2 e 4? Se de fato isto ocorreu, este aluno estaria consciente das outras representações do conceito de Derivada?

Para se efetuar esse estudo fizemos o cruzamento das questões com os respectivos sujeitos das respostas. Os resultados encontrados evidenciam alguns aspectos:

1. As respostas não se repetem sistematicamente como havíamos questionado. Ao contrário, os sujeitos investigados responderam, talvez levados pela diferença de registros de partida, distintamente a cada questão.
2. A 1ª questão na qual o registro de partida é o simbólico, é respondida, quase que em sua totalidade, usando-se o registro de língua natural, numa representação que, metodicamente, começa com: *"Derivada* ...". Enquanto que na 4ª questão, partindo do registro de língua natural, surgem como respostas diversas representações internas ao registro de língua natural, como: "*taxa de variação instantânea no ponto a", "coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto a"*, "*inclinação da reta tangente à curva no ponto a", "taxa de variação da função num ponto" e "limite da função f quando* Δx *tende a zero"* e também usando a conversão para o registro simbólico: $f'(a)$; $\dfrac{df(a)}{dx}$; $\dfrac{dy}{dx}(a)$; $\lim_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Esses dois aspectos citados acima podem decorrer de uma relação professor-aluno que está subordinada a muitas regras e convenções acordadas entre eles e que normalmente não são explícitas. A isso, Brousseau (1986) denominou Contrato Didático. Além disso, pelo fato de o maior número de questões respondidas ser da 1ª questão, na qual o registro de partida era o simbólico e o de chegada podendo ser o de língua natural, podemos suspeitar das abordagens feitas no ensino do conceito de Derivada pelos livros didáticos que privilegiam o registro simbólico.

Após termos aplicado e analisado o 1º teste, percebemos a necessidade de verificar se os alunos, sujeitos desta pesquisa, tinham a compreensão dos significados do conceito de derivada, uma vez que poderiam apenas memorizar os registros de representação e tratá-los mecanicamente sem mobilizar o significado dos mesmos. Numa tentativa de revermos esta possibilidade da apreensão dos significados pelos alunos elaboramos um segundo teste e o aplicamos em um número de alunos, menor que o do 1º teste, a saber, 32 alunos. Tivemos o cuidado de aplicá-lo em uma mesma turma que havia participado do 1º teste, objetivando o cruzamento das respostas.

4.2. O 2º TESTE

O segundo teste teve a configuração abaixo:

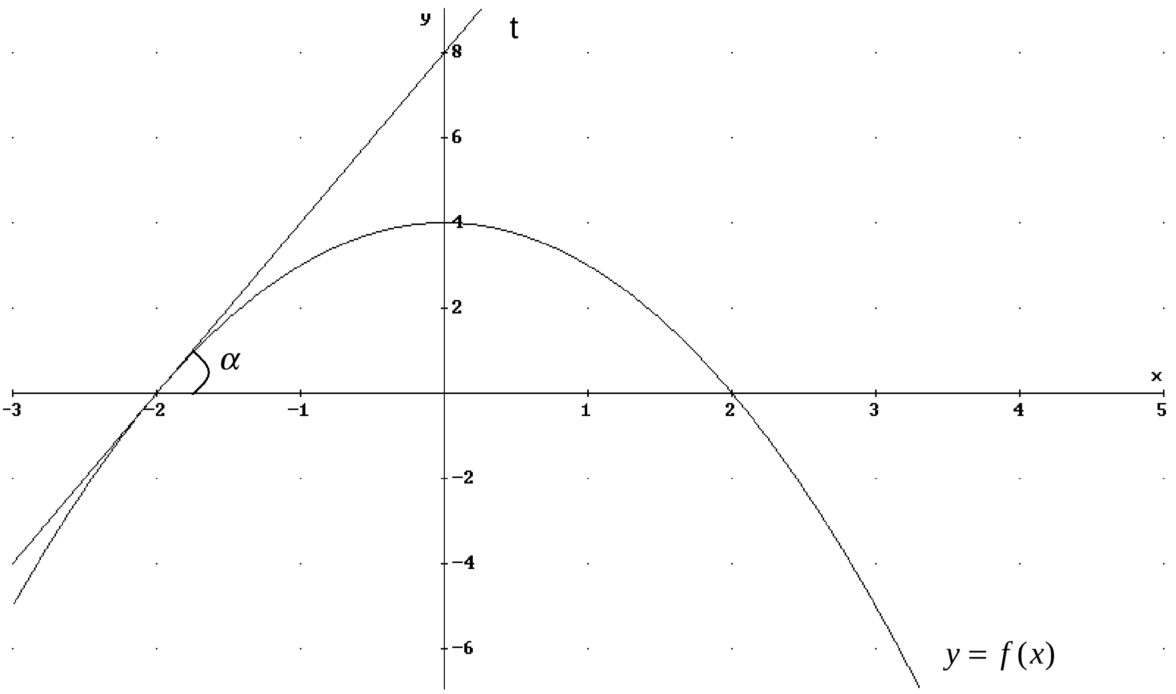
Instituição de Ensino:____

Nome: ____

Curso:_____________________________________ **Período:**_____________

Obs: Não apagar o desenvolvimento da questão, incluindo os cálculos efetuados.

Questão 1: A reta t é tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (-2,0).



a) Encontre a equação da reta t.

b) Informe qual o sinal de $f'(-2)$.

c) Encontre $\dfrac{df(-2)}{dx}$

d) Determine o valor da $tg\alpha$.

Questão 2: A função $f(x) = -x^2 + 4$ expressa a lei do movimento de um projétil P (f está representada graficamente na questão 1). Encontre:

a) $f'(-2)$

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$

c) $\dfrac{df(a)}{dx}$, sendo a= -2

d) Qual a velocidade do projétil P no ponto (-2, 0)?

Questão 3: Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento tem sua massa, medida em gramas, dada pela seguinte função:

$M(t) = \dfrac{t^2}{2} + 4t + 28$ para $0 \le t \le 60$ t representa o número de dias.

a) Qual a razão média de aumento da massa da ave, para $0 \le t \le 60$?

b) Qual a variação da massa desta ave após 50 dias?

c) Qual a variação da massa desta ave em $t = 50$ dias?

d) Qual o valor de $\lim_{t \to 50} \dfrac{M(50+t) - M(50)}{t}$

e) Calcule $\left.\dfrac{dM}{dt}\right|_{t=50}$

4.2.1. ANÁLISE *A PRIORI* DAS QUESTÕES

Apesar de constar no cabeçalho do teste a identificação da universidade, da turma e dos sujeitos pesquisados, estes mesmos foram avisados de que os testes anexados na dissertação não seriam identificados.

Na 1ª questão, fornecemos como registro de partida o registro figural gráfico, para que o aluno pudesse mobilizar seus conhecimentos sobre a noção de derivada utilizando a interpretação geométrica desta noção. Nossa intenção com esta questão é que o aluno demonstre seu conhecimento com relação ao coeficiente angular da reta t , inclinação da reta tangente à curva da função f . Para garantir que o aluno não deixasse de fazer o *item a* por não se lembrar da equação geral da reta, antes de começar a aplicação do teste colocamos no quadro:

Equação geral da reta: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

Para resolver a questão o aluno deverá encontrar a tangente do ângulo α utilizando-se da relação métrica do triângulo retângulo:

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

É possível que ele, ao determinar a tangente trigonométrica, a partir do gráfico encontre: $tg\alpha = \frac{8}{-2} = -4$ e não leve em conta a contradição entre o sinal negativo e o fato de a função ser crescente num intervalo que contém o ponto -2.

Outra forma de o aluno encontrar o coeficiente angular seria aplicar a equação geral da reta que passa pelos dois pontos (-2, 0) e (0, 8), os quais interceptam, respectivamente, os eixos x e y. Acreditamos que esta solução seja a mais utilizada pelos alunos, uma vez que escreveremos na lousa a equação geral da reta.

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ substituindo os dois pontos da reta t, temos: $8 - 0 = m \cdot [0 - (-2)] \;\therefore\; 8 = 2m \;\therefore\; m = 4$

Ou ainda, determinar a equação da reta utilizando o processo de cálculo de determinante. Achamos que esta é uma possibilidade remota, por não termos encontrado este procedimento na maioria dos livros.

Nossa expectativa é que, tendo identificado o coeficiente angular da reta t no item a, o aluno que identifique esse coeficiente como um significado da derivada resolva os itens seguintes.

No *item b*, estamos partindo do registro simbólico de derivada da função f no ponto de abscissa $x = -2$, esperando que seja identificado o valor da derivada neste ponto, como sendo o coeficiente angular da reta t. Considerando que o ângulo formado entre a reta t e o eixo x, no sentido anti-horário, está compreendido no intervalo $0 < \alpha < 90^{o}$, no ponto (-2, 0) é *positiva*. Porém, da mesma forma como já consideramos no *item a*, o aluno poderá determinar, erroneamente, a tangente trigonométrica do ângulo α como sendo, $tg\alpha = -4$. O nosso interesse é verificar se o aluno identifica o coeficiente angular como a derivada da função naquele ponto de tangência. No item c, apenas mudamos o tipo de representação de partida, mas continuamos no registro simbólico; esperamos que o aluno reconheça também esta representação como o coeficiente angular da reta no ponto dado. Acrescentamos o *item d* nesta questão, a fim de verificar se o significado de coeficiente angular (inclinação da reta t) foi realmente associado à tangente trigonométrica do ângulo α, pois, como vimos no *item a*, o aluno pode determinar o coeficiente angular, *m*, sem mobilizar o significado de tangente como inclinação da reta t.

Na 2ª Questão, partimos do registro simbólico algébrico, fornecendo a função $f(x) = -x^2 + 4$. Colocamos no enunciado desta questão a afirmação: *“f está representada graficamente na questão 1”*, com a intenção de possibilitar ao sujeito da pesquisa, que tenha feito a 1ª questão, aproveitar suas respostas. Os *itens a, b* e *c* são apresentados em diferentes formas do registro simbólico Temos a expectativa de que o *item a* seja, de todo o teste, o item com maior índice de acerto por ser a representação simbólica de derivada mais utilizada nos exemplos e exercícios propostos dos livros analisados. Queremos verificar se o significado do conceito de derivada como taxa de variação (embora não apareça na questão a palavra taxa) é associado às diferentes representações destes itens. Não é nossa intenção que o aluno calcule o limite do item b, mas que associe este registro de representação como sendo outra representação da derivada de f no ponto x= -2, encontrado no *item a* ou na *questão 1*, mas é possível que seja efetuado esse cálculo como resolução de alguns alunos. No *item d*, a idéia de taxa de variação pode estar mais clara ao aluno, por se tratar de velocidade, ou então ele pode simplesmente ter decorado que velocidade é o valor da derivada da função num ponto. Por este motivo, estaremos considerando, na próxima questão, uma situação que envolva mais explicitamente o significado de taxa de variação.

Na questão 3, estamos explorando o significado de derivada de uma função num ponto como taxa de variação instantânea desta função neste ponto. A função é definida no registro simbólico e relaciona a massa de uma ave com o passar do tempo em dias. No *item a* pretendemos investigar se o aluno, sujeito desta pesquisa, reconhece a idéia de taxa de variação média, conhecimento que julgamos necessário para a compreensão do significado de taxa de variação instantânea. Utilizamos aí o registro na língua natural *“Qual a razão média (...)”*. A solução esperada é a seguinte: $\frac{\Delta M}{\Delta t}=\frac{M(60)-M(0)}{60-0}$. Calculando o valor de $M(60)=2068$ e $M(0)=28$, teremos $\frac{\Delta M}{\Delta t}=\frac{2068-28}{60-0}=34$ g/dia

Para o *item b*, a expectativa é que o aluno obtenha a variação da massa após 50 dias e o confronte com o resultado que fornece a taxa de variação da massa para t = 50, assim como está sendo pedido no *item c.* O objetivo é fazer o aluno perceber a distinção entre variação da massa e taxa de variação instantânea. A escolha do mesmo ponto t = 50 é intencional e cumpre essa função. Assim, a solução do *item b* é M (50) – M(0) = 1478 –28 = 1450. Os alunos podem apresentar dificuldade em resolver o *item b* confundindo após 50 dias com o 50º dia. Os *itens c, d* e *e* representam a mesma questão em registros diferentes (c língua natural; *d* e e tipos diferentes de registros simbólicos). Nossa intenção é verificar se o aluno, sujeito desta pesquisa, identifica nas várias representações o significado de derivada como taxa de variação instantânea, a qual indicará de que maneira (ou de que forma) a massa desta ave estará variando quando o tempo for exatamente 50 dias. Para esses itens esperamos a seguinte solução:

A taxa de variação instantânea da massa da ave num tempo t é : $M'(t)=t+4$

Logo para t = 50 dias temos: $M'(50)=54 \quad g/dia$

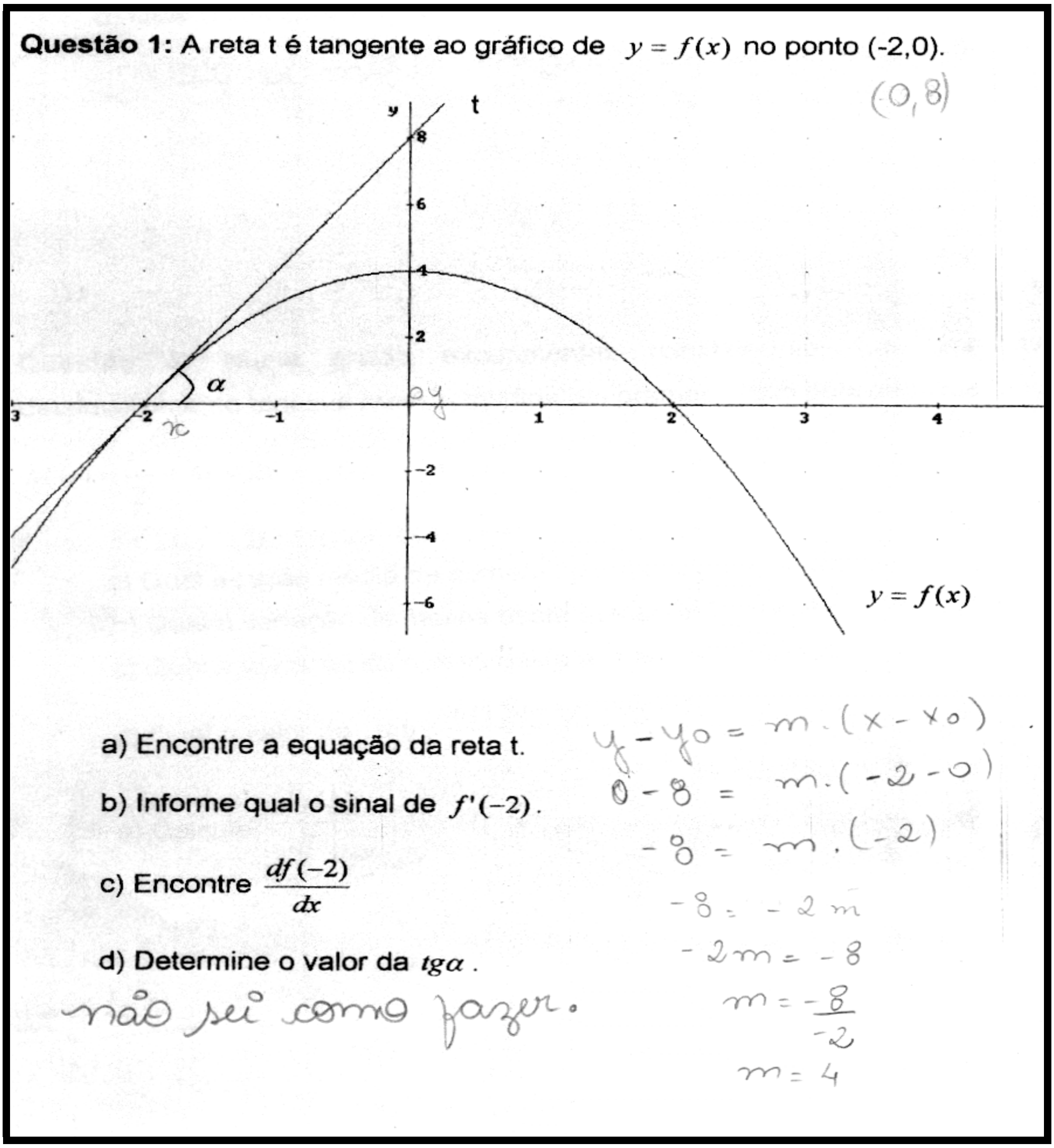
Nossa expectativa é que poucos alunos respondam corretamente o *item d*, pois nos livros pesquisados o significado de derivada como variação instantânea de uma função não é, em geral, apresentado em sua representação simbólica do limite. Para resolver a questão do *item d* não há necessidade de o aluno efetuar os cálculos do limite, basta que ele identifique o significado deste registro como o mesmo calculado nos *itens b* e *c.* Acreditamos, no entanto, que possa aparecer o cálculo do limite neste item como na questão 2 item b.

4.2.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS do 2º teste

<u>Questão 1</u>

Para o item a, houve 47% de acerto.

A maioria dos estudantes, dentre esses que determinaram corretamente a equação da reta t, fizeram-no encontrando, primeiramente, o coeficiente angular, pela equação geral da reta, considerando os dois pontos (-2, 0) e (0, 8). O exemplo a seguir ilustra esse tipo de procedimento:



Questão 1: A reta t é tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (-2,0).

a) Encontre a equação da reta t.

b) Informe qual o sinal de $f'(-2)$.

c) Encontre $\frac{df(-2)}{dx}$

d) Determine o valor da $tg\alpha$.

não sei como fazer.

$y - y_0 = m.(x - x_0)$

$0 - 8 = m.(-2 - 0)$

$-8 = m.(-2)$

$-8 = -2m$

$-2m = -8$

$m = \frac{-8}{-2}$

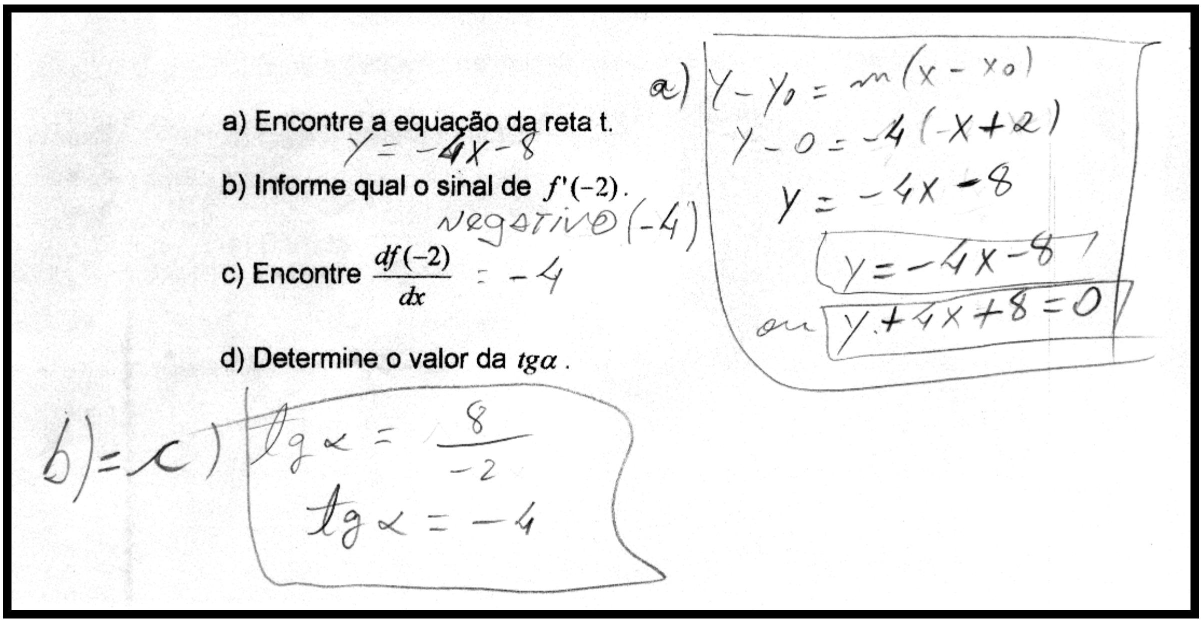
$m = 4$

O número de alunos que utilizaram o procedimento para o *item a*, como exemplificado acima, foi maior do que esperávamos; nossa expectativa era que houvesse um equilíbrio entre esse tipo de procedimento e o daquele em que utilizassem a tangente trigonométrica de α para determinação do coeficiente angular da reta t, isto porque ambos os procedimentos constam nos livros didáticos analisados.

12% dos estudantes determinaram o coeficiente angular (inclinação da reta t) pela tangente trigonométrica do ângulo α e apenas um aluno determinou a equação da reta t através do cálculo do determinante da matriz real formada pelos pontos pertencentes à reta t.

Os sujeitos que encontraram a equação da reta tangente por meio da fórmula dada na lousa não tiveram em geral sucesso na resposta aos *itens b* e *c da questão 1.* Esses itens eram relacionados ao valor da derivada de f em x = -2, isto é o coeficiente angular da reta t no ponto de abscissa x = -2. Isto nos permite inferir que o grupo de estudantes, sujeitos desta pesquisa, não demonstraram domínio sobre o significado geométrico da derivada (coeficiente angular da reta tangente).

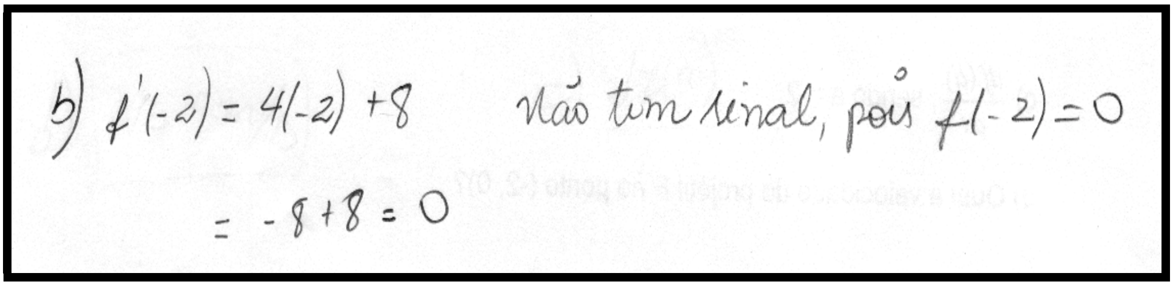
Os estudantes que determinaram o coeficiente angular da reta t a partir da tangente trigonométrica do ângulo α tiveram maior êxito nos itens seqüentes, relacionando o valor encontrado para o coeficiente angular com as representações simbólicas de derivada. Porém, como antecipado em nossa análise, boa parte desses alunos encontrou o valor negativo, $tg\alpha = -4$, considerando-o, nos *itens a, b* e *c,* sem observar o crescimento da função . Notamos, neste caso, que os estudantes associam significado de coeficiente angular de reta tangente com derivada, sem, no entanto, atribuir com plenitude a noção de inclinação para esse coeficiente. Exemplificamos a seguir:


a) Encontre a equação da reta t.
$Y = -4X - 8$
b) Informe qual o sinal de $f'(-2)$.
NEGATIVO (-4)
c) Encontre $\frac{df(-2)}{dx}$ $= -4$
d) Determine o valor da $tg\alpha$.

a) $Y - Y_0 = m(X - X_0)$
$Y - 0 = -4(-X + 2)$
$Y = -4X - 8$
$\boxed{Y = -4X - 8}$
ou $\boxed{Y + 4X + 8 = 0}$

b) = c) $tg\alpha = \frac{8}{-2}$
$tg\alpha = -4$

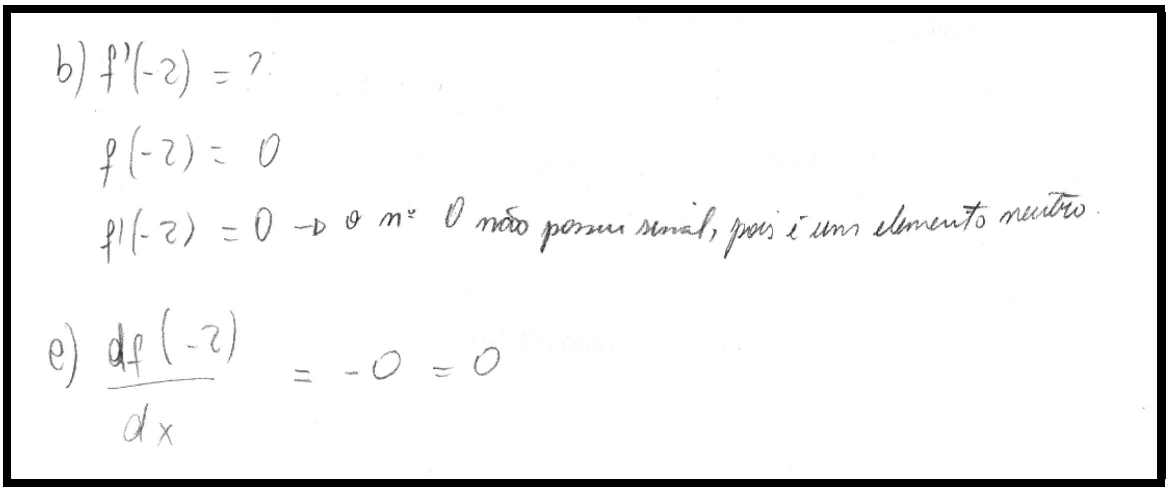
Quase a metade desses alunos, que determinaram corretamente a equação da reta t, determinaram o sinal de $f'(-2)$ substituindo $x = -2$ na própria equação da reta t, $y = 4x + 8$, encontrada no *item a*, apresentando a seguinte solução:


b) $f'(-2) = 4(-2) + 8$
$= -8 + 8 = 0$
Não tem sinal, pois $f(-2) = 0$

Nesses casos fica indicado que os estudantes não associam derivada nula com inclinação nula, já que o ponto (-2, 0) não é ponto extremo local da função.

Nesses casos, eles confundiram a equação da reta tangente com a função derivada, o que já foi relatado em outras pesquisas como a de Meyer (2003) e a de Cassol (1998). Esses alunos determinaram corretamente o valor da $tg\alpha$ (item d), ou seja, revelaram que não atribuem o significado de derivada como coeficiente angular (inclinação da reta tangente), visto que determinaram corretamente o coeficiente angular para determinar a equação da reta t (*item a*) e também o valor da $tg\alpha$ (*item d*), mas não acertaram os *itens c* e *d* , que propõem determinar o valor da derivada, isto é, eles demonstram não reconhecer as representações simbólicas dadas nesses itens como representações da derivada significando coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.

Nos *itens b* e *d*, houve 9% dos sujeitos pesquisados, que adotaram um procedimento de resolução não previsto por nós, tomaram a ordenada $y=0$ do ponto de tangência como a derivada da função *f* em $x=-2$. Esse procedimento está aqui ressaltado, mesmo sendo realizado por um número não significativo de sujeitos, pois atribuir à ordenada do ponto de tangência o valor da derivada é categorizado em pesquisas como uma concepção errônea. Meyer (2003, pg. 33)


b) $f'(-2) = ?$

$f(-2) = 0$

$f'(-2) = 0 \rightarrow$ o nº 0 não possui sinal, pois é um elemento neutro.

e) $\dfrac{df(-2)}{dx} = -0 = 0$

Dos alunos que não acertaram o item a, 15% responderam que, apesar de a equação da reta ter sido colocada na lousa, não sabiam determinar a equação da reta e, por isso, não tinham como achar a derivada no *item b* e *c*, isto nos leva pensar novamente na confusão já mencionada, isto é, a de considerar a equação da reta tangente t, como a função derivada de f.

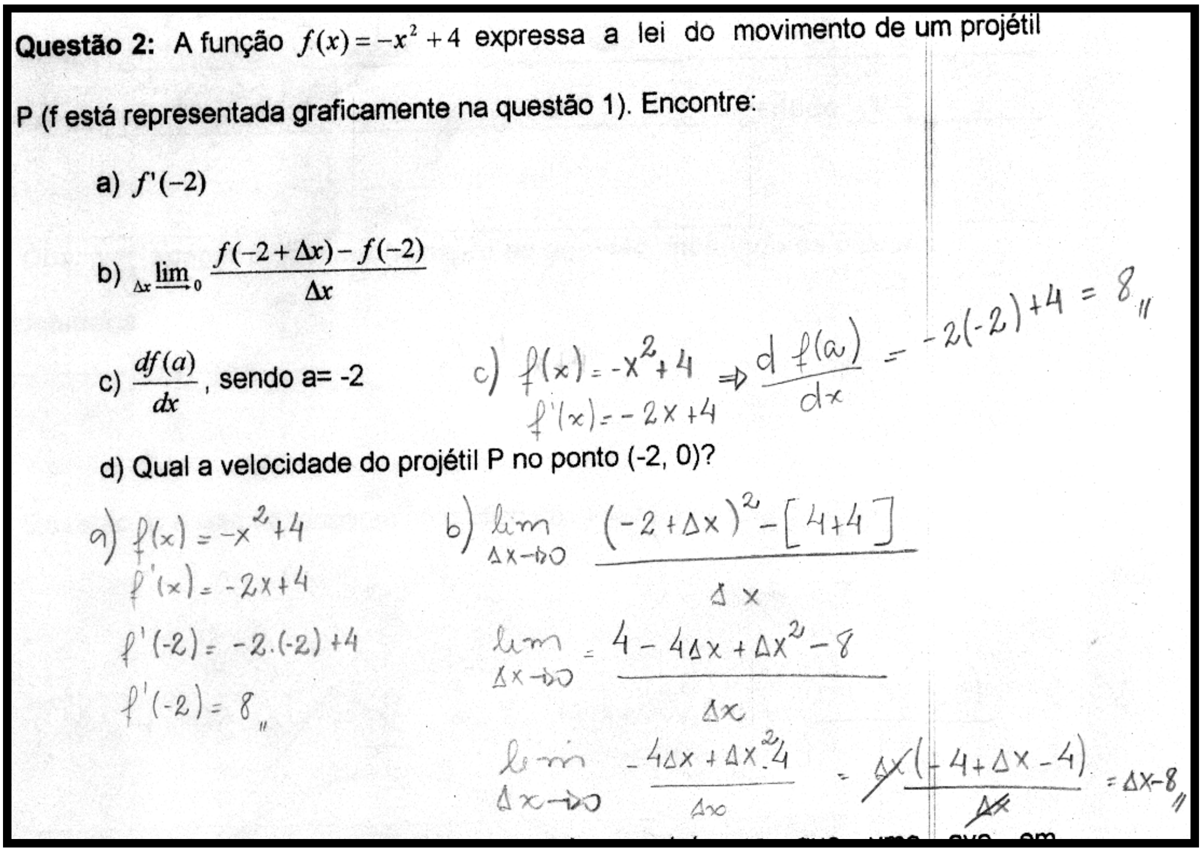
Dos 15 alunos (47%) que acertaram o item a, 6 (40%) deles responderam corretamente aos itens *b* e *d*, porém não responderam corretamente ao item c (ou não responderam); isto nos indica que estes alunos não atribuem ao registro simbólico $\frac{df(-2)}{dx}$ uma representação semiótica da derivada da função f no ponto $x=-2$.

Questão 2

Verificamos que apenas 3 (9%) dos estudantes utilizaram-se das respostas da questão 1, para responder aos itens desta questão.

Constatamos que o *item a* foi aquele com maior porcentual de acertos (60%), o que já era previsto na análise *a priori*. Este porcentual só não foi maior porque alguns alunos erraram a aplicação da regra de derivação como mostra o caso abaixo.

16% (5) dos alunos apresentaram resposta correta para o *item b.* Apenas 3 (9%) identificaram os dois registros simbólicos dados nos itens a e b, apresentando como resposta para o item b a mesma encontrada no *item a.*7% (2) resolveram corretamente o limite dado, porém por técnica operatória, podendo essa resposta ser interpretada como não identificação dos registros. O mesmo pode ser dito para 81% dos alunos, que tentaram resolver o limite e se perderam nos cálculos (como mostra o caso abaixo), e para 3% que deixaram este item em branco.


Questão 2: A função $f(x) = -x^2 + 4$ expressa a lei do movimento de um projétil P (f está representada graficamente na questão 1). Encontre:

a) $f'(-2)$

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$

c) $\frac{df(a)}{dx}$, sendo a= -2

d) Qual a velocidade do projétil P no ponto (-2, 0)?

c) $f(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow \frac{d\,f(a)}{dx} = -2(-2)+4 = 8$

$f'(x) = -2x+4$

a) $f(x) = -x^2+4$

$f'(x) = -2x+4$

$f'(-2) = -2.(-2)+4$

$f'(-2) = 8$

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - [4+4]}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 - 8}{\Delta x}$

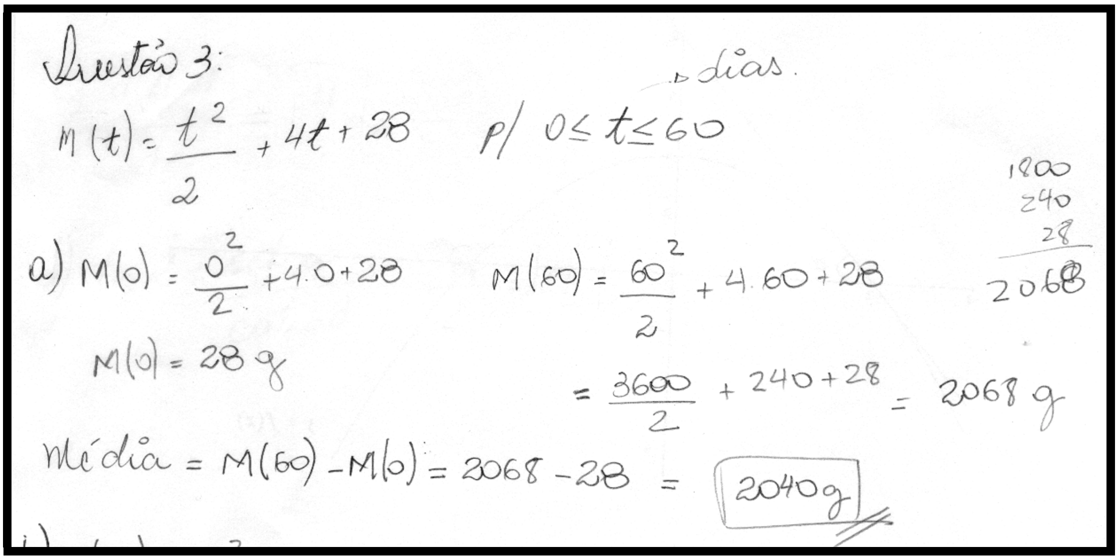
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4\Delta x + \Delta x^2 \cdot 4}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(-4+\Delta x-4)}{\cancel{\Delta x}} = \Delta x - 8$

Para o item c tivemos 38% de respostas corretas. No qual 13% escreveram: $\frac{df(-2)}{dx} = f'(-2) = 4$ e 25% dos alunos não aproveitaram os cálculos realizados para o item a e calcularam novamente a derivada da função f . Substituíram *x* por *a* e em seguida atribuíram ao *a* o valor *-2.*

No *item d* foram 50% de acertos, dos quais 41% calcularam novamente a derivada da função f e determinaram o seu valor para $x = -2$; os outros 9% apenas colocaram $v(-2) = f'(-2) = 4$. Esta questão teve o propósito de verificar o significado de derivada como taxa de variação; assim, observando o porcentual de respostas obtidas, principalmente no *item d*, podemos considerar que os alunos estão mobilizando este conhecimento. Um bom índice de acerto era esperado, pois a velocidade é explorada nos livros como taxa de variação.

<u>Questão 3</u>

Nesta questão, 91% dos alunos tentaram resolver algum dos 5 itens. 9% acertaram o item a. Neste item, outros 9% confundiram razão média de variação da massa (taxa de variação média) com a variação da massa no mesmo intervalo, como é mostrado abaixo.


Questão 3:

dias.

$M(t) = \frac{t^2}{2} + 4t + 28$ p/ $0 \leq t \leq 60$

1800
240
28
2068

a) $M(0) = \frac{0^2}{2} + 4.0 + 28$ $M(60) = \frac{60^2}{2} + 4.60 + 28$

$M(0) = 28$ g

$= \frac{3600}{2} + 240 + 28 = 2068$ g

Média $= M(60) - M(0) = 2068 - 28 = \boxed{2040g}$

Após a finalização da aplicação do teste, 4 alunos alegaram não ter compreendido o *item a* pois o intervalo não estava devidamente especificado, e ainda, que o intervalo deveria ser dado, por exemplo na forma [10, 50], o problema aqui está na compreensão das representações de intervalo.

No *item b,* tivemos apenas 12% de respostas corretas. Este índice de acerto foi bem aquém do esperado, mesmo prevendo que os alunos teriam neste item maior dificuldade de compreensão, confundindo a massa após terem passados 50 dias, com a taxa de variação no 50º dia.

47% dos alunos não responderam corretamente ao *item c.* 19% determinaram o valor da massa da ave no qüinquagésimo dia, isto é, substituíram t=50 na função *M,* os outros 28% se perderam na aplicação das regras para a obtenção da função derivada.

Apesar dos erros de cálculo, o porcentual de respostas corretas obtido, isto é, 53%, para o item c, nos sugere que o significado de derivada como taxa de variação instantânea foi bem mobilizado pelos sujeitos desta pesquisa, com relação à situação apresentada, isto é, na representação da língua natural.

Como já era esperado na análise *a priori* desta questão, apenas 13% dos alunos acertaram o *item d*, 9%, apenas, atribuíram ao limite dado o significado de variação instantânea, ou seja, relacionaram os *itens c* e d escrevendo: $\lim_{t \to 50} \frac{M(50+t) - M(50)}{t} = M'(50) = 54$ g / dia, 4% efetuaram o limite por meio de cálculo de modo correto e 44% desenvolveram erroneamente o cálculo do limite e encontraram respostas distintas. E os demais não resolveram.

Com relação ao *item e*, 41% dos alunos responderam corretamente e apresentaram a resposta da seguinte forma: $\left.\frac{dM}{dt}\right|_{t=50} = M'(t) = 54$ g / dia.

CAPÍTULO 5

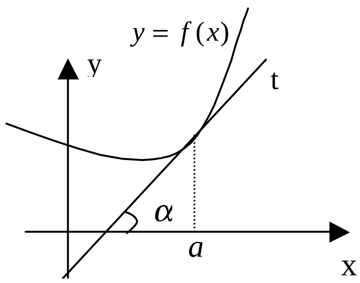
CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando os sujeitos que responderam, tanto ao 1º quanto ao 2º teste, fizemos um cruzamento das respostas obtidas e pudemos observar alguns elementos que corroboram com a identificação da origem das dificuldades surgidas no processo do ensino-aprendizagem do conceito de derivada. As dificuldades estão relacionadas às articulações entre os registros de representação e aos significados do conceito de derivada em diferentes situações.

Observamos que os sujeitos que não responderam (ou responderam erroneamente) à *questão 1- item c - 1º teste:* "Qual o significado do símbolo $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ " tentaram resolver por meio de cálculo o limite da *questão 2 - item b - 2º teste: " Dada função $f(x) = -x^2 + 4$ encontre $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$*, o que reforça o fato de que estes alunos não reconhecem o registro simbólico do limite da razão incremental como representação semiótica do conceito de derivada. Destacamos que eles haviam determinado o valor $f'(-2)$ para o item a- questão 2, *2º teste.*

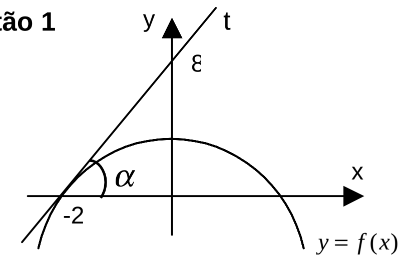
Verificamos também que alunos que acertaram a questão 2 do 1º teste,

1º TESTE - Questão 2: Dado o gráfico da função f e sabendo-se que t é uma reta tangente no ponto de abscissa a. Qual o significado da tangente do ângulo α?



apresentando a seguinte resposta: "A tangente do ângulo α é a derivada da função f em um ponto dado", não tiveram o mesmo sucesso nos diversos itens da questão 1 do 2º teste, na qual também é apresentado o registro figural (gráfico), e são feitas as seguintes indagações:

2º TESTE - Questão 1



a) Encontre a equação da reta t.

b) Informe qual o sinal de $f'(-2)$.

c) Encontre $\dfrac{df(-2)}{dx}$

d) Determine o valor da $tg\alpha$.

É possível que estes alunos tenham apenas memorizado: "a tangente de α é a derivada da função em um ponto dado", sem, no entanto, reconhecer o significado de derivada como coeficiente angular. Provavelmente estes estudantes também não reconheceram os registros simbólicos dos itens b e c como registros de representação do valor da derivada no ponto x = -2.

Notamos na questão 1 - itens *a* e *b* do 1º teste, no qual a derivada é apresentada no registro simbólico, que o maior porcentual dos alunos fez a

1º TESTE - 1ª Questão: Qual o significado dos seguintes símbolos? Responda por uma frase ou graficamente.

a) $\dfrac{dy}{dx}(a)$ b) $y'(a)$ c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

conversão para o registro de língua natural conseguindo um bom desempenho e um alto índice de acertos (anexo-I); contudo, no 2º teste, questão 1- itens *b* e *c* *(mostrada acima)* e na questão 2 - item *c*: *“Dada função* $f(x) = -x^2 + 4$, *encontre* $\frac{df(a)}{dx}$, *sendo a= -2”,* que também apresentam a derivada no registro simbólico, obtivemos baixo índice de acerto. Estes dados nos permitem inferir que, quando a questão é de conversão de registros do simbólico para o da língual natural, os sujeitos conseguem, com sucesso, articular os dois registros, não ocorrendo o mesmo quando se trata de atribuir significados aos mesmos, ou seja, ter habilidade para efetivar conversão entre dois dos registros de um conceito não é suficiente para garantir a mobilização dos seus significados.

Comparando os índices de acerto entre questões similares dos dois testes, especificamente a *questão 4- item b do 1º teste*: *“O que é taxa de variação instantânea de uma função num ponto a?” (anexo-I)* com a *questão 3 - item c - 2º teste*: *“Qual a variação da massa desta ave em* $t = 50$ *dias?”* podemos concluir que o contexto da *questão 3 - item c - 2º teste* favoreceu o bom índice de respostas corretas. Os alunos puderam, mais facilmente, interpretar o significado do conceito de derivada como taxa de variação instantânea, enquanto que no 1º teste, no qual não é apresentado o conceito numa situação, o aluno encontrou dificuldade para atribuir significado ao conceito apresentado no registro da língua natural e representá-lo no registro simbólico. Esta dificuldade em explicitar o significado de taxa de variação instantânea e apresentá-la usando qualquer tipo de registro de representação, apesar da mobilização deste significado nas resoluções de problemas, foi relatado em Cassol (1998).

A utilização do registro figural (gráfico) como representação da noção de derivada foi aquela na qual os sujeitos desta pesquisa tiveram maior dificuldade em mobilizar seus conhecimentos a respeito desta noção, tanto apresentando-o como registro de partida, propondo a análise do gráfico, como no registro de chegada; neste caso, tínhamos a expectativa de que o aluno fizesse a conversão do registro simbólico e/ou de língua natural para o gráfico (Anexo-I).

O registro de língua natural foi o mais utilizado pelos alunos pesquisados, seja no caso em que a questão proposta tem como registro de partida o registro figural, o registro simbólico ou mesmo o registro de língua natural (Anexo-I).

Nossa pesquisa indica que as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem do conceito de derivada podem estar relacionadas ao fato de no ensino privilegiarem-se alguns registros de representação na introdução da noção deste conceito e em problemas e exercícios.

Vale ressaltar que, no processo de ensino, a prática da sala de aula vem carregada da experiência do professor e cabe a este explorar os significados e a diversidade de registros de representação do conceito estudado.

> *"Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato"*
>
> *(Duval, 1999)*

Em concordância com o sustentado por Duval, pensamos que a articulação dos registros constitui uma condição de acesso à compreensão de um conceito matemático e, apoiado em nossos diagnósticos (anexo-I), indicamos como um próximo passo para novas pesquisas a busca de abordagens de ensino que favoreçam a aprendizagem do conceito de derivada, com a proposta de otimizar a articulação entre os registros de representação desse conceito nas diferentes situações que envolvem seus significados.

BIBLIOGRAFIA

AMIT, M.; VINNER, S. *Some Misconceptions in Calculus-Anecdotes or the Tip of Iceberg?. In: PROCEEDINGS FOURTEENTH PME CONFERENCE*. 14, v.1. 1990 México. p. 3 –10

ARBOGAST L. F. A. http://members.aol.com/jeff570/calculus.html

BROUSSEAU, G. *Fondements et méthodes de la didactique dês mathématiques*, vol 7, nº 2, pp. 33-115. Grenoble, 1986.

CASSOL, A. *Produção de significados para a derivada: taxa de variação*. Dissertação de mestrado. Rio Claro: UNESP, 1997.

DAMM, R. F. *Registros de Representação – Educação Matemática – EDUC.* Editora da PUC-SP. pp.135-153 São Paulo, 1999

DUVAL, R. *Registros de Representação e Educação Matemática.* Curso na PUC-SP. São Paulo, 1999

DUVAL, R. *Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage in Actes* de la 46 ème Rencontre Internationale de la CIEAEM, (1996), tome 1, 3-15 (Ed. Antibi), Université Paul Sabatier, Toulouse.

DUVAL, R. *Registres de representation sémiotique et fonctionnements cognitif de la pensée. Annales de didactique et Sciences Cognitives,* vol. 5. IREM-ULP, Strasbourg, 1993, pp. 37-65.

FIGUEIRA, R. P. *Um ensino individualizado sobre a derivada de funções algébricas*. Dissertação de Mestrado. FE-UFF, NITERÓI, Brasil (1972)

FUSCO, C. A. S.; ALMOULOUD S. A. *Um estudo da transposição didática da derivada.* Anais IV Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo, 1996

CAJORI, F. http://www.apm.pt/nucleos/coimbra/bimat/bimat7/bimat72.htm

GIRALDO, V. e CARVALHO, L.M. *Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada*. UERJ. Rio de Janeiro

HILBERT, J.; LEFEVRE, P. *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.) Conceptual and Procedural Knowledge: The Case for Mathematics*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1-27

KENDAL, M. *Teaching and Learning Introductory Differential Calculus with a Computer Algebra System.* Tese (Doutorado de Filosofia). Universidade de Melbourne. Melbourne, 2001

KOGA, M. T*. Uma análise no discurso de alguns professores de Cálculo Diferencial e Integral do Curso de Licenciatura em Matemática*. Dissertação Mestrado. UNESP. Rio Claro, 1998.

PACHECO, E. R. *Um estudo de Atitudes em Relação ao Cálculo Diferencial e Integral, em Estudantes Universitários.* Dissertação de mestrado. Unicentro/FE-UNICAMP, 2000

PRASLON, F. *Continuites et ruptures dans la transition terminale S/ DEUG Sciences em analyse. Le cas de la notion de deriveée et son environnement.* These de Doctorat. Editeur: IREM. Université de Paris 7. 2000

REIS, F. S. *A Tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos.* Tese de doutorado FE-UNICAMP, Campinas, 2001

SILVA, B. A.; IGLIORI, S. B. C. *Um estudo exploratório sobre o conceito de derivada.* Anais IV Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo. 1996

SILVA, N. M. A. *O Cálculo Diferencial e Integral no Curso de Ciências da Computação: necessidade ou contingência.* Dissertação de mestrado. FURB Blumenau, 1998.

ANEXO - I

TABELAS – DADOS QUANTITATIVOS DO 1º TESTE

A organização dos dados deu-se de modo diferente da apresentada na pesquisa feita por Praslon (2000), na qual são referidos os tipos de registros de representação de Derivada, utilizados nos livros didáticos do ensino secundário francês, sem especificação dos registros. Procuramos, nesta pesquisa, apresentar as especificações em cada tipo de registro, na língua natural, simbólico e figural. Para a apresentação dos dados colhidos na pesquisa foi usada uma tabela estatística de Distribuição de Freqüência, na qual ficou especificada por **i a classe da distribuição.** Foram utilizados os seguintes símbolos para cada classe: nas questões 1 e 4, que são subdivididas em itens a, b e c, teremos a letra correspondente ao item, e o número que a acompanha, correspondente à classe. (ex: $i = A1$: item *a* da 1ª classe; $i = B3$: item *b da* 3ª classe). Nas questões 2 e 3 serão utilizados apenas os números correspondentes às classes.

f_i indica a freqüência simples. Corresponde ao número de vezes com que a resposta se repetiu igualmente.

f_{ri} indica a freqüência simples relativa. Corresponde ao porcentual de cada classe comparativo ao total de respostas por item.

$\sum f_i$ **indica a somatória da freqüência para o item analisado.**

Tabela 1

1ª Questão			
I	**Respostas dos alunos para o item a**	**f_i**	**f_{ri}**
A1	Derivada de y em relação à x	51	51%
A2	Derivada primeira de "*a*"	13	13%
A3	Derivada de y em relação à derivada de x	9	9%
A4	Derivada de y em relação à x no ponto "*a*"	7	7%
A5	Derivada primeira de y	6	6%
A6	Função derivada	6	6%
A7	Derivada de uma função	6	6%
A8	Taxa de variação de y em relação à x no ponto "*a*"	2	2%
		$\sum f_i = 100$	
I	**Respostas dos alunos para o item b**	**f_i**	**f_{ri}**
B1	Derivada da função y em relação à x	19	34,5%
B2	Derivada primeira de "*a*"	10	18,2%
B3	Função derivada	7	12,7%
B4	Derivada da função y no ponto "*a*"	10	18,2%
B5	Derivada de y	4	7,3%
B6	Derivada 1ª de y	2	3,6%
B7	$y'(a) = \frac{dy}{dx}(a)$	3	5,5%
		$\sum f_i = 55$	
I	**Respostas dos alunos para o item c**	**f_i**	**f_{ri}**
C1	Limite da função para x tendendo a "*a*"	26	63%
C2	Derivada da função num determinado ponto	4	9,7%
C3	Inclinação da reta tangente à curva no ponto "*a*"	4	9,7%
C4	É o limite da função f(x) menos f(a) com x tendendo a "*a*"	4	9,7%
C5	É a derivada pela definição	3	7,3%
		$\sum f_i = 41$	

Teste Diagnóstico

Observa-se, nessa questão, que as respostas aos itens *a, b* e *c* foram, quase que em sua totalidade, apresentadas no registro da lingual natural. Verificam-se, através dessa tabela, as diversas tentativas de se responder ao que se pede no enunciado, mesmo não tendo a certeza da resposta. Isso é notado pelas várias expressões distintas utilizadas para responder a um mesmo item; todas, porém, no mesmo registro.

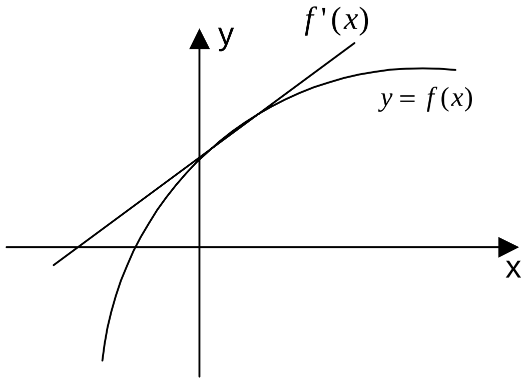
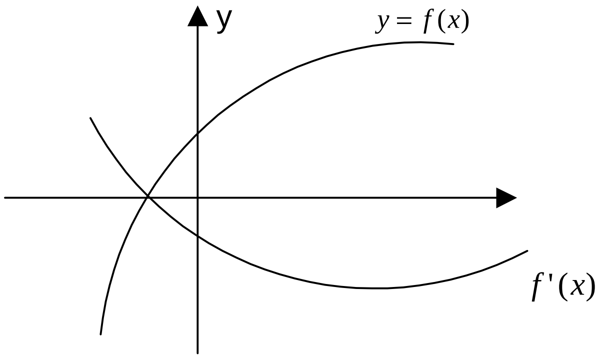
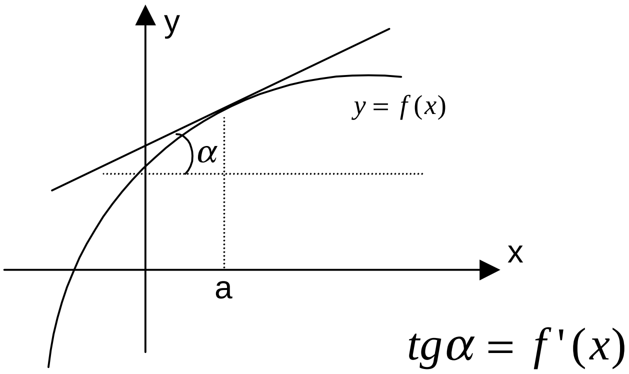
Tabela 2

2ª Questão			
I	**Respostas dos alunos**	**f_i**	**f_{ri}**
1	Coeficiente angular da reta t	16	19,5%
2	É a inclinação da reta tangente à curva no ponto *a*	15	18,3%
3	É a derivada da função no ponto *a*	13	15,9%
4	É o coeficiente angular da função $f'(x)$	9	11,0%
5	É a derivada da função $f(x)$	9	11,0%
6	Taxa de variação da função	2	2,4%
7	A reta t é a derivada da função f no ponto "*a*"	1	1,2%
8	A tangente de α é igual à derivada de f(x)	2	2,4%
9	$tg\alpha = \frac{dy}{dx}$	10	12,2%
10	$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	4	4,9,%
11	$\frac{d}{dx}[f(x)] = tg\alpha$	1	1,2%
		$\sum f_i = 82$	

Teste Diagnóstico

Na tabela que representa as respostas dadas pelos alunos, referentes à 2ª questão, percebe-se a ocorrência do registro de língua natural e a do registro simbólico. Houve, então, nesse caso, a conversão do registro figural (gráfico) para o registro de língua natural num total de 81,7% , e, para o registro simbólico, num total de 18,3%. Esses valores estão distribuídos pelos diversos tipos de representações dentro dos respectivos registros.

Tabela 3

3ª Questão			
I	Respostas dos alunos	f_i	f_{ri}
1		29	61,7%
2		9	19,1%
3		9	19,1%
		$\sum f_i = 47$	

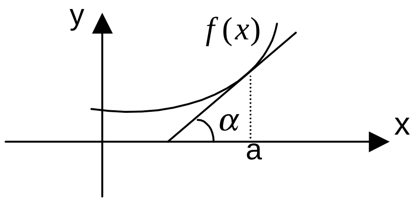
Teste Diagnóstico

Nessa questão, o registro de partida era o figural (gráfico). Pedia-se para representar no gráfico dado $f'(x)$. Como o registro de chegada é também do tipo figural (gráfico), os alunos não tinham escolha. Nessa questão tivemos o menor número de respostas, e ainda, o porcentual de respostas corretas (19,1%) pode ser uma indicação da dificuldade encontrada pelos estudantes na apreensão do conceito matemático de Derivada, considerando o registro de representação figural.

Tabela 4

4ª Questão			
i	**Respostas dos alunos para o item a**	**f_i**	**f_{ri}**
A1	É a inclinação da reta tangente à curva no ponto "*a*"	16	35,6%
A2	É o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto "*a*"	8	17,8%
A3	É a taxa de variação da função no ponto "*a*"	7	15,6%
A4	É a equação da reta tangente	4	8,9%
A5	É uma reta tangente à função f o ponto "*a*"	1	2,2%
A6	A derivada é o ponto por onde passa a reta tangente	1	2,2%
A7	$f'(a)$	5	11,1%
A8	$\frac{df(a)}{dx}$	2	4,4%
A9	$\frac{dy}{dx}(a)$	1	2,2%
		$\sum f_i = 45$	
I	**Respostas dos alunos para o item b**	**f_i**	**f_{ri}**
B1	É a derivada da função no ponto *a*	10	50%
B2	É a função derivada	1	5%
B3	É o limite de uma função f(x) quando $\Delta x \to 0$	3	15%
B4	É a variação que a função sofre num instante	1	5%
B5	$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	3	15%
B6	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$	1	5%
B7	$\frac{dy}{dx}(a)$	1	5%
		$\sum f_i = 20$	

Teste Diagnóstico

I	Respostas dos alunos para o item c	f_i	f_{ri}
C1	É a derivada da função f no ponto de abscissa *a*	22	50%
C2	A inclinação da reta tangente num ponto	5	11,4%
C3	É o ângulo formado pela reta tangente e a abscissa do plano cartesiano	4	9%
C4	É a tangente do ângulo formado pela reta tg à curva com a abscissa no ponto *a*	3	6,8%
C5	É o coeficiente angular	3	6,8%
C6	 $tg\alpha$	5	11,4%
C7	$\frac{df(a)}{dx}$	1	2,3%
C8	$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	1	2,3%
		$\sum f_i = 44$	

Teste Diagnóstico

As tabelas referentes à 4ª questão mostram como as representações na forma de língua natural e simbólica são utilizadas preferencialmente à representação gráfica, e, também, como o porcentual de respostas na língua natural é superior no registro simbólico.

ANEXO - II

1. **Tempo de Magistério:** 12 anos
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   Stewart, Leithold e o Swokowisky
   Critério(s) para escolha do(s) livro(s):
   Conteúdo + exercícios

2. **Titulação:** Doutor
   Tempo de Magistério: 18 anos
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   STEWART E/OU Guidorizzi, H.
   critério(s) para escolha do(s) livro(s): não sobrecarrega o conceito de derivada com o de limites, mas dá uma visão mais dinâmica e geométrica. Dá mais exemplos de aplicação.

3. **Titulação:**Mestre
   Tempo de Magistério:18 anos
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   Guidorizzi, H.

   Critério(s) para escolha do(s) livro(s):
   Foi o livro escolhido para ser adotado na Instituição. Não acho que é um bom livro. Na realidade, gosto do livro do Jaime Carvalho e Silva - Análise Matemática Aplicada. Utilizo muitas de suas idéias em sala. Não adoto fielmente o Guidorizzi. Acho um livro excessivamente preocupado com as técnicas e procedimentos e excessivamente tradicional. Prefiro partir de problemas para chegar a conceitos. O Guidorizzi costuma dar exercícios que serão utilizados em futuros conceitos, como forma de já preparar o aluno para tal. Não gosto disso. O aluno nem sabe o que significa, nem sabe o que está fazendo. O Al Shenk é melhor nas aplicações, mas às

vezes não é muito profundo. O Ávila é um pouco incompleto. O Leithold e o Sokowisky têm exercícios demais e também são tradicionais.

4. **Titulação:** Doutor (PhD, Univ. California, Berkeley, 1772)
   Tempo de Magistério: 30 anos
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   G. Avila, Cálculo Vol. I
   J. Stewart, Cálculo Vol.I
   Leithold

5. **Titulação:** Mestre
   Tempo de Magistério:14 anos
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   não adotamos livro texto no curso de cálculo diferencial e integral por não encontrarmos nenhum que nos satisfaça plenamente, principalmente em limites e continuidade. Atualmente indicamos para os alunos os seguintes abaixo porque estão disponíveis na nossa biblioteca:
   Flemming, Diva, Cálculo A
   Hoffman, Laurence, Cálculo um curso moderno e suas aplicações, livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
   Munem, Cálculo, Vol. 1
   Recomendamos também os livros abaixo, que não disponibilizamos em nossa
   biblioteca Anton, Howard, Cálculo um novo horizonte, vol.1, Ed. Bookman
   Hughes-Hallet, Deborah, e outros, Cálculo e Aplicações, Tradução Elza F. Gomide, Editora Edgard Blucher Ltda.
   Critério(s) para escolha do(s) livro(s):
   Apresentação do conteúdo de forma compatível com o nosso trabalho
   Aplicações interessantes nas diversas áreas
   Linguagem acessível para os alunos.
   Número suficiente de exemplares disponíveis na nossa biblioteca

6. **Titulação:** Mestre em Matemática
   Tempo de Magistério: 22 anos
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   Leithold, Simons, Geraldo Ávila, Paulo Boulos, Serg Lang, Munem Folis, Flemming, Diva, Cálculo A

7. **Tempo de Magistério:** 4 anos (ensino básico) + 2 anos (ensino superior)
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   Cálculo, Hoffman. Flemming, Diva, Cálculo A
   Critério(s) para escolha do(s) livro(s):
   Presença de relações entre cálculo e outras áreas do conhecimento
   Ênfase na resolução de problemas
   Ênfase no conhecimento intuitivo.

8. **Tempo de Magistério:** 1 ano e meio
   Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:
   Guidorizzi ; Flemming, Diva, Cálculo A, B
   Critério(s) para escolha do(s) livro(s):
   A exatidão das definições dos conceitos usados. É feita uma separação clara entre a idéia intuitiva e a definição usada, o que muitas vezes não ocorre em livros de cálculo 1;
   O conteúdo - o livro é bastante completo;
   Também foi muito importante na escolha o fato de ser um livro com o qual uma pessoa com formação matemática se sente bem, e também o fato de haver feito o meu curso de cálculo com este livro - de modo que conheço bem suas vantagens e defeitos. Já ministrei o curso com outro livro, mas achei complicado "consertar" as falhas do livro ao longo do curso

9. **Livro Indicado:** Cálculo de Tom Apostol
   Critério(s) para escolha do(s) livro(s):
   A abordagem interessante e diferente da usual.

10. **Titulação:** Doutor em matemática

Tempo de Magistério: 35 anos

Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado: Cálculo Volume 1 Hamilton Guidorizzi

Critério(s) para escolha do(s) livro(s):

Livro Sério - assunto bem trabalhado, conceitos corretos, exposição clara, linguagem matemática de bom nível e enfoque matemático de alto nível.

11. Estive fora do país e estou retomando às atividades agora em agosto. Não tenho preferência definida quanto ao livro didático adotado para introduzir o conceito de derivada, mas na XXXX tem havido uma tendência a adotar o livro de Swokowski, talvez devido ao fato de haver livros na Biblioteca e muitos professores estarem acostumados com ele. Ultimamente o livro do Anton também está sendo usado e muitos professores acham-no moderno e adequado aos tempos modernos. Eu indico os exercícios do Swokowski para os alunos, mas eu mesma preparo o conteúdo teórico.

12. **Titulação:** Doutor

Tempo de Magistério: 09 anos

Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado:

Leithold

Critério(s) para escolha do(s) livro(s):

Observar se o livro cobre todo o conteúdo da ementa da disciplina;

Observar a didática do autor.

13. **TITULAÇÃO:** Mestrado

TEMPO DE MAGISTÉRIO: 2 anos

LIVRO DE CÁLCULO ADOTADO:

"Cálculo com Geometria Analítica" - Swokowski,E.W. –

"Cálculo, um Novo Horizonte" - Anton, H. –

"Cálculo A, funções, limites, derivação e integração" - Flemming,D.M.; Gonçalves,M.B.

Critério para a escolha: Como é abordado o assunto e sempre ter mais de uma literatura para consultar e preparar as aulas. Um abraço e boa sorte

14. **Titulação:** MESTRE (SUBSTITUTO)
    Tempo de Magistério: 1 ANO
    Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado: CÁLCULO - SWOKOWISKI - VOLUME 1 - MAKRON BOOKS
    Critério(s) para escolha do(s) livro(s): é o livro mais utilizado na nossa universidade. No meu parecer ele é o mais completo em relação à derivada.

15. **Titulação:** Mestre
    Tempo de Magistério: 40 anos; 34 no Ensino Superior
    Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado: Já usei muitos. Hoje: Howard Anton. Cálculo, um novo horizonte.

16. **Titulação:** Mestre em matemática, doutorando em matemática
    Tempo de Magistério: 4 anos
    Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado: Anton

17. **Titulação:** Doutor
    Tempo de Magistério: 14 nos
    Livro de Cálculo (Assunto: Derivada) indicado e/ou adotado: Paulo Boulos (Introdução ao Cálculo). Ed Edgard Blucher
    Critério(s) para escolha do(s) livro(s): São livros brasileiros, de um autor muito claro.

18. **Titulação:** Doutor
    Tempo de magistério: 12 anos
    Swokowski vol 1 ou Leithold vol 1 ou Ávila vol 1 ou Boulos vol 1 **critério(s):** nível teórico bom, exercícios de aplicações, boa exposição, respostas.