MARCIA MAIOLI

UMA OFICINA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES COM ENFOQUE EM QUADRILÁTEROS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2002

MARCIA MAIOLI

UMA OFICINA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES COM ENFOQUE EM QUADRILÁTEROS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.***

PUC/SP
São Paulo
2002

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** _______________

Dedico esse trabalho à minha
filha **Marina** que, apesar dos
poucos anos de vida,
demonstrou maturidade
suficiente para compreender
uma mudança em nossas vidas,
que nos separou fisicamente,
por um tempo considerável.

AGRADECIMENTO

Ao *Dr. Saddo Ag Almouloud* pela orientação, principalmente por respeitar o tempo que precisei para o amadurecer de certos conhecimentos.

Ao *corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP* em especial à coordenadora *Dra. Sonia Igliori*, pelo empenho em nos oferecer um mestrado bem conceituado na área de Educação Matemática.

Ao *CNPq* pela concessão da bolsa.

À *Universidade Estadual de Maringá*, pelo afastamento.

Aos *membros do Projeto de Pesquisa Estudo de Fenômenos de Ensino-Aprendizagem de Noções Geométricas*, pelas valiosas sugestões.

Aos membros da Banca Examinadora, *Dra. Maria Tereza Carneiro Soares* e *Dra. Tânia Maria Mendonça Campos*, pelos comentários e sugestões.

Ao *Secretário Francisco Olimpio da Silva*, pela contribuição nos momentos finais de elaboração desse trabalho.

Aos *Professores de Cianorte* que se propuseram a participar desse trabalho, pela forma aberta e franca em que expuseram seus comentários e suas dúvidas.

Aos meus pais, *Aleixo e Malvina*, pela preocupação que sempre tiveram em me propiciar condições para estudar.

À *Tia Neusa* e ao *Tio Guilherme* por cuidarem tão bem da *Marina* durante o tempo de realização desse mestrado.

Aos amigos *Ângelo* e *Claudete* por dividirem comigo não apenas a sua casa em São Paulo, mas também os momentos de alegria e dificuldades necessários ao nosso crescimento como seres humanos.

Agradeço de forma muito especial:

À amiga *Sonia Facco*, pelo carinho com que muitas vezes me hospedou em sua casa fazendo me sentir como parte de sua família.

Ao amigo *Armando Traldi*, que em nossos trabalhos, em nossas conversas, tantas vezes me contagiou com sua satisfação em estudar.

A autora

RESUMO

Esse trabalho trata da formação de professores de matemática. Nosso objetivo é oferecer uma contribuição nessa área, tanto no que se refere à aquisição de conteúdos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que auxiliem os professores na elaboração de estratégias adequadas para o trabalho com geometria em sala de aula. Fundamentados na Teoria das situações de BROUSSEAU e nos estudos de DUVAL sobre a utilização de diversos registros de representação semiótica, elaboramos uma oficina composta por atividades envolvendo os quadriláteros e a desenvolvemos com um grupo de professores do ensino fundamental e médio. Durante o desenvolvimento da oficina, discutimos com os participantes o referencial teórico que embasou a seleção das atividades e a maneira utilizada para apresentar o conteúdo. A questão investigada é: como trabalhar com formação de professores de forma a contribuir com a aquisição de conteúdos em geometria, proporcionando ao professor conhecimentos didáticos inerentes a esses conteúdos? Nossas principais hipóteses supõem que o desenvolvimento das atividades contribuirá com a aquisição de conteúdos, e a discussão do referencial teórico, com aprimoramento de conhecimentos didáticos inerentes à geometria. A análise das discussões e comportamento dos professores durante as trinta e três horas de oficina, revelaram-nos que as atividades provocaram reflexões sobre definições, conjeturas, propriedades dos quadriláteros, teoremas e demonstrações, bem como ajudou os professores a descobrirem a dificuldade que têm em utilizar diferentes registros de representação em geometria. A discussão do referencial teórico fez com que os professores notassem que, geralmente, têm omitido em suas aulas, as fases de ação, formulação e validação discutidas por BROUSSEAU, apresentando a geometria de forma já institucionalizada.

Palavras-chave: formação de professor, teoria das situações, registros de representação, geometria, quadriláteros.

ABSTRACT

This work is about Mathematics teacher education. It ains to offer a contribution in this area, in terms of understanding the processes by which new mathematical content is adquired and existing knowledge extended. We hope that it helps teachers to develop suitable strategies for working with Geometry in the classroom. This study is founded in BROUSSEAU's theory of situations and in DUVAL's studies about the use of several registers of semiotic representation. We prepared a workshop composed of activities whose focus was quadrilaterals, which was attended by a group of teachers from elementary and secondary school levels. During the workshop, we discussed the theoretical references that had served as a base for selectiing the activities and for the manners in which these were presented. The research question is: how can we work with teachers in ways which result in the acquisition of geometrical knwledge and, at the some time, provide them with inherent didactic knowledge related the geometrical content? Our main hypothesis is that the proposed activities will contribute to the content acquisition and the discussion of the theoretical references to the didactic knowledge improvement. Analyses of the teachers' behavior and discussion, during 33 workshop hours, reveals that the activities provoked considerations about definitions, assumpitions, properties of quadrilaterals, theorems and proofs, as well as helping teachers to discover the difficulties they have in using different registers of representation in Geometry. The discussion of the theoretical references made the teachers understand that in their classroom they have usually omitted the action, formulation and validity stages, discussed by BROUSSEAU, presenting Geometry in an institutionalized way.

Keywords: teacher education, theory of situations, registers of representation, geometry, quadrilaterals.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

PROBLEMÁTICA

O objetivo desse trabalho é contribuir para a formação de professores, tanto na aquisição de conteúdos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que os auxiliem na elaboração de estratégias adequadas para seu trabalho com geometria em sala de aula.

Nosso interesse pelo assunto tem origem em experiências que tivemos como docente de cursos para capacitação de professores na região norte do Paraná. Tais cursos visavam contemplar basicamente, conteúdos matemáticos relativos ao ensino fundamental e médio. Os professores que participavam destas capacitações explicitavam dificuldades na maneira de apresentar os conteúdos aos alunos. Ouvíamos com freqüência os seguintes questionamentos relativos à *forma* de trabalhar com os alunos: *como apresentar um conteúdo? Que tipo de atividades selecionar? O que deve ser considerado ao se preparar aulas sobre um determinado conteúdo?* Com o intuito de buscar pesquisas que nos auxiliassem a responder tais questionamentos, decidimos desenvolver nossa dissertação na área de formação de professores.

Para o desenvolvimento da dissertação, realizamos um levantamento sobre o que se tem pesquisado na área de formação de professores. Iniciamos o trabalho com pesquisas sobre formação de um modo geral (GARCIA, FLEMMING, CUNHA E KRASILSHIK, CARRASCOSA, PONTE, PERRENOUD), depois, direcionamo-nos à pesquisas sobre o professor de matemática (ALMOULOUD E MELLO, GOUVEA, PEREZ, LORENZATO).

Estas pesquisas apontam sérios problemas com formação de professores de matemática, sobretudo, quando se refere à geometria. LORENZATO (1995), fala do círculo vicioso: a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la. Afirma também que "é preciso um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro do ensino da Geometria escolar." (p. 4)

PEREZ (1995), constata que os professores que participaram de sua pesquisa, afirmaram que lhes faltavam conteúdos e metodologia adequada sobre como desenvolver o ensino de geometria.

CARRASCOSA (1996), afirma que "a falta de conhecimentos específicos sobre o conteúdo que se deseja ensinar constitui, com certeza, o primeiro e grave impedimento para que os professores possam desenvolver um ensino de qualidade." (p. 08)

PONTE (1994), discorre que, há tempos, é reconhecida a importância de se dominar bem os conteúdos que se ensina, e, destaca a importância do que chama de *conhecimento didático do conteúdo*, que seria a capacidade de compreensão das matérias de ensino, permitindo encontrar maneiras mais adequadas de apresentá-las aos alunos.

PERRENOUD (1999), descreve uma série de competências que considera prioritárias na formação do professor. Dentre elas, duas nos chamam especialmente a atenção: organizar e coordenar situações de aprendizagem; e estabelecer vínculos com as teorias subjacentes às atividades de aprendizagem. A primeira, pelo fato de vir ao encontro das ansiedades e questionamento dos professores que citamos no segundo parágrafo desta introdução. A segunda, pelo pouco contato existente entre as pesquisas e professores do ensino fundamental e médio. LINS (2000), declara pensar que, no caso da Educação Matemática, é preciso que o que a pesquisa produz, chegue às salas de aula. ANDRÉ e LÜDKE (1986) discorrem: "Encontramos por vezes, entre nossos alunos e até mesmo na literatura especializada, uma certa indicação de que a atividade de pesquisa se reservaria a alguns eleitos, que a escolheram ou por ela foram escolhidos, para exercer em caráter exclusivo, em condições especiais e até mesmo assépticas em sua torre de marfim, isolada da realidade." (p. 2)

Como vemos, pesquisadores concordam que o conhecimento do conteúdo a ser trabalhado é importante. No entanto, além do conteúdo, é necessário que o professor detenha outros conhecimentos.

Nossa pesquisa, gira em torno da questão: como trabalhar com formação de professores de forma a contribuir com a aquisição de conteúdos em geometria, proporcionando-os, conhecimentos didáticos inerentes a esses conteúdos?

Depois de verificarmos estudos enfocando formação de professor, procuramos por pesquisas sobre ensino e aprendizagem de geometria. Nos estudos a respeito de registros de representação semiótica de RAYMOND DUVAL, observamos pontos importantes sobre essa questão e, encontramos na Teoria das situações de GUY BROUSSEAU, estudos sobre fatos a serem considerados ao se organizar uma situação de aprendizagem.

Decidimos eleger um conteúdo em geometria para embasar nosso trabalho. Temos acesso a poucas pesquisas sobre quadriláteros. Além disso, este assunto é extremamente rico sob o ponto de vista geométrico, pois, permite explorar situações que envolvam construções com régua e compasso; vários registros de representação; levantamento de conjecturas; demonstrações; teoremas e teoremas recíprocos. Por essas razões, optamos por quadriláteros.

Procuramos verificar o que dizem os PCN sobre geometria no terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental, visto que os *quadriláteros* são abordados neste ciclo do ensino.

Lemos nos PCN, que a falta de uma formação profissional qualificada é apontada como um dos obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de matemática. "A formação dos professores, por exemplo, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência. Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que muitas vezes são de qualidade insatisfatória." (p. 21) Devido a esse fato, decidimos também observar como alguns autores de livros didáticos abordam os quadriláteros.

Decidimos elaborar uma oficina com atividades envolvendo quadriláteros e a apresentarmos a um grupo de professores do ensino fundamental e médio. Pretendemos mostrar como um conteúdo matemático pode ser abordado sob a luz da resolução de problemas; respeitando a teoria das situações de GUY BROUSSEAU e considerando os diferentes registros de representação semiótica utilizados em geometria. Nossa pretensão não é simplesmente fornecer aos professores participantes uma espécie de receita de como dar aulas. Queremos, também, despertar suas atenções para algumas pesquisas inerentes ao ensino de matemática. Para tanto, mostramos e discutimos com eles as idéias centrais que fundamentaram a escolha das atividades da oficina.

As atividades da oficina iniciam explorando o aspecto visual dos quadriláteros, depois, seguem explorando aspectos mais teóricos, como propriedades e demonstrações de teoremas. Em todas as atividades, os professores trabalham em grupo, discutindo com os companheiros, cometendo e consertando erros, criando estratégias, levantando e comprovando conjeturas, trabalhando sempre com mais de um registro.

Sendo assim, nossa primeira hipótese é que a oficina proporcionará aos professores participantes a aquisição ou aprimoramento de conceitos relativos a quadriláteros.

Nossa segunda hipótese é que a discussão com os professores sobre o que tem por trás da oficina, ou seja, o referencial teórico, proporcionará reflexões sobre a forma como trabalham em sala de aula.

Discutiremos, segundo Brousseau, uma forma de organizar situações de aprendizagem e, segundo Duval, a importância dos registros de representação no processo ensino/aprendizagem da matemática. Nossa terceira hipótese é que a discussão deste referencial teórico, despertará no professor o interesse por outras pesquisas.

CAPÍTULO I

I.1 - FORMAÇAO DE PROFESSORES - ESTUDOS PRELIMINARES

Parece-nos necessário esclarecer em que sentido usaremos a expressão *formação de professores.* Dentre os diversos conceitos que encontramos, o que mais se aproxima do que pretendemos chamar de formação de professores, é descrito por GARCIA, 1999:

> *A Formação de Professores é a área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da Didáctica e da Organização Escolar, estuda os processos através dos quais os professores – em formação ou em exercício – se implicam individualmente ou em equipe, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem. (p. 26)*

Adotaremos a terminologia *formação inicial* quando fizermos referências àquela que antecede ao ingresso profissional, ou seja, quando o sujeito ainda não está habilitado para o exercício da profissão. Por *formação continuada*, entendemos a formação do professor em exercício.

Segundo FLEMMING (2001), a formação continuada realiza-se "de forma permanente, após o ingresso do indivíduo no mundo profissional, e tem como objetivo básico a atualização e aperfeiçoamento da formação inicial." (p. 01)

CUNHA E KRASILCHIK[1], salientam que a formação continuada se justifica mesmo para aqueles profissionais oriundos de Universidades bem conceituadas. “A atrofia dos fundamentos teóricos dos cursos de formação de professores e a conseqüente atomização e fragmentação dos currículos é uma realidade também nas boas Universidades. Portanto, cursos de formação continuada têm o papel, entre nós, não só de garantir a atualização dos professores, como também de suprir deficiências dos cursos de formação.”

CARRASCOSA, 1996, afirma que:

> *“a formação de um professor é um processo em longo prazo que não se finaliza com a obtenção do título de licenciado (nem mesmo quando a formação inicial recebida tiver sido da melhor qualidade). Isso porque, entre outras razões, a formação docente é um processo complexo para o qual são necessários muitos conhecimentos e habilidades, impossível de ser todos adquiridos no curto espaço de tempo que dura sua formação inicial. Além disso, como resultado do próprio trabalho em sala de aula, estarão surgindo constantemente novos problemas que o professor deverá enfrentar.”* (p. 10)

PONTE[2] (1995), discorre sobre um conceito que para ele, representa uma nova perspectiva de olhar os professores trata-se do *desenvolvimento profissional* cujo conceito, segundo ele, é relativamente recente e sua importância vem do fato de que a sociedade em constante mudança impõe à escola responsabilidades cada vez mais pesadas. Assim, os conhecimentos adquiridos com a formação inicial tornam-se insuficientes para o desempenho das suas funções ao longo da carreira. Sob o ponto de vista do autor, formação e desenvolvimento profissional não são noções equivalentes. Registramos algumas diferenças apontadas por ele, na tabela a seguir:

---

[1] http://www.anped.org.br/0812t.htm

[2] (www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/ind_uk.htm)

	Formação	**Desenvolvimento**
Como se Processa	Freqüência a cursos	Freqüência a cursos, projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões...
Postura do Professor	Sujeito: absorve conhecimentos e informações que lhe são transmitidos.	Objeto: toma decisões sobre as questões que quer considerar, os projetos que quer empreender e o modo de executá-los.
Foco	Atende-se àquilo em que o professor é carente	Parte-se dos aspectos que o professor já tem mas que podem ser desenvolvidos.
Forma	Compartimentada, por assunto.	Tende a implicar a pessoa do professor como um todo
Ponto de Partida	Da teoria, muitas vezes não sai dela.	Pode partir tanto da teoria como da prática, considerando teoria e prática de forma interligada.

Nesse trabalho, quando falamos em *formação,* estamos objetivando o *desenvolvimento profissional* proposto por PONTE.

O atual contexto de mudança vivido pela sociedade impulsiona as transformações ocorridas e pretendidas em Educação. Os professores, que estão exercendo o magistério, presenciam as transformações sociais e educacionais na prática, vivendo um dilema pois a formação inicial e a prática que tiveram até recentemente certamente se deram sob paradigmas que hoje se pretendem romper.

Segundo Alonso, 1999 :

> *"A separação entre o pensar e o agir no desenvolvimento do trabalho educativo foi, em grande parte, responsável pela supervalorização do trabalho dos administradores e especialistas do ensino em detrimento do professor, cuja ação ficou reduzida à mera aplicação de normas e preceitos, nem sempre bem compreendidos, reduzidos aos seus termos mais simples, de forma a permitir um controle mais fácil por parte das autoridades do ensino."*
> (p. 14)

Mas, a pretensão de formar cidadãos críticos, participativos e futuros profissionais competentes para atuar no mercado de trabalho atual exige do professor muito mais do que simplesmente ser um executor de tarefas, procedimentos e técnicas que foram estabelecidas por administradores e especialistas.

Quais são então, as competências ou qualidades profissionais que o professor deve possuir atualmente?

PERRENOUD (1999), assegura que prática reflexiva e participação crítica são entendidas como orientações prioritárias da formação de professores, afirmando que “é preciso, então, ancorar a prática reflexiva sobre uma base de competências profissionais.” (p. 09) O autor descreve dez novas competências ligadas às transformações do ofício de professor. São elas:

1. Organizar e coordenar situações de aprendizagem.
2. Gerir a progressão das aprendizagens.
3. Conceber e fazer evoluir dispositivos de diferenciação.
4. Envolver alunos em sua aprendizagem e seu trabalho.
5. Trabalhar em equipe.
6. Participar da gestão da escola.
7. Informar e envolver os pais.
8. Servir-se de novas tecnologias.
9. Enfrentar os deveres e dilemas éticos da profissão.
10. Gerir sua própria formação contínua.

Para cada uma destas competências, o autor apresenta exemplos de competências mais específicas a serem trabalhadas na formação contínua. Tais exemplos, são mostrados na tabela[3] a seguir.

[3] Tabela apresentada na p. 20 da Revista Brasileira de Educação, n. 12, 1999

Competências de referência	Competências mais específicas para serem trabalhadas na formação contínua (exemplos)
1. Organizar e coordenar situações de aprendizagem	➢ Conhecer, para uma dada disciplina, os conteúdos a ensinar e sua tradução em objetivos de aprendizagem ➢ Trabalhar a partir das representações dos alunos ➢ Construir e planificar dispositivos e seqüências didáticas ➢ Engajar os alunos em atividades de pesquisa, em projetos de conhecimento
2. Gerir a progressão das aprendizagens	➢ Conceber e gerir situações-problemas adequadas aos níveis e possibilidades dos alunos ➢ Adquirir uma visão longitudinal dos objetivos do ensino primário ➢ Estabelecer vínculos com as teorias subjacentes às atividades de aprendizagem, sendo uma abordagem formativa ➢ Fazer balanços periódicos de competências e tomar decisões de progressão
3. Conceber e fazer evoluir dispositivos de diferenciação	➢ Gerir heterogeneidade no interior do grupo de classe ➢ Superar barreiras, ampliar a gestão da classe para um espaço mais vasto ➢ Praticar o apoio integrado, trabalhar com os alunos com grande dificuldade ➢ Desenvolver a cooperação entre alunos e algumas formas simples de ensino mútuo
4. Envolver os alunos em sua aprendizagem e seu trabalho	➢ Suscitar o desejo de aprender, explicitar a relação com o saber, o sentido do trabalho escolar e desenvolver a capacidade de auto-avaliação nas crianças ➢ Instituir e fazer funcionar um conselho de alunos(Conselho de classe ou de escola) e negociar com os alunos diversos tipos de regras e contratos ➢ Oferecer atividades de formação optativas, de modo que o aluno componha livremente parte de sua formação ➢ Favorecer a definição de um projeto pessoal do aluno
5.Trabalhar em equipe	➢ Elaborar um projeto de equipe, representações comuns ➢ Coordenar um grupo de trabalho, conduzir reuniões ➢ Formar e renovar uma equipe pedagógica ➢ Confrontar e analisar juntos situações complexas, práticas e problemas profissionais ➢ Gerir crises ou conflitos entre pessoas

6. Participar da gestão da escola	➢ Elaborar e negociar um projeto da escola ➢ Gerir os recursos da escola ➢ Coordenar e estimular uma escola como todos os parceiros (pára-escolares, do bairro, associações de pais, professores de línguas e cultura de origem)
7. Informar e envolver os pais	➢ Coordenar as reuniões de informações e de debate ➢ Conduzir as entrevistas ➢ Envolver os pais na valorização da construção de saberes
8. Servir-se de novas tecnologias	➢ Utilizar os programas de edição de textos ➢ Explorar as potencialidades didáticas de programas com relação aos objetivos dos vários domínios do ensino
9. Enfrentar os deveres e dilemas éticos da profissão	➢ Prevenir a violência na escola e na cidade ➢ Lutar contra os preconceitos e as discriminações sexuais, étnicas e sociais ➢ Participar na definição de regras de vida comum no tocante à disciplina na escola, sanções e a apreciação da conduta ➢ Analisar a relação pedagógica, a autoridade e a comunicação em classe ➢ Desenvolver o senso de responsabilidade, a solidariedade, o sentimento de justiça
10. Gerir sua própria formação contínua	➢ Saber explicitar suas práticas ➢ Fazer seu próprio balanço de competências e seu programa pessoal de formação contínua ➢ Negociar um projeto de formação comum com os colegas (equipe, escolas, rede) ➢ Envolver-se em atividades no domínio de um setor de ensino ou DIP[4] ➢ Colher e participar da formação dos colegas

O autor discorre sobre a necessidade da formação continuada, afirmando que a formação inicial rapidamente se torna obsoleta diante da evolução das condições e dos contextos de ensino. Segundo ele, a formação continuada pode oferecer *novas receitas quando as antigas "não funcionarem mais".* (p. 11)

AZANHA (1998), afirma que, "dentre os problemas de educação brasileira que precisam ser resolvidos nenhum sobreleva o da formação de professores." (p. 50). Segundo o autor, no concurso para contratação de professores no ano de 1993 em São Paulo, 94 281 professores compareceram às provas, dos quais, apenas 8 142 foram aprovados.

[4] Département de Línstruction Publique, nome dado ao órgão responsável pela Educação em alguns cantões suíços. (N.T.)

Atualmente, muitas pesquisas na área de formação de professores estão sendo desenvolvidas no país. Na 24ª reunião da ANPED[5], 2001, foram apresentados pelo GT8 - Formação de Professores - 29 trabalhos, incluindo pôsteres. Considerando o GT19 - Educação Matemática – podemos citar em formação de professores, as pesquisas de Maria Tereza Soares (UFPR) / Neuza Bertoni Pinto; Renata P. Gama (UNIMEP) / Célia M. do Amaral Gurgel; Saddo Ag Almouloud (PUC/SP) / Ana Lúcia Manrique.

Centralizaremos nossa atenção à formação do professor de matemática.

Considerando o universo dos professores de matemática, a situação parece se agravar quando o assunto é a geometria. LORENZATO (1995), afirma que "muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas." (p. 03). Mais adiante, o mesmo autor declara: "Presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la." (p. 04). Afirma também que "é preciso um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro do ensino da Geometria escolar." (p. 04)

GOUVEA (1998), constata que, dos professores entrevistados para sua dissertação de mestrado, cerca de 67.3% afirmaram que à época de sua formação, não tiveram oportunidade de estudar geometria de forma a obter subsídios para trabalhar com alunos.

ALMOULOUD e MELLO[6] (2000), destacam:

- *grande parte dos professores que hoje estão em atividade receberam uma formação de base muito precária em Geometria, devido à própria influência que o movimento da Matemática Moderna desempenhou em nossos currículos nas décadas de 60/70;*
- *os cursos de formação inicial de professores – tanto os cursos de magistério como os de licenciatura – continuam não dando conta de discutir com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria;*

[5] http://www.anped.org.br
[6] http://www.anped.org.br

- *também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido, igualmente, o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de geometria.*

PEREZ, 1995, afirma:

(a) Há pouco Ensino de Geometria em nível de 1º e 2º graus, quer seja por faltar tempo; por estar sempre no final dos planejamentos; por estar no final dos livros; pela preferência dos professores por Aritmética ou Álgebra; por ser o programa de matemática muito extenso em cada série; pelo fato de a quantidade de aulas semanais em cada série ser insuficiente para "cumprir todo o programa".

(b) Falta metodologia e materiais concretos para o professor efetivar esse ensino, mostrando formação deficiente em conteúdo e metodologia assim como necessidade de orientação e atualização, através de cursos, após estarem no mercado de trabalho. (p.57)

Problemas com formação deficiente na área de geometria, não ocorrem apenas no Brasil. HERSHKOWITZ, 1996, revela em uma pesquisa realizada em Israel, 1984, que professores apresentam padrões de concepções incorretos semelhante aos dos seus alunos. Esta semelhança "sugere que o processo de formação de conceitos de geometria e os fatores que inibem essa formação atuam de maneira semelhante sobre os indivíduos – alunos, professores alunos e professores. Tudo indica que é preciso fazer com que o professor ou o futuro professor se familiarizarem com esses processos e as concepções incorretas associadas a eles." (p. 279)

I.2. ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Pesquisas constatam que professores do Ensino Fundamental e Médio, têm dificuldades em lidar com o ensino da Geometria (ALMOULOUD e MELLO (2000), GOUVEA (1998), PEREZ (1995), LORENZATO (1995)). Estas dificuldades se refletem no baixo desempenho dos seus alunos.

Procuramos verificar o que dizem as pesquisas sobre a questão do ensino-aprendizagem da matemática, mais especificamente da geometria.

Brousseau, em suas pesquisas, estuda fatos que devem ser considerados ao se apresentar um conteúdo aos alunos.

Para DUVAL, os problemas de geometria apresentam uma grande originalidade em relação a muitas outras tarefas matemáticas.

Por estas razões, buscamos nos fundamentar nos trabalhos destes pesquisadores.

I.2.1. As pesquisas de GUY BROSSEAU

Em outubro de 2000, realizamos uma pequena enquete junto a professores do ensino fundamental e médio, com o objetivo de levantar algumas de suas expectativas com relação a projetos de formação continuada. Encontramos, entre outras, a seguinte sugestão: “aperfeiçoamento dos conteúdos que devemos lecionar e principalmente como apresentá-los aos alunos” coincidindo com a ansiedade dos professores com os quais trabalhamos há tempos, em cursos de capacitação.

Encontramos na Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, um estudo sobre fatos que devem ser levados em conta ao se preparar e apresentar atividades sobre determinados conteúdos matemáticos, visando realizar uma educação matemática mais significativa para o aprendiz.

BROUSSEAU (1986) define situação didática como “um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição”. (Apud ALMOULOUD, 1997, p. 65).

Para BROUSSEAU, 1996, o matemático não comunica resultados tal como os obteve, mas os reorganiza, dando ao saber uma forma comunicável por meio de situações que dêem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados. A aprendizagem deve ser considerada "como uma modificação do conhecimento que o aluno deve produzir por si mesmo e que o professor só deve provocar." (p. 49)

O autor salienta duas fases do papel do professor:

> *... fazer viver o conhecimento, fazê-lo ser produzido por parte dos alunos como resposta razoável a uma situação e, ainda, transformar esta "resposta razoável" em um "fato cognitivo extraordinário", identificado, reconhecido a partir do exterior.*
>
> *Para o professor, é grande a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o aluno se apropria dele como puder.* (p. 49)

Notemos que o professor não deve simplesmente comunicar conhecimentos, mas organizar situações que propiciem o que Brousseau chama de *devolução* de um problema, que seria a atividade por meio da qual o professor procura comunicar um problema ao aluno, para que esse problema se converta em *seu* problema, de forma que o aluno se sinta o responsável por sua resolução e aceite o desafio de resolvê-lo.

Uma parte essencial da situação didática é a *situação adidática* que representa os momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de forma independente, sem controle direto por parte do professor. A situação adidática se caracteriza pelos seguintes fatos:

> - *o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir, evoluir por sua iniciativa própria.*
> - *o professor recusa intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele gostaria de provocar.*
> - *o problema é escolhido para fazer adquirir pelo aluno novos conhecimentos inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que ele pode construir sem apelo as razões didáticas.* (ALMOULOUD, 1997, p. 66)

Para FREITAS (1999), as situações adidáticas "representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nas mesmas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar um conhecimento." (p. 70)

Considerando algumas hipóteses de PIAGET[7], podemos dizer que, esta proposta está ligada ao construtivismo na medida em que coloca o aluno numa posição de construção do conhecimento.

O trabalho pedagógico tem início com a escolha das atividades (problemas) a serem desenvolvidas com os alunos. Esta é uma etapa fundamental e deve ser realizada pelo professor, já que ele é quem conhece a realidade da turma e será capaz de elaborar ou selecionar atividades compatíveis com o nível dos alunos. É muito importante que estas atividades favoreçam o aparecimento de situações adidáticas.

Para analisar o processo da aprendizagem, a teoria das situações observa e decompõe esse processo em quatro fases diferentes: *de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.* Vejamos seus aspectos fundamentais.

Situações de ação

São situações estruturadas (pelo professor) de forma que o aprendiz tenha condições de agir buscando a solução do problema. Na busca desta solução, ele realiza ações mais imediatas, que produzem conhecimentos de natureza mais operacional. Nestas situações, há o predomínio do aspecto experimental do conhecimento. O aprendiz vai escolhendo, ou desenvolvendo, estratégias para solução sem a preocupação com explicitação de argumentos de natureza teórica que justifiquem a validade de sua resposta.

---

[7] -"Aprende-se quando age-se".
"Os conhecimentos passam de um estado de equilíbrio a um outro pelas fases transitórias no curso das quais os conhecimentos anteriores não funcionam bem. Se este momento de desequilíbrio é superado, isto significa que há reorganização dos conhecimentos na qual as novas aquisições são integradas ao saber antigo". (Apud ALMOULOUD, 1997, p. 37)

Em geral, as estratégias são criadas e postas em prova pela experimentação. Ela é aceita ou rejeitada depois da apreciação por parte do aprendiz. Uma situação de ação deve então, permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação, ajustar esta última graças à retroação da ação. Não é o professor que apresenta a solução. Ele pode buscá-la junto com os alunos.

Para BROUSSEAU (1998), “a ‘seqüência das situações de ação’ constitui o processo pelo qual o aluno vai produzir as estratégias, ou seja, ‘aprender’ um método de solução do seu problema”. (p. 33)

Situações de formulação

Nestas situações, o aprendiz elabora uma linguagem que seja compreendida por todos e que considere os objetos e as relações pertinentes à situação. A construção de tal linguagem, ou código, deve tornar possível a explicação das estratégias adotadas anteriormente.

Segundo ALMOULOUD (1997): “Nestas situações o aluno troca informações com uma ou várias pessoas. Os interlocutores são emissores e receptores, e trocam séries de mensagens escritas ou orais que estão redigidas em língua ingênua ou matemática segundo as possibilidades de cada emissor.” (p. 69).

Estas situações permitem que o aprendiz, ou seu grupo, explicite as ferramentas utilizadas na busca da solução.

Neste momento pode surgir uma linguagem própria do grupo, ou seja, termos, códigos ou símbolos que o grupo cria para comunicar entre si. O objetivo das situações de formulação é a troca de informações: há momentos em que um aluno quer agir, mas as informações que detém são insuficientes, então ele consulta seus companheiros em busca dos dados que lhe faltam. Com estas trocas, pode haver julgamentos e questionamentos sobre validade, no entanto, esses aspectos não são exigidos para caracterizar uma situação de formulação.

Situações de validação

Notemos que as situações de ação e formulação podem permitir que o aprendiz enverede, inclusive, por um raciocínio equivocado. É necessário, então, um outro tipo de situação que venha expor este equívoco e que exija um raciocínio mais voltado para os porquês, à certeza e à ausência de contradições: as situações de validação, que são aquelas em que o aprendiz utiliza mecanismos de prova.

As situações de validação servem tanto para garantir que a solução está correta como para rejeitá-la em caso negativo. Em outras palavras, nestas situações é preciso elaborar algum tipo de prova daquilo que já se afirmou pela ação ou formulação.

As três situações vistas até agora, apesar de proporcionar ao aprendiz momentos de extrema importância na construção do seu conhecimento, podem deixar conhecimentos falsos, validados de forma incorreta, já que o aprendiz trabalha de forma mais livre e independente da interferência direta do professor. É necessário ainda um outro tipo de situação: a institucionalização.

Situações de institucionalização

Nas situações de institucionalização ocorre uma intervenção externa, sob a responsabilidade do professor, visando estabelecer o caráter objetivo e a universalidade do conhecimento bem como a correção de possíveis distorções (conceitos errados, demonstrações incorretas...) sofridas nas fases anteriores.

Notemos que as fases anteriores permitem ao aprendiz criar uma linguagem própria ou um conhecimento mais individualizado. No entanto, este conhecimento precisa ser aceito pelo meio social, extrapolando o contexto local em que foi gerado. Então, cabe ao professor, selecionar os pontos essenciais que devem passar a constituir um saber formal, oficial a ser incorporado como patrimônio cultural pronto para ser utilizado em novas ocasiões.

Para o nosso trabalho com os professores, procuramos preparar uma oficina com atividades que propiciassem a passagem por cada uma das fases consideradas por BROUSSEAU. Observemos que estas fases estão extremamente interligadas, de forma que não percebemos seus limites, ou seja, onde termina uma e começa a outra.

Além de utilizar a teoria das situações como fundamentação teórica na elaboração da nossa oficina, tivemos a preocupação de discuti-la com os professores participantes da pesquisa, com o objetivo de sugerir uma forma de encaminharem suas aulas e verificar suas opiniões sobre a teoria.

Numa situação de aprendizagem deste tipo, o professor deve estar especialmente preparado e atento para a passagem pelas situações de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. Como elas vão se dar, pode ser uma surpresa, pois os rumos que a aula tomará dependerão do tipo de raciocínio que os alunos adotarem. Daí a importância de se fazer uma análise didática das atividades a serem trabalhadas, prevendo os conhecimentos a serem mobilizados na resolução das mesmas, as possíveis soluções e dificuldades e, sobretudo, quais são os objetivos que se pretende atingir.

I.2.2. OS ESTUDOS DE RAYMOND DUVAL

Raymond Duval tem pesquisado o uso das representações no ensino da matemática. Os objetos de estudo em matemática: conceitos, propriedades, relações, estruturas, ... , não são diretamente perceptíveis aos sentidos humanos. Recorremos então, a notações simbólicas, códigos, tabelas, gráficos, esquemas, escritas, como representantes para estes objetos.

DUVAL salienta que a distinção entre um objeto matemático e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão matemática. A confusão entre objeto e representação é quase inevitável, pois, a apreensão dos objetos matemáticos é conceitual, mas, é somente por meio de representações semióticas que uma atividade sobre estes objetos é possível.

Para DUVAL (1993) *representações semióticas* "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento." (p. 39)

As representações gráficas são representações semióticas, da mesma forma que as figuras geométricas, a escrita ou a linguagem. O representante visível obedece a leis de organização que lhe são próprias, assim, as possibilidades de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos dependem do sistema de representação semiótica utilizado. As representações semióticas têm "dois aspectos: a forma (ou o representante) e o conteúdo (ou o representado). A forma muda de acordo com o Sistema semiótico usado: há assim, vários registros possíveis de representação para um mesmo objeto, cada um correspondendo a um tipo diferente de tratamento cognitivo." (ALMOULOUD, 1997, p. 16)

Estas representações não são necessárias apenas para fins de comunicação. Elas são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, sendo assim, sem as representações semióticas, torna-se impossível a construção do conhecimento por aquele que aprende. A função cognitiva do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação.

DUVAL chama de *"semiósis* a apreensão ou produção de uma representação semiótica e *noésis* a apreensão conceitual de um objeto." O autor afirma que não há noésis sem semiósis e o recurso a diversos registros é uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações.

Qual a necessidade de diversos registros de representação para o funcionamento do pensamento humano? DUVAL coloca três diferentes respostas possíveis a essa questão:

A economia de tratamento[8]: a existência de diversos registros permite a troca de registros e, essa troca, tem por objetivo efetuar tratamentos de uma forma mais econômica e poderosa.

A complementaridade entre registros: a natureza do registro escolhido para representar um objeto impõe uma seleção dos elementos significativos ou informações do conteúdo que está representando. "Esta situação se faz em função das possibilidades e das dificuldades semióticas de cada registro. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação de uma figura ou diagrama. Isso quer dizer, que *toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa*." (DUVAL, 1993, p. 49)

A terceira resposta, diz respeito à estrutura da representação: a relação entre representante e representado. A compreensão de uma representação dentro de um determinado registro, influencia a compreensão do conteúdo conceitual representado.

Um sujeito precisa chegar ao estágio da coordenação de representações semioticamente diferentes, para que ele possa discriminar o representante do representado.

DUVAL (1995, p. 173) salienta que a atividade matemática exigida em geometria faz uso de dois registros: o das figuras e o da língua natural. No entanto, não se trata de simplesmente executar uma troca de registro como em outras situações da matemática, em que os tratamentos são efetuados somente em um dos registros. A atividade cognitiva pedida em geometria exige mais. Os tratamentos efetuados separada e alternadamente em cada um dos registros não são mais suficientes: é necessário que os tratamentos figurais e discursivos sejam efetuados simultaneamente e de forma interativa.

[8] Tratamento: transformação de uma representação ficando no interior de um mesmo registro.

I.3. OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

O conteúdo *quadriláteros* é um assunto que permite trabalhar vários aspectos da geometria em geral, isto nos influenciou a optar por este assunto para elaborar nossa oficina. Este conteúdo é abordado no terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental. Sentimos necessidade de verificar as recomendações com relação à geometria, feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental.

Os PCN recomendam a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas. Consideram *problema matemático* “uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas que é possível construí-la.” (p. 40)

Para uma abordagem através da resolução de problemas, os PCN defendem uma proposta com os seguintes princípios:

- *ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;*
- *problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;*
- *aproximações sucessivas as conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na Historia da Matemática;*
- *um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo*

de problemas e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;

- *a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.* (p. 39)

Salientam que, resolver um problema pressupõe que o aluno venha a elaborar um ou vários procedimentos de resolução (realizando simulações, fazendo tentativas, formulando hipóteses); comparar seus resultados com os de outros companheiros e validar seus procedimentos.

Os PCN informam também que, nem sempre são observadas as recomendações feitas para que conteúdos sejam veículos para a aprendizagem de idéias fundamentais e que devem ser selecionados levando em conta sua potencialidade, “quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento de formas de pensar.”

Em nosso trabalho, enfocaremos o desenvolvimento de formas de pensar, já que trabalhamos em termos de levantar hipóteses, utilizar argumentações, comprovar informações e organizar idéias.

Os PCN de matemática destacam avanços da Educação Matemática que têm sido pouco considerados pelas práticas escolares. Evidenciam, entre outros fatores, a importância da geometria e das medidas para o desenvolvimento de capacidades cognitivas fundamentais. As finalidades do ensino da matemática indicam como objetivos para o ensino fundamental, levar o aluno à:

- *Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;*
- *fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático*

(aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);

- *selecionar, organizar e produzir informações relevantes para, interpreta'-las e avalia-las criticamente;*
- *resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;*
- *comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;*
- *estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;*
- *sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;*
- *interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles* (p. 47).

Os PCN sugerem que a matemática seja vista em quatro blocos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

O estudo da Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.

O trabalho com Espaço e Forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (p. 51)

Com relação aos conteúdos propostos para o terceiro ciclo, os PCN (p. 68) ressaltam que, as atividades geométricas, devem centrar-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como manuseio de instrumentos de medidas que permitam ao aluno fazer conjeturas e inferências sobre propriedades dessas figuras. Também enfatizam que o professor estimule a construção, análise e a comparação de diferentes processos de resolução de problemas, isto faz com que se reconheça a necessidade de construir argumentos plausíveis.

Os PCN lembram que uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal, que, por sua vez, sustentam a demonstração.

É desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (p. 70)

No quarto ciclo, o estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma deve ter como ponto de partida a análise das figuras pela observação manuseio e construções que permitam fazer conjeturas e identificar propriedades. Os problemas de geometria devem permitir ao aluno os primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isto não significa fazer um estudo formal e axiomático da geometria. Deve-se, então, iniciar um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado. No entanto, as verificações empíricas não devem ser abandonadas pois elas permitem produzir conjeturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos evolvidos.

O termo quadrilátero aparece pela primeira vez nos PCN, na indicação de conceitos e procedimentos para o quarto ciclo: “verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos”. (p. 89)

Dentre as atitudes, para o quarto ciclo, destacamos:

- *Predisposição para encontrar exemplos e contra-exemplos, formular hipóteses e comprová-la.*
- *Interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a dada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão e análise.*
- *Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na validação.* (p. 91)

Podemos então concluir, que os PCN propõem o trabalho com a geometria a partir de situações-problema, enfatizando a criação de situações ou atividades que, partindo do experimental, levem os alunos a conjeturar e compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, deve se considerar a articulação entre o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. Observamos também uma grande valorização do trabalho coletivo.

Vejamos agora, como alguns livros didáticos abordam os quadriláteros.

I.4. OS LIVROS DIDÁTICOS

Solicitamos que os professores que se propuseram a participar dessa pesquisa, levassem os livros que estavam utilizando em suas atividades. Eles levaram três coleções e algumas apostilas adotadas em colégios particulares. Optamos por analisar apenas os livros didáticos, pois pretendemos trabalhar com professores da rede pública, embora, muitos professores trabalhem também na rede particular.

Os livros – coleções de quinta a oitava séries – foram os seguintes:

Coleção	Título	Autores	Editora	Ano
1	Projeto oficina de matemática	Maria C. C. Grasseschi, Maria C. Andretta e Aparecida B. Silva	FTD	1999
2	Matemática hoje é feita assim	Antonio José Lopes Bigode	FTD	2000
3	Matemática uma aventura do pensamento	Oscar Guelli	Ática	2001

Para esta análise, estabeleceremos alguns critérios, que definimos a partir das recomendações dos PCN; de questões levantadas por DUVAL, em suas pesquisas sobre registros de representação semiótica.

Os PCN afirmam que a abordagem de conceitos sob a perspectiva da resolução de problemas ainda é desconhecida por parte dos professores e, quando é incorporada, aparece como um item isolado como aplicação da aprendizagem.

Também lemos nos PCN, que o trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor explore atividades em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, que envolvam procedimentos de observação, manuseio de instrumentos que permitam ao aluno fazer conjeturas sobre propriedades observadas. Outra recomendação diz respeito à validação destas conjeturas. Podemos ler: “é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las.”

Assim, estabelecemos os seguintes critérios:

(CI) - O autor apresenta os conteúdos partindo de situação-problema?

(CII) - O autor apresenta atividades de construções geométricas?

(CIII) - As atividades permitem ao aluno, fazer conjeturas?

(CIV) - As atividades envolvem demonstrações?

Como DUVAL salienta a importância de trabalhar com diversos registros de representação semiótica, nosso quinto critério é:

(CV) – O autor trabalha com diversos registros de representação?

Encontramos definições não equivalentes para quadriláteros, uma considerando quadrilátero como união de segmentos e outra como a região limitada por estes segmentos. Para trapézio, também encontramos duas definições: I – quadrilátero que tem dois lados paralelos; II - quadrilátero em que apenas dois lados são paralelos. Estabelecemos mais dois critérios:

(CVI)- O autor considera quadrilátero como região ou como união de segmentos?

(CVII)- Qual definição de trapézio é considerada?

Queremos lembrar que analisamos nos livros apenas a parte referente a quadriláteros, portanto, o fato do autor não ter contemplado determinado critério, não significa que não o tenha feito em todos os tópicos do livro.

Os resultados observados são mostrados na tabela abaixo.

Coleção Critérios	**1**	**2**	**3**
CI	Sim	Sim	Não
CII	Sim	Sim	Sim
CIII	Sim	Sim	Não
CIV	Sim	Não	Sim
CV	Sim	Sim	Sim
CVI	Região	?	União
CII	Def. II	Def. II	Def.I

Comentários:

Notamos nos autores das duas primeiras coleções, a preocupação em abordar quadriláteros partindo da resolução de problemas, principalmente nas autoras da coleção 1.

No manual do professor, o autor da coleção 3 fala da importância e necessidade das construções geométricas. No entanto, encontramos apenas uma atividade cujo desenvolvimento requer o uso de régua e compasso, e outra envolvendo desenho em malha quadriculada.

Na coleção 1, encontramos apenas duas atividades solicitando que o aluno desenhe quadriláteros quaisquer, à sua escolha.

Na coleção 2 a construção é explorada em um número maior de atividades. No livro destinado à sétima série, o autor explica como construir um paralelogramo com régua e esquadro em quatro passos.

Notamos a preocupação dos autores das duas primeiras coleções em apresentar atividades que possibilitem o aluno levantar conjeturas.

Quanto às propriedades, a coleção 1 apresenta dois tipos de atividades: aquelas que possibilitam ao aluno uma constatação experimental de algumas propriedades, preocupação também encontrada na coleção 2, e outras, que trabalham com as demonstrações destas propriedades, o que não acontece com a coleção 2. Na terceira coleção, o autor apresenta demonstração de apenas uma propriedade, outras são enunciadas e suas demonstrações ficam como exercício.

Quanto à questão de utilizar diferentes registros, não conseguimos identificar se os autores tiveram a preocupação de enfatizá-la ou se este uso ocorreu pelo fato da geometria requerer o uso simultâneo de pelo menos dois registros: o discursivo e o figural.

Vimos que as autoras da coleção 1, consideram quadrilátero como uma região. Nas observações destinadas ao professor, as autoras chamam a atenção para o seguinte fato: “Existe outra linha teórica que define como polígono apenas a linha poligonal fechada, sem a parte interna, nessa postura, a figura formada pela região interna mais o contorno recebe o nome de região poligonal. Na prática, as duas definições de polígonos são válidas. Além disso, para resolver uma situação prática, em geral, os dados fornecidos definem se se trata apenas do contorno ou da figura completa. Só no caso em que possa haver confusão é que há necessidade de uma explicação sobre a definição que se adota.” (p. 31)

Para o autor da coleção 2, polígono é uma figura fechada plana, delimitada por segmentos de reta, ..., e quadrilátero é um polígono de quatro lados. Não nos fica claro, se esta *figura delimitada por segmentos de reta*, compreende só a fronteira ou também a sua região interna, no entanto, as atividades sugerem que o autor considera a região.

O autor da coleção 3, considera quadrilátero como união de segmentos e é bastante coerente ao falar em áreas, pois chama a atenção para o seguinte fato: “Neste livro, escreveremos de modo simplificado a *área de um polígono,* mas o aluno não deve esquecer que estamos nos referindo à *área da superfície formada pela união do polígono com o seu interior.” (p. 216)*

Encontramos definições não equivalentes para quadrilátero, no entanto, cada autor foi coerente com a definição escolhida. Uma incoerência, seria considerar quadrilátero como a união de segmentos e, mais adiante, falar em área sem ressaltar que esta área é da região interior do quadrilátero.

Suspeitamos que, mesmo que o livro didático atenda as recomendações dos PCN, se o professor não tiver uma formação que lhe permita conhecer os PCN, o livro pode ser utilizado de maneira inadequada, de forma que os objetivos propostos pelos PCN, e esperados pelos autores, não sejam atingidos. Como não investigamos este fato, trata-se apenas de uma hipótese, que pode ser investigada em outras pesquisas.

CAPÍTULO II

II.1 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apoiados num referencial teórico que se baseia principalmente em conceitos da teoria das situações proposta por GUY BROUSSEAU e em conceitos sobre registros de representação semiótica propostos por DUVAL, preparamos uma oficina de formação, composta por situações-problema, conforme sugestão dos PCN, que norteou nosso trabalho com os professores. A oficina foi estruturada em torno dos quadriláteros, por ser um conteúdo geométrico que nos permite explorar vários pontos importantes na geometria como manuseio de régua e compasso, utilização de vários registros de representação, levantamentos de conjeturas, demonstrações, teoremas, reciprocidade de teoremas...

Encaminhamos às escolas públicas de nossa cidade - Cianorte/Pr - um documento[9] convidando professores interessados em participar de um grupo de estudos sobre geometria.

Marcamos um primeiro encontro, para o dia 19/05/01, com os doze professores que entraram em contato conosco. Nesta oportunidade, os professores preencheram um questionário[10] que nos permitiu traçar o perfil do grupo. Ficou estabelecido que os próximos encontros ocorreriam em tardes de sábado, nos meses de maio a agosto de 2001, das 14 às 17 horas.

---

[9] Anexo 1

[10] Anexo 2

Dos doze professores inscritos, dez se propuseram a participar da pesquisa. Por motivos pessoais, três professores não chegaram até o final das atividades.

As atividades foram desenvolvidas em uma das salas da Universidade Estadual de Maringá, no Campus Regional de Cianorte.

Do segundo ao décimo encontro, foram aplicadas as atividades da oficina da seguinte forma: em todo encontro, formávamos uma equipe com os professores presentes mais a pesquisadora, as atividades propostas eram distribuídas e discutidas. Quem quisesse, poderia utilizar a lousa. Ao final das discussões de cada assunto, a pesquisadora realizava a institucionalização. Também conversávamos sobre os diferentes registros de representação utilizados em geometria.

No décimo primeiro encontro, discutimos particularmente, as fases de ação, formulação, validação e institucionalização propostas por Brousseau.

Os encontros foram gravados em vídeo, com exceção do primeiro.

No início do segundo encontro, os professores resolveram no início da aula alguns exercícios sobre geometria[11], cujo resultado serviu apenas para nos orientar quanto à adequação das atividades para os encontros futuros. Concluímos que as atividades selecionadas para a oficina estavam coerentes com os conhecimentos e dificuldades demonstradas pelas respostas dos professores.

Para analisar a participação e o desenvolvimento dos professores participantes da oficina, optamos por estabelecer seis categorias sobre as quais centralizaremos a atenção em nossas observações.

<u>Primeira categoria</u> - dificuldades com relação à geometria

Nossa primeira hipótese é que a oficina irá proporcionar a aquisição ou aprimoramento de conceitos geométricos relativos a quadriláteros. Por esse

[11] Anexo 3

motivo, decidimos observar quais dificuldades com relação à geometria foram reveladas pelo grupo durante as atividades da oficina.

Segunda categoria - aspectos conceituais ou visuais

ALMOULOUD e MELLO afirmam que as modalidades de formação postas em ação nos últimos anos, não têm atingido o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de geometria. Com relação a essa prática, vamos observar se os professores com os quais trabalhamos, trabalham a geometria enfocando seus aspectos conceituais ou apenas, os visuais.

Terceira categoria - situações

Ainda com relação à prática do professor em sala de aula, vamos observar comentários que revelem se em suas aulas, os alunos vivenciam situações com características de ação, formulação, validação ou institucionalização.

Quarta categoria – livros didáticos

Os PCN afirmam que, não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos, os professores apóiam-se quase que exclusivamente nos livros didáticos. Também verificamos que, os autores dos livros que o grupo de professores utiliza em suas aulas, apresentam diferentes definições para trapézios e quadriláteros. Sendo assim, decidimos observar como eles utilizam seus livros didáticos.

Quinta categoria – visão da pesquisa

Considerando a competência de estabelecer vínculos com teorias subjacentes às atividades de aprendizagem, proposta por Perrenoud, vamos observar comentários ou comportamentos que nos revelem a visão que os professores do grupo têm de pesquisa ou de pesquisadores.

Sexta categoria – registros de representação

Finalmente, considerando os estudos de DUVAL, vamos observar como esses professores trabalham com os registros de representação.

II.2 - DESENHO DA OFICINA

Nossa oficina de formação foi desenvolvida em onze encontros com três horas cada um, e composta por onze atividades selecionadas de forma a permitir que o participante vivencie as fases de ação, formulação, validação e institucionalização propostas por BROUSSEAU. Iniciando com atividades que exploram mais os aspectos visuais e aprofundando o grau de complexidade até chegarmos às demonstrações de teoremas. Na maioria das situações propostas, procuramos trabalhar com registros diferentes, contemplando as sugestões de DUVAL.

As atividades foram baseadas em lista de exercícios elaborada e utilizada pelo Dr. Saddo Ag Almouloud em suas aulas para o curso: Geometria plana e espacial na licenciatura especial, na PUC/SP; em atividades apresentadas no livro: Geometria segundo a teoria de Van Hiele, 1998, Projeto Fundão da UFRJ; bem como em situações propostas por HERSHKOWITZ, 1996, no artigo: Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva. Lembramos que parte destas atividades também foram utilizadas no projeto “Estudo de Fenômenos de Ensino-Aprendizagem de Noções Geométricas Pelos Alunos de 5ª a 8ª Séries do Ensino Fundamental” desenvolvido na PUC/SP.

Antes de iniciarmos os estudos sobre o objeto escolhido: *os quadriláteros,* propusemos uma atividade que tem por objetivo inicial, verificar como os autores dos livros adotados pelos professores participantes da pesquisa definem *quadrilátero.* A nossa intenção era provocar uma discussão sobre o papel da *definição* de um objeto matemático no sentido de verificar suas características; como escrever; identificar se um objeto satisfaz ou não uma determinada definição, e finalmente, determinarmos *o que* definiríamos como quadrilátero.

Nos estudos preliminares, vimos que PERRENOUD aponta entre as competências mais específicas ligadas à formação de professor, as seguintes: construir e planificar dispositivos e seqüências didáticas; conceber e gerir situações-problema adequadas aos níveis e possibilidades dos alunos; estabelecer vínculos com as teorias subjacentes às atividades de aprendizagem.

Entendemos que conhecer princípios da Teoria das Situações, contribui para o desenvolvimento das duas primeiras competências citadas, pois proporciona fortes reflexões e subsídios a serem considerados ao se elaborar uma seqüência didática[12] adequada para os alunos.

Um dos nossos objetivos visa a terceira competência citada acima, ou seja, estabelecer vínculos com as teorias subjacentes às atividades de aprendizagem. Para tal, discutiremos com os professores participantes, a fundamentação teórica considerada na seleção das atividades da oficina. Notamos que a necessidade de considerar a teoria e a prática de forma interligada é também defendida por PONTE.

Apresentamos e desenvolvemos com o grupo de professores uma oficina cujas atividades procuram contemplar as situações propostas por BROUSSEAU, destacando a importância da utilização de mais de um registro de representação semiótica segundo as pesquisas de DUVAL. Esperávamos que a oficina viesse a propiciar a aquisição ou aprimoramento de conceitos relativos a quadriláteros e a geometria de um modo geral, tais como: a importância de uma definição, confronto entre definições diferentes, trabalho simultâneo com vários registros, construções geométricas, levantamento de conjeturas, teoremas, demonstrações, utilização de contra-exemplos.

A tabela a seguir, mostra uma série de pontos explorados e, em quais atividades foram trabalhados.

[12] Estamos entendendo por seqüência didática, uma série de atividades elaboradas e desenvolvidas com o intuito levar à construção de um conhecimento específico.

Atividades Tópicos	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**
Aspectos visuais	X	X	X	X							X
Definições	X	X			X						X
Confronto entre definições diferentes	X	X			X						
Propriedades gerais dos quadriláteros		X	X		X						X
Propriedades específicas		X				X	X				X
Conversão de registros			X	X	X			X	X	X	X
Registros diferentes e simultâneos	X	X		X		X	X	X	X	X	X
Construções geométricas					X	X	X	X	X	X	X
Levantamento de conjecturas				X		X	X	X	X	X	X
Validação (demonstração)						X	X	X	X	X	X
Utilização de contra exemplo								X			X
Teorema recíproco							X	X	X		X
Discussão entre o grupo	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Podemos observar que os aspectos visuais foram mais explorados nas primeiras atividades, que envolvem o manuseio de recortes ou observação de desenhos. Os teoremas e as demonstrações são trabalhados nas atividades seguintes.

A discussão em grupo, recomendada pelos PCN, acontece em todas as atividades da oficina, e, além de favorecer as situações de ação e formulação, estabelece entre os participantes um vínculo de cumplicidade que possibilita aos professores conversar sobre os trabalhos por eles realizados na escola. Como vimos, o trabalho em equipe é uma das competências profissionais apontadas por PERRENOUD (1999). CUNHA E KRASILSHIK[13], afirmam que o trabalho em grupo permite que um veja nos outros as mesmas dificuldades que ele tem, segundo as autoras, isto provoca efeitos positivos já que o apoio fornecido pelo grupo fomenta tanto o desenvolvimento cognitivo quanto o afetivo.

A atividade 11 é composta de 5 exercícios cujo objetivo é a consolidação dos conhecimentos discutidos nas atividades anteriores.

[13] http://www.anped.org.br/0812t.htm

Durante o desenvolvimento da oficina, foram previstos seis momentos que visam institucionalizar:

1- definições de trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado,

2- propriedades do trapézio e trapézio isósceles,

3- propriedades do paralelogramo,

4- propriedades do retângulo,

5-propriedades do losango

6- propriedades do quadrado.

Com respeito à notação, utilizaremos letras maiúsculas A, B, C, ... para designar pontos; letras minúsculas a, b, c, ...para designar retas; $\overline{AB}$ para segmento com extremidades nos pontos A e B; AB para medida de $\overline{AB}$; ABC para o triângulo com vértices nos pontos A, B e C; $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$ para o ângulo formado pelas semi-retas S_{AB} e S_{AC} (quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice A, utilizaremos apenas a notação $\hat{A}$). Indicaremos um ângulo e sua medida pelo mesmo símbolo. Finalmente, usaremos o sinal " ≡" para indicar congruência.

II.3 - O GRUPO DE PESQUISA

Dez professores compareceram no primeiro encontro.

De início, explicamos que a formação deste grupo de estudos faz parte dos trabalhos da nossa dissertação de mestrado, cujo tema é formação de professores. Neste grupo, estaríamos então, desenvolvendo uma oficina, composta de uma série de atividades enfocando geometria, mais precisamente, os quadriláteros. Durante a oficina, nós iríamos discutir as teorias que serviram de embasamento teórico para sua elaboração: Guy Brousseau e Raymond Duval. Teríamos então, pelo menos, dois objetivos: a aquisição de alguns conceitos geométricos e a discussão sobre algumas pesquisas realizadas na área de ensino e aprendizado da geometria. Comentamos, de uma forma sucinta as situações de ação, formulação, validação e institucionalização de BROUSSEAU.

Um professor questionou se as atividades que desenvolveríamos neste trabalho eram aplicáveis na sala de aula, ou seja, se eles poderiam aproveitá-las em suas aulas “repassando-as aos alunos”. Informamos que nosso objetivo não era esse, as atividades foram selecionadas pensando na formação de professores e que caberia a eles decidir se as atividades podem ser aproveitadas em sala de aula.

Dissemos que este poderia ser o primeiro passo para a formação de um grupo permanente em que se discutisse, além de conteúdos relacionados à geometria, as pesquisas que são desenvolvidas nesta área.

Os professores disseram que, de fato, sentem necessidade de um grupo para discutir suas dúvidas, seus anseios, seus planos sem que se sintam constrangidos. Uma professora disse:

- *Um terapeuta tem um outro profissional da mesma área, com quem falar, com quem abrir o coração. O professor não tem! Precisamos de um grupo com princípios éticos, pois nós vamos ter que nos expor ao falar sobre nossas dificuldades.*

Neste primeiro encontro, deixamos o grupo bastante livre para discutir o que quisessem para que pudéssemos ter uma idéia das suas características. Conseguimos perceber algumas angústias destes professores. Por exemplo, um professor desabafa:

- *Eu gostaria de informar ao meu aluno, onde se usa cada conteúdo de matemática visto na sala de aula. Para quê ele serve? O aluno pergunta: onde eu vou usar isto? E a gente não tem resposta! Dá a impressão que tem conteúdos que só servem para serem ensinados.*

Discutiram (sem pressa para ir embora) sobre muitos assuntos: uso da calculadora, escolha de livros didáticos, a “síndrome” da sétima série, o medo das experiências novas (por não saberem onde vai dar), a diversidade dos alunos, a falta de disciplina...

Comentaram também sobre palestras que já assistiram. Um professor disse:

- Tem palestra que eu assisto e fico pensando: onde será que esse homem pretende que isso funcione? Esse lugar que ele fala, não é a escola!

Percebemos aqui, o distanciamento entre a pesquisa e a sala de aula, a falta de conhecimentos sobre ela, a falta de relacionamento entre professores e pesquisadores a ponto de imaginar que se fala de mundos diferentes quando se fala da escola.

Ao final do encontro, solicitamos que preenchessem um questionário[14] com algumas informações que nos permitissem traçar um perfil dos participantes da pesquisa.

Este encontro não foi gravado em fita de vídeo, não providenciamos filmadora, pois, não imaginávamos o aparecimento de tantas discussões. Combinamos que nossos próximos encontros aconteceriam aos sábados das 14 às 17 horas, até o início de agosto quando alguns deles iniciariam um outro curso no mesmo horário. Solicitamos aos professores que, para o próximo encontro, trouxessem os livros didáticos que utilizam em suas aulas.

Perfil do grupo

O grupo era constituído por 10 professores, dos quais 2 do sexo masculino e 08 do sexo feminino. Todos com mais de 30 anos, conforme a tabela abaixo.

Com relação ao tempo que lecionam matemática, encontramos a seguinte distribuição:

Faixa etária	
Até 20 anos	0
21 a 30 anos	0
31 a 40 anos	06
41 a 50 anos	03
Mais de 50 anos	01

Tempo de serviço	
Até 2 anos	0
2 a 5 anos	0
6 a 10 anos	04
11 a 20 anos	05
Mais de 20 anos	01

[14] AnexoII

Oito professores têm uma carga horária que varia entre 31 e 40 aulas semanais, um tem 49 e um tem 50 aulas.

Considerando o grau de ensino para os quais lecionam constatamos que, cinco professores lecionam apenas no ensino fundamental, três no fundamental e médio e dois lecionam nos ensinos fundamental, médio e superior.

Com relação ao local de trabalho, cinco trabalham em apenas uma escola, quatro em duas, um professor em quatro ou mais escolas. Cinco professores trabalham apenas em escolas públicas, dois apenas em escolas particulares e três nos dois tipos de escolas.

Com relação à formação acadêmica, constatamos que seis têm licenciatura plena em matemática, um tem licenciatura curta em matemática (plena em ciências) e três são formados em outros cursos. Nove tem pós-graduação (especialização), dos quais quatro têm cursos em matemática e cinco em outras áreas. Seis professores têm participado de cursos nos últimos três anos.

Ao serem questionados se conhecem os Parâmetros Curriculares Nacionais com relação ao tema Geometria, quatro professores disseram não conhecer, quatro afirmaram que conhecem, mas não têm condições de emitir nenhuma opinião sobre eles, dois disseram conhecer e teceram os seguintes comentários:

- *Valorizou muito a geometria, deixando de ser trabalhada como um tópico à parte, devendo ser trabalhada em conjunto com os demais eixos temáticos.*
- *Ótimo. Me esclareceu muitas dúvidas, principalmente ver a geometria com outros olhos.*

CAPÍTULO III

AS ATIVIDADES DA OFICINA

Apresentamos nesse capítulo as atividades que foram desenvolvidas na oficina, juntamente com os objetivos, comentários didáticos e relato dos principais fatos que ocorreram durante o desenvolvimento da mesma.

ATIVIDADE 1 – Definindo quadrilátero

1) Temos sobre a mesa, livros de diversos autores.
Verifique como cada autor define quadrilátero.

2) Que características você acha que deve ter a definição de um conceito?

O objetivo destes dois itens é provocar uma reflexão sobre o papel e as características de uma definição, chamando a atenção para o fato de que autores definem um objeto de maneiras diferentes e não equivalentes, e que a forma como se define este objeto pode trazer conseqüências no desenrolar do estudo a que se propõe.

Relato:

Antes de iniciar, questionamos aos professores o que é um quadrilátero.

OA: - É uma figura que tem quatro lados.

IZ: - E quatro ângulos iguais.

DE: - Nem sempre!

IZ: - Mas a priori seria!

OA: - Vou ler aqui: É a região do plano determinada por quatro segmentos de tal modo que um deles sempre encontra dois outros e não mais que dois.

I: - Será que esta definição apresenta alguma informação a mais que a primeira?

OA: - Com certeza! Eu falei que quadrilátero era uma figura de quatro lados, aqui ele já fala que é uma região do plano, e que um deles sempre encontra dois outros e não mais que dois.

IM: - Aqui[15] ele coloca assim: "Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três a três deles não colineares. Se o segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero."

I: - A primeira definição "figura de quatro lados", pode levar uma pessoa a imaginar que quadrilátero seja uma outra coisa? Quando falamos em "lados" nós pensamos em segmentos de reta, mas está claro que os lados são Segmentos?

SE: - É ... poderia ser curva!

RM: - É ... falar para quem não conhece! Por que nós, que conhecemos, já identificamos. Mas a gente tem que falar para quem não conhece ... será que ele imaginaria?

EO: - Nesse livro[16] diz: "quadrilátero é um polígono de quatro lados".

SE: - Polígono!

DE: - Aqui diz que é um polígono convexo de quatro lados!

I: - O que é um polígono convexo?

[15] IEZZI, 1985 p. 92.
[16] GUELLI, 2001 - quinta serie, p. 215.

AO: - Se você marca dois pontos, esses dois pontos você une por uma reta, tem que estar contido na parte interna do polígono.

Notamos aqui, que a não utilização do quantificador “quaisquer” dois pontos não foi notada pelo grupo. Ninguém questionou “o que” deve estar contido na parte interna do polígono.

Comentamos que alguns autores definem polígono convexo, como um polígono em que a reta que contém qualquer um de seus lados, deixa os outros lados todos em um mesmo semiplano. Eles disseram que nunca tinham visto desta forma e acharam mais fácil de entender.

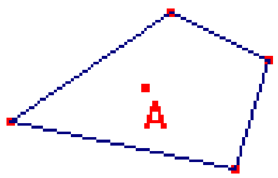
I: - Dentre as definições (de quadriláteros) vistas, vamos considerar como definição I: “região do plano determinada por quatro segmentos de tal modo que um deles sempre encontra dois outros e não mais que dois”, e como definição II: “Sejam A, B, C e D Quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três a três deles não colineares. Se o segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro Segmentos é um quadrilátero.”

Tem alguma diferença entre elas?

OA: - Acho que não!

IM: - Também acho que não!

Esboçamos no quadro o seguinte desenho:



Questionamos se o ponto A pertence ao quadrilátero definido em II.

OA: - Ele está contido na área, mas no quadrilátero não!

Todos concordam.

I: - E ao quadrilátero definido em I?

EO: - Região!

OA: - O quadrilátero da definição II, fica ... digamos ... aberto. É ... tem diferença!

SE: - Isso eu queria entender: definições diferentes!

IZ: - É uma questão de nível, a definição I é para quinta serie, esse outro é para o segundo ou terceiro grau.

SE: - É questão de passar mais informações para ficar uma coisa mais concreta. Uma você vê só ali, a outra você já você já começa a analisar mais coisas.

OA: - Olha esse: ele começa falar para pegar quatro varetas de tamanhos diferentes. Se for assim, quadrilátero é o que a IM leu, mas depois o autor dá a idéia de que é a região, ... subentende-se!

CI: - Aqui ele não dá definição!

I: - Ao optarmos por uma definição, precisamos ter em mente aquilo que queremos explorar futuramente e ficarmos alertas para sermos coerentes com ela.

AS: - Mas se gente colocar só a definição sem mostrar o visual, o aluno não entende nada! O aluno necessita do concreto, do visual. Quando você fala quatro segmentos, o aluno jamais vai jogar quatro segmentos, ele fica alheio ao que você fala . Ele só vai conseguir concretizar a hora que você coloca o desenho no quadro. Detalhando: isso é um segmento, isso é um ponto, isso é um vértice, isso é um ângulo de 90 graus ... Dá uma aula teórica, sem usar giz, o aluno não entende nada!

Notamos aqui, que o professor percebe a necessidade de trabalhar com diferentes registros conforme sugere DUVAL. Alem disso, este comentário é carregado de pistas que identificam posturas do professor diante do aluno, o professor já tem pré-julgado o que o aluno não vai entender. Cabe a dúvida: detalhando, conforme o professor diz, o aluno entenderá? Notamos aqui, pistas indicando que não se permite ao aluno passar por todas as fases da teoria das situações propostas por BROUSSEAU.

Quanto às características de uma definição obtivemos as seguintes respostas:

OA: - A definição tem que ser uma coisa clara, se o aluno lê, ele consegue interpretar, visualizar.

I: - Uma informação que não deixasse dúvidas?

OA: - Ou deixar dúvidas, mas que ele possa sanar sozinho essas dúvidas.

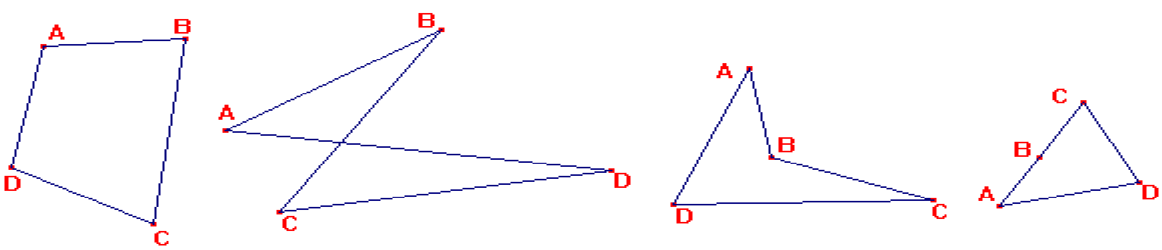
EO: - Não pode ser uma coisa tão difícil que não deixasse dúvidas, se for muito difícil, ele não saberá nem questionar.

AS: - A partir do momento que ele tem dúvidas, é sinal que ele já sabe alguma coisa, se ele não tem dúvidas pode ser que ele não entendeu nada.

OA: - Não pode ser uma coisa muito completa, tudo pronto, mas alguma coisa que desse uma base para ele começar ter condições de visualizar as coisas.

Seguindo as atividades propostas para este encontro, passamos para o terceiro item, cujo objetivo é observar como os participantes consideram uma definição, ou seja, se eles verificam se um objeto satisfaz ou não as condições da definição.

3) Considerando a definição: "Dados quatro pontos A, B, C e D, não colineares três a três, a reunião dos segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$ *chama-se quadrilátero ABCD", assinalar dentre as figuras abaixo, aquelas que representam quadriláteros:*



i	*ii*	*iii*	*iv*
( )	( )	( )	( )

Relato e comentários:

A figura (iv) foi imediatamente excluída, devido ao (aparente) alinhamento dos pontos A, B e C. As dúvidas pairaram em torno da figura (ii).

I: - Qual é o problema com a figura dois?

DE: - É a questão do côncavo e o convexo!

I: - A definição fala alguma coisa sobre isso?

DE: - Não.

AS: - Pela definição que está aí, só a última não é.

CI: - Se você considerar essa figura, onde estas duas retas se interceptam elas formam um quinto ponto, só não está alinhado. Mas não fala nada disso na definição.

IM: - Mas eu não enxergo esse Quinto ponto!

AO: - Eu enxerguei um embaixo outro em cima!

EO: - Se você enxerga esse quinto ponto aí, então tem seis lados!

DE: - Aí não é mais quadrilátero!

I: - Esta figura está ferindo alguma condição da definição?

Todos concordam que não, portanto, trata-se de um quadrilátero (conforme a definição considerada).

DE: - Se você for mostrar só o visual dessa figura[17], sem essa definição, o aluno não vai aceitar que isso é um quadrilátero!

EO: - Ele pode dizer que tem dois triângulos.

I: - E tem mesmo?

OA: - Depende. Pode ser que não!

Notamos que EO não compreendia o que dizia AO. Tomamos então, quatro varetas e montamos um modelo da figura no espaço.

[17] Necessidade de registros diversos

EO: - Nossa! Agora que eu enxerguei assim!

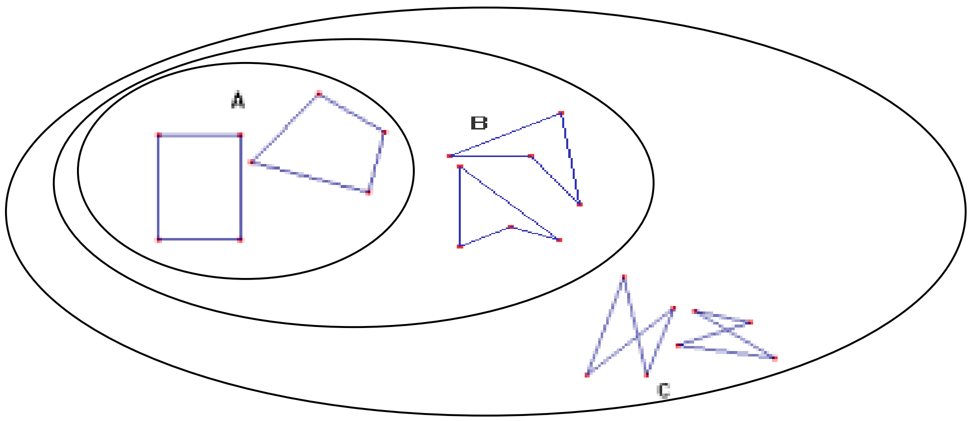
IM: - Veja como as crianças enxergam coisas diferentes!

I: - Esta definição exclui esta figura?

Todos concordam que não, e que se não quisermos considerar esta figura no espaço, devemos acrescentar que os pontos devem ser coplanares.

O quarto item desta atividade, baseado em HERSHKOWITZ, 1996, tem por **objetivos**: a verbalização de definições a partir da figura, ou seja, a mudança de registros de representação; observação da relação de inclusão entre os conjuntos.

4) Considere o desenho abaixo:



4 a) Existe alguma característica comum aos elementos dos três conjuntos? Qual?

4 b) O que diferencia o conjunto C do conjunto B?

4 c) O que diferencia o conjunto B do conjunto A?

4 d) Analise a figura e enuncie uma definição diferente para cada conjunto.

Conjunto A: ____

Conjunto B : ____

Conjunto C: ____

4 e) Quanto vale a soma dos ângulos internos dos elementos destes conjuntos?

5) Vamos enunciar uma definição para quadriláteros?

Relato e comentários:

Observando a atividade, os professores iniciam o seguinte debate:

AS: - Todos são quadriláteros! É isso?

AO: - Depende da definição! (Risos)

CI: - Baseado na definição do exercício anterior, todos são quadriláteros.

I: - Sem pensar em definição de quadrilátero, olhem e vejam o que as figuras têm em comum.

CI: - Todos são formados por segmentos de reta, não existe curva, todas têm os quatro vértices.

AO: - Diferença do C e do B: no C se cruzam, no B não ... será que se cruzam?

IM: - É verdade! Se for no plano sim, se for no espaço não!

CI: - Tem que especificar se está no plano ou não!

I: - Vamos combinar que está no plano!

CI: - Márcia, você está colocando muita coisa na nossa cabeça. Nós vamos começar a duvidar de tudo!

IM: - Já pensou se na sala de aula os alunos gerassem essa discussão? Seria tão mais rico!

EO: - Aqui tem uma grande vantagem: está todo mundo quietinho, concentrado ...

AO: - Então, se está no plano, o C cruza né? Vocês concordam comigo que no C, os lados são paralelos e no B não tem nada de lados paralelos?

IM: - Ninguém garante que são paralelos. Não sei se são paralelos!

AO: - Em A, todos são convexos.

IM: - Será que a gente pode falar assim?

CI: - Muitas vezes, o aluno está tão convencido que todo mundo tem que fazer igual que ele tem medo de colocar com as palavras dele, ou alguma vez ele respondeu com as próprias palavras e alguém cortou!

AS: - E quando você questiona? Ele já passa a mão na borracha e apaga tudo!!

A conversa a seguir, serve para revelar a dificuldade encontrada em registrar verbalmente a idéia de que no conjunto C-B (C menos B), os lados das figuras se cruzam fora do vértice:

CI: - No conjunto C, existem lados que se cruzam.

I: - No conjunto A não tem figuras com lados que se cruzam?

AO: - É, tem.

CI: - Os segmentos se interceptam no seu interior ...

AO: - Se interceptam num ponto que não é o vértice.

IZ: - Não pára no vértice da figura.

CI: - Não é o ponto final, nem o inicial do segmento.

Sobre a inclusão dos conjuntos, observamos a seguinte discussão:

IZ: - Pelo desenho aí, o C não está pegando tudo?

EO: - Gente! Agora que eu entendi o desenho!

CI: - O conjunto A tem todas as definições da nossa resposta para a letra C.

RM: - Olhamos tanto as duas figuras de cada um que esquecemos de ver o todo. O A só tem duas figuras, o B tem quatro, mas nós só olhamos duas. O C tem seis, nós olhamos como duas.

IZ: - É! Nós olhamos tudo separado, agora é que nós estamos vendo diferente.

RM: - Então a definição que demos para o conjunto A está certa, a do B não está mais.

AO: - O conjunto B admite figuras convexas e não convexas. O A só as convexas. O C admite tudo isso.

EO: - Nossa! Quanta coisa para ser analisada!

CI: - Parece uma coisa tão simples né?

EO: - Um dos problemas da sala de aula, é que a gente despeja muita coisa de uma vez só.

RM: - E rápido! Senão eles ficam dispersos, então a gente vai soltando outra coisa ... Eles não param para analisar.

IZ: - E a gente não deixa parar também né! Se parar, a sala cai!

Ao final das discussões, chegaram às seguintes definições:

Conjunto A: “São quadriláteros com quatro segmentos, pontos não colineares 3 a 3 e convexos que se cruzam apenas nos vértices.”

Conjunto B: “Idem ao A, mais os não convexos.”

Conjunto C: “Idem ao A, mais os não convexos e os que se cruzam em um único ponto fora do vértice.”

Um professor comenta:

AO: - Esse “cruzar fora do vértice” não me convenceu! Eu aceito isso aí se for no espaço, mas no plano eu não concordo.

I: - Você não aceita esta figura como quadrilátero?

AO: - É isso!

I: - Mas ainda não decidimos a nossa definição de quadrilátero.

IZ: - É! Ainda não nasceu nosso quadrilátero!

IM: - Nós estamos passando por aquelas fases[18] lá!

I: - Para nos referir a qual destes três conjuntos precisamos fornecer mais informações?

Vários: - Para o C.

I: - Se eu disser: uma figura tem 4 lados. Ela está em qual conjunto?

AO: - Em qualquer um!

I: - Se eu Quiser falar de um elemento do conjunto B?

RM: - Tem que falar que é não convexo.

I: - Não tem figura convexa no conjunto B?

AO: - Tem!

IM: - Tem que falar que tem quatro lados e se cruzam apenas nos vértices.

I: - Se eu quero falar do conjunto A?

IM: - Tem que informar que tem quatro lados, se cruzam só no vértice e são convexos.

SE: - Que coisa! Quanto menor o conjunto, mais informações preciso passar! Tínhamos dito o contrário!

AO: - Mas se eu for levar isto para o lado dos conjuntos numéricos? ... os complexos, os reais... os racionais ... os inteiros até chegar nos naturais! Concordo!

IM: - É verdade! Olha que interessante! Tem que vir especificando até chegar nos naturais!

---

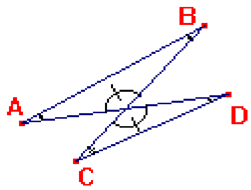
[18] A professora relacionou as atividades com as fases de ação e formulação, comentadas superficialmente no primeiro encontro.

No decorrer desse projeto, pretendemos estudar propriedades dos quadriláteros, referentes a ângulos internos, diagonais, paralelismo e congruência entre lados opostos. Questionamos qual seria o valor da soma dos ângulos internos dos elementos dos conjuntos A, B e C. De imediato, todos concordam que a soma vale 360 graus, pois as figuras podem ser decompostas em dois triângulos. O Professor CI tem dúvidas quanto à justificativa. Vejamos uma parte da discussão:

CI: - Se eu considerar isso como dois triângulos, estou criando um quinto vértice!

I: - Vamos pensar: o que é ângulo interno aqui?

Todos concordam que os ângulos internos são os que estão assinalados na figura abaixo:



I: - Temos então, seis ângulos internos?

CI: - Sim! Quatro lados e seis ângulos internos. (Pela expressão, pudemos notar que o professor estava admirado com esse resultado).

I: - O que é um ângulo interno?

AO: - É o ângulo formado na parte interna da figura.

I: - Formado por dois lados consecutivos. Este ângulo (apontei na figura um dos ângulos formados por $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$) é formado por quais segmentos?

P: - $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

OA: - Não são consecutivos!

I: - Se ângulo interno é formado por lados consecutivos, este ângulo não é interno.

OA: - Vai ser o quê?

EO: - Se falar que isso é quadrilátero, vai confundir a cabeça!

SE: - Desde o começo estou achando isso, é melhor não falar!

AO: - E se tiver no livro e o aluno perguntar?

I: - Você tem que saber argumentar justificando porque você não a considera como quadrilátero. Por exemplo, ela tem propriedades interessantes? Quem são suas diagonais?

CI: - Ela fica sem diagonal porque o triângulo não tem diagonal!

I: - O que é diagonal?

P: - É o segmento que une um vértice a outro não consecutivo.

OA: - Posso unir A com C e B com D.

CI: - Mudou tudo! As diagonais passam a ser lados e os lados, diagonais!

EO: - Nossa! A idéia que temos é que a diagonal é dentro!

CI: - É o conceito que eu tenho de diagonal: sempre é interna.

OA: - Sinceramente: se você pedisse para marcar os ângulos internos, eu, com certeza, marcaria aqueles dois! Na hora! Sem discutir!

CI: - Aí vem a filosofia: nada está pronto, nada está terminado. Tudo tem um questionamento. Por exemplo, nesta questão, eu nunca tinha pensado!

Quanto à forma como o grupo definiria quadrilátero, observamos a seguinte discussão:

OA: - Vamos ver ... região do plano formada por quatro vértices ... mas esse vértice vai delimitar o segmento ou pode ser no meio, igual aquele caso?

CI: - Vai ser o início e o fim do segmento.

AS: - Não é melhor falar quatro pontos?

SE: - Pode ser!

SA: - Quatro pontos sendo três não colineares.

OA: - Região do plano, formada por quatro vértices ...

SA: - Vértice não ! Ponto.

I : - são os pontos que determinam a região?

IZ: - Não, são os segmentos!

OA: - Mas tem que falar que é fechado ...

SE: - Tem que falar que se encontram dois a dois ...

RM: - E se falar quatro pontos A, B, C e D?

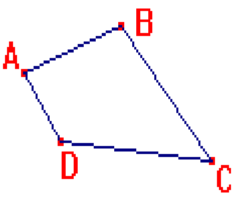
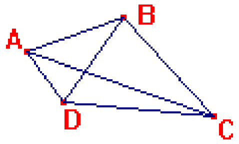
OA: - O lado não é mais importante que o vértice? Acho que se falar segmento fica melhor!

CI: - Acha que segmento tem mais importância que vértice?

OA: - A primeira coisa que me vem à cabeça são os lados!

Depois de muita discussão, sugerimos que olhassem, dentre as definições dos autores dos livros vistos no início da atividade, qual delas, melhor traduzia o que eles queriam chamar de quadrilátero. Optaram pela definição que apresentamos no quadro logo abaixo, com exceção do professor AO, que disse não aceitar "quadrilátero como uma figura vazada, para mim, quadrilátero é uma região!"

Ao final fizemos a institucionalização dos conceitos estudados. O quadro abaixo foi apresentado aos professores em branco, para preenchermos em conjunto.

Enunciado verbal	***Interpretação em linguagem figural***	***Interpretação em linguagem matemática***
Dados quatro pontos A,B, C e D, coplanares e não colineares três a três, a reunião dos segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$ *de tal forma que as únicas interseções de segmentos possíveis, ocorram nos pontos A, B, C ou D, chama-se quadrilátero ABCD.*		*Dados quatro pontos A,B, C e D, não colineares três a três, o quadrilátero ABCD é dado por:* *ABCD=* $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$
A diagonal de um quadrilátero é o segmento que une dois vértices não consecutivos		$\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *são diagonais do quadrilátero ABCD*

Apresentamos agora algumas situações que surgiram no decorrer do desenvolvimento da atividade 1, relacionados com as nossas categorizações:

- Dificuldades com relação à geometria: uso de termos inadequados; dificuldade em expressar verbalmente as características de uma figura; confusão entre propriedades e definições; concepção de que a diagonal de um polígono é sempre interna.
- Aspectos visuais ou conceituais: Supomos que sem suas aulas, esse professores, têm dado maior importância ao aspecto visual da geometria, como se o aluno não tivesse condições de compreender enunciados. Como vimos, uma professora comenta que "o aluno necessita do concreto, do visual. Quando você fala quatro segmentos o aluno jamais vai jogar quatro segmentos, ele fica alheio ao que você fala ..."
- Livro didático: notamos que alguns professores conferem ao livro didático uma autoridade, maior inclusive que as suas próprias, como se não pudessem questionar ou contrariar o que consta no livro. Vamos relembrar o comentário de um professor diante da decisão de que uma figura cujos lados se interceptam fora dos vértices, não seria considerada um quadrilátero: "e se tiver no livro e o aluno perguntar?"

Teoria das situações: podemos observar que, aparentemente o professor tem dificuldade em proporcionar a discussão entre os alunos não permitindo que analisem e cheguem às suas próprias conclusões, o que é fundamental para a teoria das situações. Observamos as seguintes frases "ele (o aluno) só vai conseguir concretizar a hora que você coloca o desenho no quadro detalhando: isso é um segmento, isso é um ponto, isso é um ângulo de 90 graus ..."; "já pensou se na sala de aula, os alunos *gerassem* essa discussão?"; "muitas vezes o aluno está tão convencido que todo mundo tem que fazer igual que tem medo de colocar com as palavras dele ..."; "um dos problemas da sala de aula, é que a gente despeja muita coisa de uma vez só!"; "e rápido, ... eles não param para analisar!"

Registros de representação: Constatamos juntamente com os professores, a grande dificuldade que têm em verbalizar conceitos, ou seja, em utilizar o registro verbal de representação.São claras as dificuldades com a escrita. Nas definições fornecidas para os conjuntos A, B e C, observamos redundância;

palavras soltas (pontos não colineares 3 a 3); falta de clareza: o que se cruza no vértice? Concluímos, que a questão do registro em linguagem escrita realmente precisa ser trabalhada em projetos de formação de professor. As frases seguintes nos levam a supor que os professores sentem necessidade do trabalho com registros diferentes: “se você mostrar só o visual dessa figura, sem essa definição, o aluno não vai aceitar que isso é quadrilátero!”; “mas, se a gente colocar só a definição sem mostrar o visual, o aluno não entende nada!”

Constatamos que os autores de livros didáticos definem quadriláteros de maneiras diferentes e não equivalentes. Cabe ao professor, decidir sobre a definição a optar. Poderíamos ter aproveitado a oportunidade para comentar com os professores que o *saber científico*[19] sofre transformações e adaptações até chegar ao *saber escolar*[20], portanto, um dos critérios para escolher uma das definições, é recorrer ao saber científico. Nos momentos de institucionalização nas atividades com os professores, nos baseamos no livro de João Lucas Marques Barbosa editado pela SBM.

Os professores perceberam, no quarto item da atividade que, considerando a inclusão de conjuntos, quando o conjunto se torna “maior” sua definição inclui menos exigências, é menos restritiva, ao contrário do que imaginavam.

ATIVIDADE 2 – Classificando quadriláteros

Você recebeu uma série de recortes[21] representando diversos quadriláteros.

a) Separe estes quadriláteros em grupos.

b) Quantos grupos você formou?

c) Quais foram os critérios que você considerou?

d) Considerando cada grupo formado é possível, através de outros critérios, uma nova classificação?

[19] Ou *saber sábio*: “é o conjunto de conhecimentos socialmente disponíveis, publicados nas revistas científicas ou apresentados nos meios de comunicação, e reconhecidos como válidos por toda uma comunidade.” (Almouloud,1997, p. 6).

[20] “... é o saber que se encontra nos manuais escolares.” (Id.).

[21] Anexo IV

e) Uma das separações possíveis está representada no anexo 1. Esta separação coincide com a sua?

f) Quais critérios foram observados para se chegar a esta separação?

g) Considerando o anexo 1, cole cada grupo de figuras na parte superior de uma página em branco. Abaixo das figuras registre as propriedades que você observa.

h) Dê nomes a cada grupo de quadriláteros *(paralelogramos, retângulos, quadrados, losangos, trapézios, outros).*

i) Considerando as propriedades que você registrou, defina cada grupo de quadriláteros.

Parte B

Material: páginas (completas) da atividade anterior.

a) O quadrado poderia fazer parte do grupo dos retângulos?

b) O quadrado poderia fazer parte do grupo dos losangos?

c) Qual a sua conclusão?

d) Existe outro grupo do qual o quadrado poderia fazer parte?

e) Como você define trapézio?

Você sabia que são consideradas duas definições para *trapézio*?

Definição I: *Um <u>trapézio</u> é um quadrilátero que tem exatamente um par de lados paralelos.*

Definição II: *Um <u>trapézio</u> é um quadrilátero que tem um par de lados paralelos.*

f) Qual a diferença entre elas?

g) De acordo com a definição I, um quadrado é um trapézio?

h) Um losango é um trapézio?

i) Um retângulo é um trapézio?

j) Um paralelogramo é um trapézio?

k) E de acordo com a definição II?

l) Considere a definição I e represente através de um desenho ou diagrama, a relação entre os grupos de quadriláteros.
m) Idem para a definição II.

PARTE C

Material: páginas (completas) da atividade anterior.

a) Observando as propriedades do quadrado, verifique se todas elas são realmente necessárias para descrever um quadrado. Quais propriedades são redundantes?
b) Anotar as propriedades *suficientes* para descrever um quadrado.
c) Anotar as propriedades *suficientes* para descrever retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.

Objetivos:

- Classificar quadriláteros por meio da aparência física dos recortes em cartolina.
- Observar que alguns quadriláteros têm características em comum.
- Discutir sobre a inclusão de conjuntos de quadriláteros.
- Discutir duas definições de trapézio e verificar as influências de cada uma delas no diagrama que representa a classificação dos quadriláteros.
- Provocar reflexões sobre o fato de que existem propriedades mínimas para descrever cada grupo de quadriláteros.

Considerações didáticas:

Nesta atividade, é importante destacar que os recortes apenas *representam* quadriláteros, ou seja, seus *contornos* têm a forma de quadriláteros. Caso este fato não seja observado, entramos em contradição com os resultados da atividade anterior em que definimos quadrilátero como união de segmentos.

Pretendemos que os participantes cheguem a diversas classificações. Aproveitaremos este momento para ressaltar a importância dos critérios adotados.

Nossa intenção é levar os participantes a refletirem sobre o fato que alguns aspectos (ou propriedades) são comuns a diversos tipos de quadriláteros e isto permite que um conjunto deles possa estar contido em outro. Gostaríamos de explorar a classificação composta por seis conjuntos de quatro recortes cada um, pois ela permite analisar, a princípio, as características específicas de cada conjunto (losangos, quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e quadriláteros quaisquer) e depois as características comuns a vários destes conjuntos. Propusemos então, os itens *e* e *f,* para que os participantes refletissem sobre os critérios que devem ser considerados para se chegar a este tipo de classificação.

Pode ser que os participantes cheguem a esta classificação, sem de fato, considerar critérios relacionados à propriedades das figuras representadas pelos recortes, mas sim por já conhecerem o formato e o nome dos quadriláteros. Portanto, insistimos que o participante registre as propriedades de cada conjunto formado (item *g*).

Como a oficina é dirigida a professores, acreditamos que eles já conheçam os nomes dos quadriláteros solicitados na letra *h*.

No item *i,* nossa intenção é que o participante reflita sobre o fato de que uma definição deve dizer o que é um determinado objeto, ou quais as propriedades que ele deve satisfazer para representar o conjunto ao qual ele pertence. Não esperamos, neste momento, que os participantes apresentem definições perfeitamente formalizadas ou sem redundâncias. Falaremos sobre isto no momento da institucionalização.

Notemos que esta atividade se inicia enfocando os quadriláteros sob um aspecto visual. No entanto, a atividade também permite que o participante inicie uma análise sobre alguns conceitos geométricos – lados, ângulos, diagonais, critérios para classificação – e tenha oportunidade de enunciar definições.

Ao questionarmos se o quadrado poderia fazer parte do grupo dos retângulos, esperávamos ouvir três tipos de respostas:

i) *Não, pois o retângulo tem que ter lados consecutivos não congruentes:* neste caso o participante estaria fazendo confusão com características que um retângulo *pode* ter e o quadrado não, como se o retângulo *tivesse* que ter (lados adjacentes não congruentes).

ii) *Depende de como definimos retângulo*: aqui, o participante estaria refletindo sobre a possibilidade do objeto retângulo, ser definido de formas diferentes.

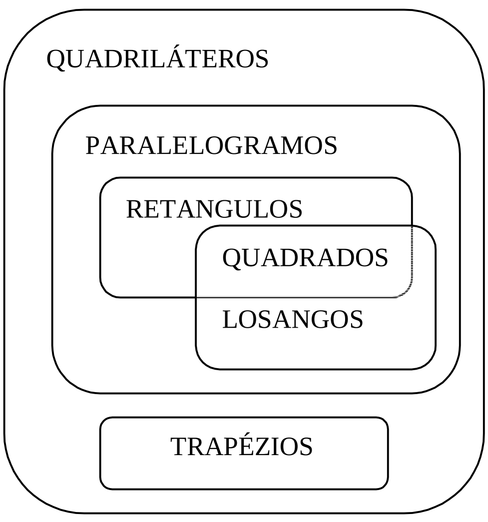
iii) *Sim, pois o quadrado satisfaz a definição de retângulo:* aqui o participante já percebe o conjunto dos quadrados como um subconjunto dos retângulos.

Esperamos reflexões análogas quando questionamos se o quadrado poderia fazer parte do grupo dos losangos.

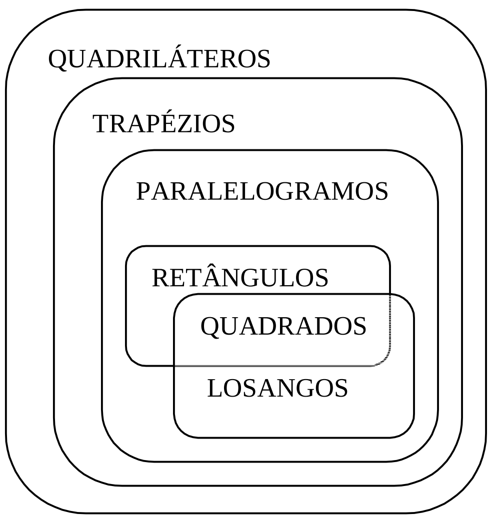
Preparamos os itens seguintes para provocar reflexões sobre as definições de trapézio: as duas definições são equivalentes? Que implicações a escolha de uma delas, pode ocasionar no estudo dos quadriláteros?

Queremos deixar claro que, dependendo da definição considerada, o conjunto dos paralelogramos está contido no conjunto dos trapézios, ou são conjuntos disjuntos, conforme o diagrama abaixo:

Definição I



Definição II



Apresentamos a parte C com o propósito de estimular as primeiras reflexões sobre o fato que uma propriedade pode estar relacionada com outras. Esperamos que o participante perceba, pelo menos as redundâncias mais evidentes: Um quadrado é um quadrilátero, que tem quatro lados congruentes, dois pares de lados paralelos, quatro ângulos iguais e retos ...

Esperamos proporcionar aos participantes, um momento com características das situações de ação e de formulação propostas por Brousseau, em que os participantes procurem de forma experimental, ou seja, tentem construir, por exemplo, quadriláteros com lados congruentes, mas não paralelos dois a dois, quadriláteros com número de ângulos diferentes de quatro, com quatro ângulos iguais e não retos; levantando hipóteses de forma experimental, sempre discutindo com os outros elementos do grupo. Não esperamos ainda, a explicitação de argumentos teóricos que justifiquem a validade das respostas apresentadas.

Relato e comentários:

Os professores receberam os recortes e começaram a classificá-los, sempre com muita discussão. Anotamos alguns comentários:

IZ: - Eu não consigo encaixar essa aqui em lugar nenhum! (Estava falando do único recorte que representava um polígono não convexo)

EO: - E se eu estiver achando que esses lados são paralelos e não forem?

SE: - Vamos medir!

Continuavam separando os recortes.

CI: - Eu acho que a figura mais importante, e que a gente tem que começar por ela, é o paralelogramo. O quadrado é, o losango é, o retângulo é, só o trapézio que foge.

OA: - Eu achei seis grupos!

CI: - É! Separando pelo método tradicional tem seis grupos, mas depende do jeito que você olha. Se for olhar a questão do côncavo ou convexo, tem só dois grupos!

OU: - Encontrei os quadrados, os retângulos, os losangos, os trapézios e os paralelogramos.

OA: - Encontrei sete grupos.

OU: - Só dá sete se eu separar esse aqui. (Falava do não convexo)

Observamos que separavam os grupos, mas não escreviam os critérios. Então questionamos:

I: - Vocês não vão escrever?

OA: - Escrever o quê?

I: - Os critérios!

OA: - Eu olhei o tamanho dos lados, lados iguais, lados paralelos, ângulos retos ...

OU: - Posso ver o formato: se a concavidade for um critério só tem dois grupos!

CI: - Posso separar pelos ângulos: se tem ângulos iguais ou não.

OA: - Posso ver se tem lados opostos paralelos ou não! Tem um monte de jeito!

O professor CI olhando para a separação de outro professor, disse:

CI: - Essa figura aqui (apontou o losango) pode tanto estar aqui, como aqui (apontou para o conjunto dos paralelogramos). Na verdade, ele é as duas coisas!

OU: - Mas eu acho que eles devem ficar em conjuntos diferentes pois não têm a mesma medida.

SA: - É. Esse (losango) cabe aqui (apontou o conjunto dos paralelogramos), mas esse (paralelogramo) não cabe aqui (conjunto dos losangos)!

OA: - Vamos ver os critérios!

CI: - Eu posso ter um grupo só! É! Se o critério for o número de lados, só teremos um conjunto.

I: - E se olharmos a quantidade de lados paralelos?

CI: - Teremos três grupos: os que têm dois pares, os que têm só um e os que não têm lados paralelos. É duro pensar em critérios, a gente que já tem um certo conhecimento. A primeira coisa que fizemos foi jogar quadrado para cá, retângulo pra lá ...

RM: - Para registrar os critérios, depende de como nós estamos no nosso conhecimento. No nosso caso, seria importante escrever.

Comentamos a importância em treinar a escrita, pois neste caso, quando procuramos as palavras que expressam o que utilizamos para separar os recortes, estamos pensando de uma forma mais rigorosa sobre cada um dos objetos representados pelos recortes e em suas propriedades. Os professores comentaram:

IZ: - Eu já observei que em geral, os professores, para dar geometria, ... é mais fácil mostrar a figura que a definição. A maioria peca aí: damos tudo pronto.

CI: - Mas se a gente começar sem o desenho desde cedo, será que eles (os alunos) conseguirão entender?

AO: - Na matemática, às vezes a gente discute tanto que tem que mostrar, mostrar, e mostra quadrado e pega material concreto, leva canudinho, leva figurinha ... e de repente ... o aluno acaba só vendo. É claro que isso é importante, mas a gente acaba dando muita importância para isso aí. A matemática tem um lado abstrato e a gente fica só querendo mostrar aplicação pra tudo! De repente, você fala do quadrado e mostra isso aqui, pronto! Quadrado é isso aqui! (Mostra o recorte).

SA: - O aluno vê mas não pensa no quadrado.

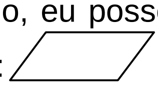
EO: - E se, no lugar de mostrar o quadrado, apresentarmos a definição será que o aluno chega no quadrado?

OU: - É um caminho. Será que dá certo?

I: - Temos que investigar! Não temos receitas. Um caminho é verificar o que se tem estudado a respeito. Duval estuda a questão dos diferentes registros de representação, por que será ele afirma que é importante a utilização de diferentes registros? Vamos ver se conseguimos entender até o final desse trabalho.

Fizeram mais alguns comentários citando os critérios adotados para separar os recortes. Notamos que, de um modo geral, a separação que fizeram coincide com a separação apresentada no anexo a eles fornecido. Passamos a discutir as propriedades de cada grupo.

Notamos uma discussão entre uma dupla de professores que pretendia encontrar uma propriedade do retângulo que não fosse do quadrado:

OU: - Para o retângulo, eu posso colocar lados opostos de mesma medida. Só que essa figura:  também tem e não é um retângulo ...

SE: - O quadrado também!

OU: - Eu quero escrever que, no retângulo, um par de lados pode ser maior que o outro par. Mas se eu falar assim, posso cair em outras figuras!

Pediram ajuda ao restante da turma:

OU: - Eu tenho que achar uma característica que define que eu vou ter, pelo menos, dois lados maiores. Eu não sei escrever isso. Mas que tem que colocar tem! Como eu vou falar da diferença do retângulo para o quadrado?

OA: - Fala em lados opostos de medidas diferentes!

OU: - Mas aí cai no trapézio!

OA: - Dois pares de lados com medidas iguais.

OU: - Cai no quadrado!

OA: - Não! Diferentes.

OU: - Cai no paralelogramo!

OA: - ... um quadrilátero com quatro ângulos retos, dois pares de lados paralelos com medidas diferentes ...

OU: - Mas aí é o paralelogramo!

OA: - Não! ... e os ângulos retos? Já descartei o paralelogramo!

OU: - É! ... mas ainda não me convenci!

RM: - Para quadrado, você fala: quatro lados iguais paralelos dois a dois. Para o retângulo: quatro lados paralelos dois a dois. Não diz "iguais". O que diferencia aí é a palavra "iguais"! ... e os quatro ângulos retos.

OU: - Retângulo ficaria: dois pares de lados paralelos dois a dois e quatro ângulos retos ... mas aí, podem ser iguais e cair no quadrado!

SA: - Ah! Você quer dizer alguma coisa para definir o retângulo? Se ficar assim, pode cair no quadrado e você não quer que caia no quadrado!

RM: - Mas o retângulo pode ter essa forma comum que nós conhecemos, e, pode também ter a forma de um quadrado. Só que do jeito que definimos, não podemos afirmar que é um quadrado. Ele pode até ter a forma do quadrado, mas, afirmar isso, eu não posso!

OU: - Mas quadrado é um retângulo. Mas simplesmente retângulo não é quadrado!

RM: - Por isso que o retângulo tem que ser dessa forma!

AS: - Mas ela quer escrever um "negócio" que é um retângulo. Assim define quadrado.

OU: - Deixa, vamos ver se mais pra frente a gente acha solução pra isso!

I: - Essa atividade é para definir ou escrever propriedades observadas?

OA: - Escrever propriedades.

RM: - Mas essas propriedades vão, futuramente, servir para definir.

Notamos que os professores estavam misturando duas atividades, a de descrever propriedades e a de definir cada um dos conjuntos obtidos na separação dos recortes. Decidimos institucionalizar as propriedades na lousa. Os professores estranharam a forma como ordenamos os conjuntos (ver tabela a seguir), disseram que tinham feito o contrário, começando pelo quadrado. Observamos os seguintes comentários:

OA: - Quatro lados? Eu não coloquei essa propriedade em nenhum! Gozado né, A gente fica inventando um monte de coisas e não vê o mais simples!

SA: - A propriedade desse conjunto (apontou para o que chamamos de quadriláteros quaisquer) é que é formado por figuras irregulares.

OA: - O que você entende por irregular?

CI: - Eu acho que se a figura tem alguma propriedade, ela deixa de ser regular.

OA: - É regular quando tem lados iguais e ângulos iguais. Aí só o quadrado é regular! Vamos ver os lados paralelos?

CI: - Esse aqui tem um par de lados paralelos (apontou para os trapézios).

I: - (Apontando para os conjuntos da direita) E essas figuras têm um par de lados paralelos?

IZ: - Dois!

I: - Quem tem dois, tem um ou não?

OU: - Tem! Tem um.

OA: - Ah! ... então o trapézio ...

Anotamos na tabela da lousa, os conjuntos cujas figuras apresentavam lados paralelos, um par de lados paralelos e os que apresentavam dois pares. Sugerimos que olhássemos os lados opostos.

CI: - Partindo do paralelogramo, todos têm lados opostos iguais ... e ângulos opostos também!

Na lousa, escrevemos lados opostos congruentes.

OA: - Por que você não escreveu “iguais” como falamos?

Explicamos que, no nosso entender, igualdade é uma relação entre números. Quando falamos em lados e ângulos a relação é de congruência.

CI: - Voltando no começo, eu não poderia colocar que o quadrado tem quatro lados iguais, no lugar de escrever quatro lados só?

I: - Poderia. É que estávamos olhando no início, a quantidade de lados, agora a propriedade observada é a congruência entre eles. Mas nós já vamos resolver isso!

IZ: - Olha o que está acontecendo: agora estamos olhando todos, no geral. Quando fizemos sozinhos, olhamos um por um! Nossas anotações ficaram diferentes!

CI: - Na verdade, está numa ordem ali, que o primeiro já não tem mais propriedades pra anotar, o segundo também já acabou. As propriedades vão aumentando no final.

IZ: - É! Nós fizemos na ordem contrária.

OA: - É mesmo! Olha só: eu comecei pelo quadrado!

CI: - O duro, é que a gente viu na aula passada aquela questão que quanto mais informações, mais restrito é o conjunto. Lembra: os reais, os racionais ...

I: - Vocês fizeram o contrário, significa que está errado ou que perdemos tempo? A aula de hoje teria o mesmo valor se apresentássemos a vocês a tabela já pronta?

EO: - De jeito nenhum!

OA: - Não mesmo!

I: - O que nós queremos, é mostrar uma forma de trabalhar a geometria de modo que o aluno tenha uma participação mais intensa. Poderíamos começar pela tabela no quadro. Qual é a forma correta de trabalhar, não é o que queremos provar. Nossa intenção, é apenas mostrar como propiciar ao aluno, a passagem por uma fase em que ele venha a agir sobre o tópico em estudo.

A tabela construída na lousa é representada abaixo.

Quadriláteros Quaisquer	Trapézios	Paralelogramo	Retângulo	Losango	Quadrado
4 lados 4 ângulos	-4 lados -4 ângulos -lados paralelos -1par de lados paralelos	4 lados 4 ângulos lados paralelos 2 pares de lados paralelos lados opostos congruentes -ângulos opostos congruentes	4 lados 4 ângulos lados paralelos 2 pares de lados paralelos lados opostos congruentes -ângulos opostos congruentes -4 ângulos retos	4 lados 4 ângulos lados paralelos 2 pares de lados paralelos lados opostos congruentes -ângulos opostos congruentes -lados congruentes	4 lados 4 ângulos lados paralelos 2 pares de lados paralelos lados opostos congruentes -ângulos opostos congruentes -4 ângulos retos -lados congruentes

Quanto à redundância das propriedades anotadas na tabela, anotamos alguns comentários:

IZ: - Tem jeito de ter quatro lados e não ter quatro ângulos?

CI: - Não!

EO: - Eu bem que pensei nisso!

RM: - Eu nem tinha colocado, mas, como você colocou na tabela, eu também copiei!

OA: - No retângulo, se eu falo que tem quatro ângulos retos eu não preciso falar que os ângulos opostos são congruentes!

RM: - Se os lados opostos são paralelos também acho que os ângulos têm que ser congruentes.

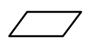
Depois de discutirem, chegaram a seguinte tabela:

Quadriláteros Quaisquer	Trapézios	Paralelogramo	Retângulo	Losango	Quadrado
4 lados	-4 lados -1par de lados paralelos	-4 lados -2 pares de lados paralelos	-4 lados -2 pares de lados paralelos - 4 ângulos retos	-4 lados -2 pares de lados paralelos -lados congruentes	-4 lados -2 pares de lados paralelos - 4 ângulos retos -lados congruentes

A professora que procurava identificar uma propriedade que os retângulos têm mas que os quadrados não têm, comentou (depois que a tabela ficou pronta):

OU: - Então, eu tenho que fazer o contrário ... eu tenho que ver o que o quadrado tem que ter e o retângulo não precisa!

Cada grupo de quadriláteros foi definido de acordo com as propriedades anotadas na tabela acima. Concordaram que o quadrado pode fazer parte do grupo do losango e do retângulo.

Quanto às definições de trapézio, os professores concordaram que a diferença entre elas é estabelecida pela palavra "exatamente", mas alguns não conseguiam explicar o significado dessa diferença. Perguntamos se a figura:  representa um trapézio:

IZ: - Um par de lados paralelos ela tem, mas na verdade tem dois!

OA: - Se tem dois, tem um. Mas não "exatamente" um!

CI: - (Toma um livro e lê a definição) "Quadrilátero que tem um par de lados paralelos."

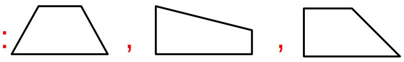
IZ: - Por essa definição todos os outros são trapézios.

EO: - E agora? O autor está errado?

I: - Não! Está errado quem adota essa definição e exclui os outros quadriláteros (os paralelogramos).

OA: - Mas, se o aluno perguntar pra você se quadrado é trapézio ou não, você vai falar o quê? Assume a teoria do autor do livro?

I: - Tem que ficar claro qual a definição que foi adotada.

RM: - Será que o autor falou isso sem perceber, ou ele queria mesmo dizer que paralelogramo é trapézio? Porque pra nós, paralelogramo não é trapézio. Quando os livros se referem a trapézios, não se vê desenhados paralelogramos, as figuras são sempre essas: 

I: - E nós damos mais atenção à figura que ao enunciado, não é?

EO: - (Tomando um outro livro) Esse aqui fala: um único par de lados!

CI: - Pensando bem, se a gente calcular a área do quadrado pela formula da área do trapézio, dá o mesmo resultado!

OA: - Mas aí a base maior tem o mesmo tamanho da base menor, se bem que ninguém fala que não pode ter!

CI: - Olha, ele não diz “único” mas tem um exercício aqui (aponta o livro que tinha pego anteriormente) para assinalar os trapézios entre várias figuras, e na resposta do livro ele só marca os tradicionais!

RM: - Mas é isso o que eu digo, ele escreveu uma coisa, mas quis que ali nas entrelinhas, tivesse claro o “exatamente”, o “apenas um” ... E nós vamos interpretar ao pé da letra? E se não era o que o autor queria dizer?

OU: - A gente gravou aquele modelo de trapézio, exatamente em função disso aí ... está escrito uma coisa, mas as figuras são sempre as mesmas.

I: - Estão percebendo a importância de trabalhar analisando registros diferentes?

As situações relacionadas com nossas categorias, que observamos nessa atividade são representadas abaixo.

- Dificuldades com relação à geometria: constatamos as seguintes: escrever os critérios utilizados para separar os recortes em grupo; uma professora tentava encontrar uma propriedade do retângulo que não fosse do quadrado, apesar de concordar que todo quadrado é um retângulo.

- Aspectos visuais ou conceituais: os professores ainda, dão mais ênfase ao aspecto visual (“é mais fácil mostrar a figura que a definição”) porém, alguns já começam a refletir sobre isso: “Na matemática, às vezes a gente discute tanto que tem que mostrar, mostrar, e mostra quadrado e pega material concreto, leva canudinho, leva figurinha ... e de repente ... o aluno acaba só vendo. É claro que isso é importante, mas a gente acaba dando muita importância para isso aí. A matemática tem um lado abstrato e a gente fica só querendo mostrar aplicação pra tudo! De repente, você fala do quadrado e mostra isso aqui, pronto! Quadrado é isso aqui! (Mostra o recorte)"; "A gente gravou aquele modelo de trapézio, exatamente em função disso aí .... está escrito uma coisa, mas as figuras são sempre as mesmas."

- Livro didático: os comentários seguintes confirmam o que observamos na atividade anterior, "Mas se o aluno perguntar se quadrado é trapézio. Você vai falar o quê? Assume a teoria do autor do livro?"; "Será que o autor falou isso sem perceber, ou ele queria mesmo dizer que paralelogramo é trapézio? ... e se ele escreveu uma coisa, mas quis que ali, nas entrelinhas, tivesse claro o *exatamente*, o *apenas um* ... E nós vamos interpretar ao pé da letra?"

- Teoria das situações: os professores começam a perceber que a forma como trabalham, não condiz com a proposta de Brosseau: "A maioria dos professores peca aí: damos tudo pronto!"

- Registros de representação: surgem os primeiros questionamentos sobre a forma de registrar: "Se a gente começar sem o desenho desde cedo, será que eles (os alunos) vão entender?"; "E se, no lugar de mostrar o quadrado, apresentarmos a definição, será que o aluno chega no quadrado?"

ATIVIDADE 3 – convertendo registros

Parte A: Represente por um quadrilátero cada enunciado abaixo:

1- O objeto tem quatro ângulos.
Pelo menos um ângulo não é reto.
Pelo menos um lado é paralelo ao seu lado oposto
Lados opostos congruentes.

2- O objeto tem quatro lados.
Os ângulos opostos são iguais.
Os quatro lados são congruentes.
Pelo menos um ângulo é reto.

3- O objeto tem quatro ângulos.
Pelo menos um ângulo não é reto.
Os lados são congruentes.

4- O objeto tem quatro lados.
Somente um par de seus lados são paralelos
Dois de seus ângulos são retos.

Parte B: Construa um desenho com quadriláteros e redija uma mensagem de forma que uma outra pessoa possa construir o mesmo desenho.

Objetivos:

- Identificar quadriláteros a partir das propriedades específicas,
- mudar informações registradas na forma verbal para um registro figural e vice-versa.

Considerações didáticas:

Apresentamos a parte A dessa atividade na forma discursiva para que o participante a interprete e construa um desenho representando a figura que satisfaz as propriedades fornecidas. Na parte B, solicitamos o contrário.

Acreditamos que os professores encontrarão mais dificuldades na parte B, já que não é habitual este tipo de conversão.

Pretendemos aproveitar esta atividade para comentar sobre as pesquisas de DUVAL, destacando a importância da utilização de diversos registros de representação semiótica.

Como já vimos, a institucionalização é uma das situações enfocadas por BROUSSEAU. Aqui, procuramos formalizar as definições das famílias de quadriláteros.

Utilizamos três formas de registros de representação semiótica: enunciado verbal ou forma discursiva da definição, a representação figural e, por último, o que chamamos de linguagem matemática que é um registro em que utilizamos símbolos e notações matemáticas. Aproveitamos a oportunidade para comentar a necessidade de estabelecer o significado de cada notação e que nem sempre todos os autores utilizam as mesmas notações.

Relato e comentários:

Os professores apresentaram desenhos representando figuras que satisfazem as propriedades solicitadas sem dificuldades.

Pediram para pensar em casa sobre a parte B desta atividade. No encontro seguinte, apenas a professora DE trouxe uma "receita" como ela mesma chamou.

DE: - A minha preocupação, não era fazer o desenho. Era como escrever a receita. Ficou assim: Dada uma circunferência com 6cm de raio, dividida em 8 partes iguais. Marque 2,5 cm do centro para a periferia em todas as linhas divisórias. Una os pontos marcados às extremidades formando hastes quadriláteros. Depois ligue as pontas das hastes aos pontos médios formando quadriláteros.

AS: - Já pensou se cada um apresentar um desenho diferente!

DE: - Por isso eu não queria mostrar a receita ainda, eu preciso de mais tempo pra pensar nela!

Aproveitamos a ocasião para ressaltar a importância desse tipo de atividade: o pensar sobre o objeto.

Os professores consideram a “receita um tanto complexa” e pediram para construir o desenho em casa. No entanto, não apresentaram nenhum desenho nos encontros que se seguiram.

Entregamos aos professores uma tabela na qual anotaríamos as definições de cada um dos grupos de quadriláteros que havíamos analisado até então. Explicamos que esta é a fase que Brousseau chama de institucionalização e que, registraríamos os resultados de três formas: o enunciado verbal, a linguagem figural e a linguagem matemática.

Seguimos completando a tabela. Anotamos algumas discussões:

SA: - Aqui no trapézio eu ainda vou desenhar o tradicional. Eu ainda estou tentando aceitar que aquilo ali (aponta um retângulo) é um trapézio!

OA: - É mesmo! A gente tem que mudar alguns conceitos!

OU: - É difícil no começo, mas depois a gente acaba aceitando!

Comentaram que, para a linguagem verbal, nem precisavam usar “nomes” para os vértices ou lados, mas que na linguagem matemática, precisam usar esse recurso, pois como falariam, por exemplo, em lados paralelos, usando símbolos matemáticos, sem atribuir nomes aos lados?

Um professor que teve alunos participando de uma olimpíada de matemática, comenta que algumas atividades eram “muito difíceis de ler, pelo fato de não estarem habituados com os símbolos e a linguagem matemática”.

CI: - Na linguagem matemática, do paralelogramo para o trapézio, basta tirar o “ou” e colocar o “e”!

OU: - ... o “ou” dá margem pra ser ou não, as duas coisas, mas o “e” tem que ser as duas coisas!

OA: - O retângulo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos, só que tem os ângulos retos.

CI: - Basta falar que é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos!

SA: - E a linguagem matemática?

OA: - Ângulo A = ângulo B = ângulo C = 90.

IM: - Também pode escrever lado $\overline{AB}$ perpendicular ao lado $\overline{BC}$ ...

CI: - É melhor falar assim, senão vai ter que falar em medida de ângulos ...

OU: - Como é o símbolo de perpendicular mesmo?

IM: - É um “tesinho” de ponta cabeça!

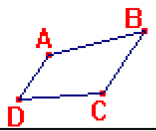
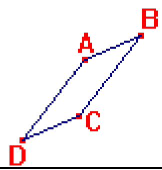
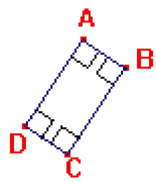
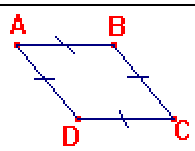
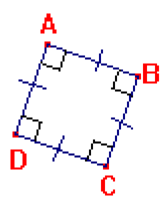
As discussões seguiram girando em torno das notações:

SA: - Para congruência, uma hora usa ≡, outra hora usa ≅.

OU: - Mas isso muda? Eu achei que fosse padrão!

OA: - Muda!!

A tabela foi preenchida conforme é apresentada a seguir.

Quadrilátero	Enunciado verbal	Linguagem figural	Linguagem matemática
Trapézio	Um trapézio é um quadrilátero que tem um par de lados paralelos.		O quadrilátero ABCD é um trapézio se $\overline{AB} // \overline{CD}$ ou $\overline{AD} // \overline{BC}$
Paralelogramo	Paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.		O quadrilátero ABCD é um paralelogramo se $\overline{AB} // \overline{CD}$ E $\overline{AD} // \overline{BC}$
Retângulo	Retângulo é um quadrilátero que possui todos os ângulos retos.		O quadrilátero ABCD é um retângulo se $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BC} \perp \overline{CD},$ $\overline{CD} \perp \overline{DA}$ e $\overline{DA} \perp \overline{AB}$
Losango	Losango é um quadrilátero que possui todos os lados congruentes.		O quadrilátero ABCD é losango se AB=BC=CD=DA
Quadrado	Quadrado é um quadrilátero que tem todos os ângulos retos e todos os lados congruentes.		O quadrilátero ABCD é quadrado se $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BC} \perp \overline{CD},$ $\overline{CD} \perp \overline{DA}$ e $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ e AB=BC=CD=DA

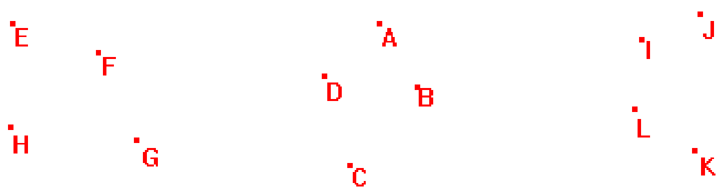
Com relação à nossa categorização, apresentamos abaixo o que observamos nessa atividade.

- Dificuldades com relação à geometria: os professores afirmaram que, para aceitar o retângulo como um trapézio, precisam "mudar alguns conceitos"; notamos que determinados professores não tinham se dado conta que as notações utilizadas em geometria podem ser empregadas em diferentes situações.
- Aspectos visuais ou conceituais: mesmo considerando a definição que considera o paralelogramo como um trapézio, a professora diz: "... eu ainda vou desenhar o tradicional. Eu ainda estou tentando aceitar que aquilo ali (retângulo) é um trapézio!".
- Registros de representação: os professores disseram que os alunos não estão acostumados com os símbolos e a linguagem matemática; comentaram que consideraram a atividade "diferente porque primeiro vem o registro pra você pensar e depois, fazer o desenho"; uma professora comentou que sua preocupação não era fazer o desenho e sim, "como escrever a receita!" Reforçamos que Duval considera importante o trabalho com registros diferentes, pois fornece condições para que o indivíduo diferencie o objeto em estudo da sua representação.

Prevíamos que os professores tivessem mais dificuldades na parte B dessa atividade. De fato, este item despertou pouco interesse, tanto que apenas uma professora trouxe um desenho[22] acompanhado das instruções para construí-lo.

ATIVIDADE 4

Considerar os três seguintes grupos de quatro pontos:



[22] Anexo V.

a) Criar os desenhos ABCD, EFHG, IJKL.

b) Estes desenhos representam quadriláteros?

c) Qual a diferença entre os desenhos ABCD, IJKL e EFHG? O que se pode dizer de ABCD e CDAB?

d) Existem outras maneiras de designar os quadriláteros ABCD e IJKL? Quais?

e) Quais são os lados e os vértices dos quadriláteros ABCD e IJKL? Indique seus ângulos.

f) Quais são as diagonais de ABCD? E de IJKL?

g) Quanto vale a soma dos ângulos internos de um quadrilátero?

Objetivos:

- Familiarizar com a linguagem matemática utilizada para designar um quadrilátero, lados e ângulos.
- Relacionar a designação do polígono com a posição dos vértices.
- Observar as várias formas de designar um polígono.
- Refletir sobre uma forma de calcular a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Considerações didáticas:

Nesta atividade, procuramos provocar reflexões sobre a forma de notação de um quadrilátero considerando os pontos que representam os vértices.

No desenho EFHG a ordem alfabética de H e G está invertida, de forma que os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ tenham um ponto de intersecção. Assim, pretendemos que o participante compare o desenho formado com a definição considerada, e conclua que este desenho não representa um quadrilátero.

Objetivamos também, trabalhar a conversão entre o registro figural e a notação algébrica de um quadrilátero; identificar e denotar algebricamente lados, ângulos, vértices e diagonais.

No item f, queremos observar o que os participantes discutem em termos de valor e justificativas sobre a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

Como já houve uma discussão sobre ângulos internos na atividade 1, esperamos que os participantes não tenham dificuldades em responder que a soma vale 360º.

É necessário que o participante já tenha tido contato com a notação algébrica partindo dos vértices, o que já foi feito no momento em que definimos quadriláteros. Nosso maior objetivo agora, é a familiarização com a notação.

Solução possível:

b) De acordo com a definição que estamos considerando, apenas os dois últimos.

c) EFHG representa um polígono não convexo, enquanto ABCD e IJKL representam polígonos convexos. São duas formas diferentes de representar o mesmo quadrilátero.

d) Sim, BCDA, CDAB, DABC e JKLI, KLIJ, LIJK.

e) No quadrilátero ABCD os lados são: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$; em IJKL os lados são IJ, JK, KL e IL.

f) Em ABCD, as diagonais são AC e BD; em IJKL, as diagonais são $\overline{IK}$ e $\overline{JL}$.

g) Vale 360º, basta verificar que podemos dividi-lo em dois triângulos justapostos.

Relato e comentários:

No desenvolvimento dessa atividade, observamos comentários como:

SE: - Precisa seguir a ordem dos pontos?

RM: - Acho que precisa!

DE: - Tem que fechar?

SE: - Eu fechei, mas não está dizendo onde fecha. Está dizendo para considerar os pontos. Não diz se fecha ou não!

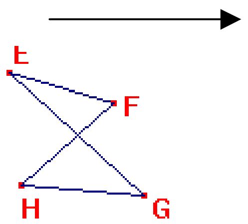
AS: - Como estamos trabalhando com quadriláteros, eu fechei!

SE: - Mas leia o item b: esses desenhos representam quadriláteros? É uma pergunta!

Orientamos que fossem coerentes com a notação utilizada na definição do quadrilátero ABCD, quando fechamos o desenho.

Para decidir se os desenhos representavam ou não, um quadrilátero, ouvimos a seguinte discussão:

RM: - Esse primeiro é aquele de outro dia! Se eu pegar o E e puxar pra cá, ele será um quadrilátero.



OU: - Ma se tem quatro lados é quadrilátero!

SE: - Olha, tudo depende da definição. Nós já definimos quadrilátero!

IZ: - Pela nossa definição, esse primeiro não é!

IM: - Na definição que nós adotamos, não está exigindo que os pontos sejam coplanares. Então, se esses pontos estiverem no espaço, isso também é quadrilátero!

IZ: - Mas nós combinamos que seria no plano! Eu anotei aqui!

Sobre as figuras ABCD e CDAB, concluíram que representam o mesmo quadrilátero.

Sobre a notação dos ângulos, concordaram que podem denotar de várias formas, por exemplo, o ângulo A pode ser representado por Â, por DÂB ou BÂD.

Sobre as diagonais, ouvimos:

OU: - O que é diagonal mesmo?
CI: - Une dois vértices não consecutivos.
OA: - E se eu falar opostos?
RM: - No caso de quadriláteros, não tem problemas, mas, se for outro polígono...

Justificaram que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º pois pode ser “dividido” em dois triângulos justapostos.

Considerando nossa categorização, esta atividade não revelou alguma dificuldade que os professores pudessem sentir em relação à geometria. No decorrer do seu desenvolvimento, observamos momentos característicos da situação de formulação já que os professores trocaram idéias, comparando suas interpretações sobre o enunciado da atividade e a definição de quadrilátero que estamos considerando. Os professores procuram relacionar o registro na forma escrita com a forma figural e a notação algébrica de um quadrilátero.

ATIVIDADE 5

a) Construir um quadrilátero LMNO cujos lados $\overline{LM}$ e $\overline{NO}$ são paralelos.
b) Podemos afirmar que LMNO é um paralelogramo? Por quê?
c) Podemos afirmar que LMNO é um retângulo? Por quê?
d) Podemos afirmar que LMNO é um trapézio? Qual definição de trapézio você considerou?
e) Se você considerar a outra definição, podemos afirmar que LMNO é um trapézio?

OBS: Segundo LUCIA TINOCO (1999) “O fato de não haver vantagens nem desvantagens claras para adotar uma ou outra definição de trapézio é que faz com que não haja consenso entre os autores em relação a nenhuma das duas.” (p. 62)

Vamos considerar de agora em diante, a definição II porque nos permite incluir o paralelogramo na classe dos trapézios.

a) Que lados do trapézio você escolheria para chamar de base?
b) Defina e construa um trapézio isósceles.
c) Construa um trapézio LMNO retângulo. Explique sua construção.

Objetivos:

- Propiciar ao participante a oportunidade de construir, de forma livre (porém com certo rigor), um desenho que represente um quadrilátero com um par de lados paralelos.
- Constatar que este desenho não representa necessariamente, um paralelogramo.
- Identificar um trapézio.
- Confrontar, novamente, as duas definições de trapézio.
- Familiarização com trapézios isósceles e retângulo.
- Utilizar a linguagem natural escrita, para descrever os passos da construção geométrica de um trapézio retângulo.

Considerações didáticas:

Para o desenvolvimento desta atividade, o participante precisa conhecer as notações utilizadas para representar quadriláteros e seus lados, bem como conhecer as definições de paralelogramo, retângulo e trapézio. Tudo isso já foi discutido nas atividades anteriores.

Solicitamos que o participante construa o quadrilátero LMNO com $\overline{LM}$ e $\overline{NO}$ paralelos, mas não fornecemos uma "receita" para essa construção. Esperamos com isto, que o participante crie um caminho para traçar o desenho solicitado; agindo e discutindo com outros participantes do grupo. Esperamos que utilizem régua, esquadro, compasso.

A elaboração de caminhos ou criação de estratégias, o trabalho experimental da construção com régua e compasso de forma que o participante julgue o resultado dos seus procedimentos são características da situação de ação.

Pode acontecer que um participante apresente um desenho com dois pares de lados paralelos, o que não contradiz a condição solicitada. Neste momento, podemos provocar uma discussão sobre a característica que o desenho deve satisfazer para atender a condição imposta e característica de alguns casos particulares.

O trabalho em grupo, a troca de informações e mensagens com uma ou várias pessoas envolvidas na atividade, são características das situações de formulação.

Ao questionarmos se podemos afirmar que o desenho obtido é um paralelogramo, esperamos que concluam que não, apesar do paralelogramo ser um caso particular da situação solicitada.

Esperamos também, que se discuta o fato de que, como o conjunto dos retângulos é subconjunto dos paralelogramos, não podermos afirmar que o desenho representa um retângulo.

No item d, queremos que o grupo confronte novamente as duas definições de trapézio e conclua que, se a definição considerada for a primeira, que exige *apenas* um par de lados paralelos, então não podemos afirmar que o desenho representa um trapézio, já que a condição solicitada é um desenho com $\overline{LM}$ e $\overline{NO}$ paralelos, não tendo nenhuma exigência quanto ao outro par de lados. No entanto, se considerarmos a segunda definição, que exige um par de lados paralelos então o desenho solicitado a satisfaz, portanto é um trapézio.

Aproveitamos esta atividade para esclarecer que, no decorrer da oficina, estaremos considerando a segunda definição, pois, esta permite a inclusão do conjunto dos paralelogramos no conjunto dos trapézios.

No item f, pretendemos discutir que poderíamos escolher para base qualquer um dos lados, no entanto os autores escolhem os lados paralelos. Qual seria a justificativa para esta escolha? Esperamos concluir que uma vantagem desta escolha é o fato de a distância entre estes dois lados ser constante, o que facilita definir a altura do paralelogramo.

Com o item g, esperamos que o participante reflita sobre uma forma de definir trapézio isósceles, podendo inclusive recorrer aos livros didáticos para verificar como os autores definem. Tendo definido, é preciso refletir sobre os passos para construir um desenho que represente este objeto.

No item g, não solicitamos a definição, esperamos que o participante perceba a necessidade de definir antes de construir. Ao solicitarmos uma explicação sobre a construção, queremos explorar o registro desta construção na forma discursiva, pois isto levará o participante a pensar mais no objeto que está sendo representado pelo desenho que construiu.

Possível solução:

b) Não, porque um paralelogramo tem dois pares de lados paralelos, e o quadrilátero construído pode ter apenas um.
c) Não, porque nada garante que seus ângulos sejam retos.
d) Sim, se considerarmos a definição II que exige um par de lados paralelos.
e) Não podemos afirmar, pois a definição I exige que o quadrilátero tenha exatamente um par de lados paralelos e por construção, podemos ter dois.
f) Os lados paralelos, pois assim a altura é constante.
g) Um trapézio é isósceles se tem um par de lados não paralelos e congruentes.
h) Podemos traçar duas retas paralelas e uma perpendicular a elas. A partir dos pontos de intersecção desta com as paralelas, marcamos (sobre as paralelas) os segmentos que representam as bases e unimos suas extremidades.

Relato e comentários

No desenvolvimento da atividade observamos alguns comentários como os seguintes:

SA: - Começamos desenhado duas paralelas.
OA: - Pode usar o compasso ou então, só a régua e esquadro.
OU: - Eu vou usar as linhas do caderno!
IM: - Depois das paralelas, marcamos os pontos L, M, N, O e ligamos!
SA: - O meu deu retângulo!
IM: - Mas não podemos afirmar que o desenho é paralelogramo!
SA: - Pode sim! A definição de paralelogramo, diz que tem que ter dois pares de lados paralelos, e aqui tem!
CI: - Não! O meu só tem um par!
SA: - Só o meu deu retângulo? (Olhando o desenho dos outros) Então não posso mesmo!
EO: - Não pode mesmo, no enunciado nada garante dois pares paralelos, só pede um par!
I: - Um par de lados paralelos é necessário para ser paralelogramo, mas não é suficiente.
OU: - Para o trapézio a condição é um par de lados ... então é um trapézio!
OA: - É um trapézio.
I: - E se usarmos a outra definição? Aquela que diz “exatamente um par de lados paralelos”?
OC, AS: - Também é!
IM: - Mas se o desenho tiver dois pares, igual ao da SA?
SA: - Se for “exatamente”, então o meu não é trapézio!
OA: - Então não! Não dá para garantir que é um só par.

Reforçamos que, de agora em diante, consideraremos a definição II para trapézio.

Sobre o que chamamos de base, seguiu-se a seguinte discussão:

OA: - Qualquer lado eu posso chamar de base!

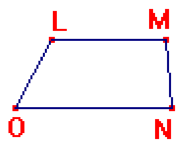
I: - O que é usualmente, chamado de base?

OA: - O lado maior e o lado menor!

CI: - Talvez por causa da fórmula da área ... mas também se eu chamar de base os outros lados, quem vai ser a base maior e a base menor?

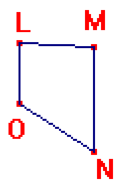
OA: - Eu não entendi! Quem você está querendo chamar de base?

CI: - MN.



OA: - Aí eu vou ter uma altura maior e outra menor!

OU: - Considerando a posição ... se o trapézio ficar digamos "em pé" ... assim:



OU: - Como falaria em base aí agora?

AS: - Se o "bico" tiver para baixo, como é que fica!

OA: - A gente tem idéia de base, o apoio em baixo, sempre na horizontal, acho que a gente toma a nossa base que é o chão! Aí ficou sem base! Vai cair!!!

CI: - Vai virar uma Torre de Pizza!

OU: - Teria que ter algo que me orientasse para definir que base não é só o lado horizontal!

Essa discussão nos mostra que a idéia de base em geometria está sendo confundida com a idéia de base no senso comum (o chão). Comentamos que, por convenção, chamamos de bases os lados paralelos, independentemente de estarem na posição horizontal ou não, talvez por que assim a altura do trapézio permanece constante.

Sobre o trapézio isósceles:

OA: - É um trapézio cujos lados não paralelos são congruentes!

CI: - Mas, se retângulo é um trapézio, ele não poderia ser isósceles? Eu não posso falar em lados não paralelos, o retângulo não tem!

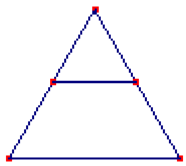
SA: - Mas se nós estamos definindo que trapézio isósceles tem dois lados não paralelos, o retângulo não pode ser trapézio isósceles!

I: - Qual seria então a condição necessária para um trapézio ser isósceles?

OU: - Que tenha um par de lados não paralelos!

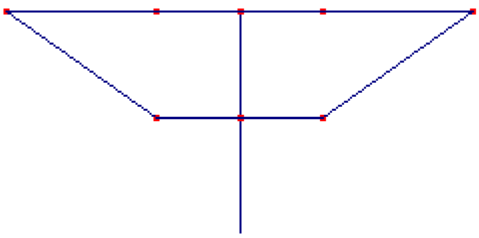
Registramos os seguintes processos para a construção do trapézio isósceles:

OA: - Traçar um triângulo eqüilátero, depois uma paralela a um dos lados.



(não justificou)

OU: - Traçar um segmento de reta, marcar o ponto médio, traçar a mediatriz. Traçar um segmento paralelo e congruente ao primeiro, em uma extremidade desse novo segmento, aumentar 2cm. Fazendo isso, eu meço e vejo que os lados são congruentes, mas não sei explicar o motivo!



CI: - Traçar um segmento e dois triângulos eqüiláteros congruentes nas extremidades. Depois, ligar em cima.

IM: - Ah! Desse jeito ficam dois trapézios: um pra fora e outro pra dentro.

Terminado o trapézio isósceles, passamos ao trapézio retângulo.

I: - O que é um trapézio retângulo?

OA: - tem dois ângulos retos?

OU: - Um só não dá?

OA: - Sempre vai ser dois! Se os lados são paralelos, fazendo 90º com um, tem que fazer com o outro também!

AS: - Agora sim! O retângulo é um trapézio retângulo.

CI: - Quem tem quatro ângulos retos tem um! Então ele é!

Quanto à construção do trapézio retângulo, a explicação que forneceram poderia levar a uma outra figura que não era um trapézio retângulo. Comentamos que ao explicar a construção, estamos convertendo um registro figural para um registro discursivo. Falamos da ambigüidade de algumas explicações que deram e admitiram que não estão habituados a esse tipo de atividade.

Com relação à nossas categorias, pudemos notar no desenvolvimento dessa atividade:

- dificuldades com a geometria: existe uma confusão entre a idéia de "base" no contexto da geometria e a base no senso comum, o que leva os professores a trabalharem sempre com base na horizontal;
- aspectos visuais/conceituais: a constatação de que os trapézios que traçaram eram, de fato, isósceles se deu apenas através da observação do desenho, ou seja, apenas visualmente.
- registros de representação: os professores afirmaram que não estavam acostumados a atividades nas quais se solicita para explicar construções.

ATIVIDADE 6

a) Construir um trapézio qualquer de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

b) Medir os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$. Qual o valor de:

$\hat{A}+\hat{D}$?

$\hat{B}+\hat{C}$?

c) O que você pode observar?

d) Você acredita que este resultado valha para qualquer trapézio?

OBS: As suas conclusões são apenas conjeturas, ou seja, opiniões sem fundamentos precisos. Para adquirir o estatuto de teorema é necessário demonstrá-lo.

O que vem a ser um teorema?

Teorema é uma propriedade matemática verdadeira, mas que precisa ser demonstrada. Uma vez demonstrado, o teorema pode ser utilizado como ferramenta de resoluções de problemas em outras situações.

e) Usando as propriedades de ângulos definidos por duas retas paralelas e uma transversal, demonstrar que: Dado um quadrilátero ABCD, se $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ então $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=180^o$.

f) Você acabou de demonstrar um teorema!

Em um teorema temos hipóteses e conclusão. Identifique neste teorema, o que é hipótese e o que é conclusão.

Parte B

a) ABCD é um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Construir as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A’ e B’ na base maior $\overline{CD}$.

a.1) $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$? Por quê?

a.2) Os triângulos AA'D e BB'C são congruentes? Por quê?

a.3) $\hat{A} \equiv \hat{B}$? Por quê?

b) Construir as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do trapézio ABCD. $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$? Por quê?

c) As quatro conclusões acima representam propriedades dos trapézios isósceles, enuncie cada uma delas.

Objetivos:

Parte A:

- Discutir diferenças entre conjetura e teorema.
- Identificar hipótese e conclusão de um teorema.
- Trabalhar com demonstrações.

Parte B:

- Levantar conjeturas e demonstrar propriedades do trapézio isósceles.

Considerações didáticas:

A partir desta atividade, faremos uso de um recurso utilizado por MELLO(1999): a *caixa de ferramentas.* Trata-se de uma tabela[23], onde estão registrados alguns teoremas inerentes a ângulos e congruência de triângulos que usaremos para demonstrar propriedades dos quadriláteros. Cada propriedade demonstrada pode ser registrada na tabela, para ser utilizada em novas demonstrações.

Parte A

Para esta atividade, o participante precisa conhecer a definição de trapézio e base de trapézio; conhecer as propriedades de ângulos definidos por duas retas paralelas e uma transversal; conhecer os passos de uma demonstração.

---

[23] Anexo VII

Notemos que os itens a e b favorecem o aparecimento de momentos com características das situações de ação estudadas por BROUSSEAU, visto que se trata de problemas em que o participante deve resolver de forma livre e experimental. Nada impede que, ainda nestes itens, ocorram momentos característicos da situação de formulação. No entanto, estes momentos são provocados nos itens c e d que levam o participante a refletir sobre o resultado que obteve e compará-lo com o resultado dos outros elementos do grupo. O item e, estimula o surgimento de momentos característicos da situação de validação, em que os participantes devem comprovar matematicamente um resultado obtido de forma experimental nos itens anteriores.

Para o item d, temos dois tipos de respostas possíveis:

a) negativa – neste caso, o participante mostra sentir necessidade da validação;
b) afirmativa – o participante se satisfaz com a verificação experimental e não se dá conta que o fato da soma dos ângulos considerados ser igual a 180º, pode ter ocorrido apenas nos exemplos observados e que, antes de generalizar um fato, ele precisa ser demonstrado.

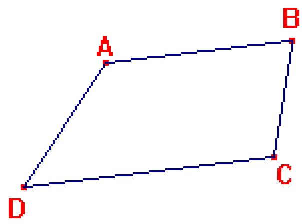
Aproveitaremos este momento para discutir a diferença entre conjeturar e demonstrar um resultado em matemática.

Para a parte B, é necessário saber levantar uma perpendicular a um segmento por um ponto dado; conhecer a definição de triângulos congruentes e os casos de congruência.

Como já discutimos conjeturas e teoremas, acreditamos que os participantes sintam necessidade de validar os questionamentos antes de respondê-los.

Possíveis soluções:

b)



$\hat{A} = 130.3^o$

$\hat{B} = 74^o$

$\hat{C} = 106^o$

$\hat{D} = 49.7^o$

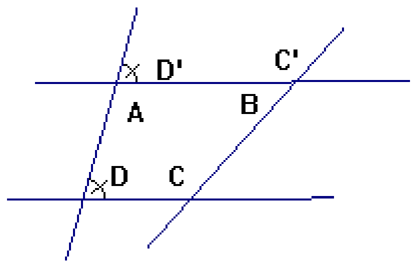
$\hat{A} + \hat{D} = 180^o$
$\hat{B} + \hat{C} = 180^o$

c) Podemos notar que neste trapézio, as duas somas são iguais a 180º.

d) Dado um quadrilátero ABCD, se $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ então $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^o$.

e)

Temos que:
ABCD é quadrilátero e $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$



Considerando o desenho acima, temos que $\hat{A} + \hat{D}' = 180^o$, além disso, $\hat{D} = \hat{D}'$ assim $\hat{A} + \hat{D} = 180^o$.

Analogamente, mostramos que $\hat{B} + \hat{C} = 180^o$.

f) Dado um quadrilátero ABCD, se $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ então $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^o$.

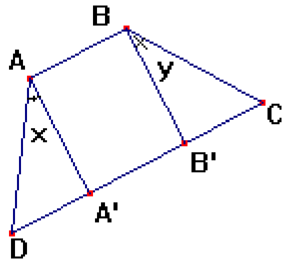
g) H: ABCD é quadrilátero

$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

C: $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^o$.

Parte B

a)



a.1) Sim, porque $\overline{AB} // \overline{CD}$.

a.2) Temos que:

AA'= BB';

os triângulos AA'D e BB'C são retângulos, respectivamente, em A' e B'; BC = AD, pois, o trapézio é isósceles.

Assim, por congruência de triângulo retângulo, temos que AA'D e BB'C são congruentes.

a.3) Façamos $x = D\hat{A}A'$ e $y = B'\hat{B}C$.

Como os triângulos AA'D e BB'C são congruentes, temos que x = y.

Além disso, $\hat{A} = 90^{o} + x$

$\hat{B} = 90^{o} + y = 90^{o} + x = \hat{A}$, $\therefore$ $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

b) Considerando os triângulos ABD e ABC, temos AD = BC, $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e o lado AB comum

ABC $\equiv$ ABD (pelo caso LAL), sendo assim, AC = BD.

c) Seja ABCD um trapézio isósceles com $\overline{AB} // \overline{CD}$. Se A' e B' são, respectivamente, as intersecções das perpendiculares a $\overline{CD}$ passando por A e B, então AA' = BB'.

Seja ABCD um trapézio isósceles com $\overline{AB} // \overline{CD}$. Se A’ e B’ são, respectivamente, as intersecções das perpendiculares a $\overline{CD}$ passando por A e B então, os triângulos AA’D e BB’C são congruentes.

Se um trapézio é isósceles, então os ângulos de uma mesma base são congruentes.

Se um trapézio é isósceles, então as suas diagonais são congruentes.

Relato e comentários:

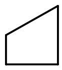
Os professores construíram a figura representando um trapézio sem dificuldades. Mediram os ângulos com transferidor e comentaram:

IZ: - Os meus mediram 60, 60 120 e 120! O que eu observo é que os ângulos da mesma base são congruentes.

SA: - Mas nós duas, desenhamos esse trapézio aqui (o isósceles)! Só que está falando para construir um trapézio qualquer. E se a gente desenhasse outro?

OU: - Não é válido não! E aquele que tem ângulo reto?

SA: - O que IZ observou, vale só para trapézio isósceles.

OU: - Mas tem um detalhe: eu posso virar assim  ... aí vale! Ah não! Nós falamos outro dia que chamaríamos de bases os lados paralelos!

SA: - No meu, $\hat{A} + \hat{D}$ dá 180º. Será que em outros trapézios dá também?

OU: - Aqui dá 90 ... aqui dá 30, ... 150. É a soma aqui também é 180. acho que esse resultado vale para todos mesmo!

IM: - Então o que nós observamos é que $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C}$.

AS: - Mas vale para todo trapézio?

IZ: - Se for a soma, sim!

Perguntamos se não tivessem o nome dos ângulos, como expressariam essa propriedade. Discutiram e disseram:

AS: - Ângulos consecutivos não da mesma base.

I: - Como ficaria a frase completa?

AS: - Ângulos consecutivos não da mesma base, somam 180 graus.

Ao escreverem a frase completa, os professores não sentiram necessidade de dizer em que figura essa propriedade é válida. Também não se deram conta que, no caso do retângulo os ângulos podem pertencer à mesma base, visto que os dois pares de lados são paralelos.

IZ: - Uma dúvida: se é para construir um trapézio qualquer, eu posso construir o isósceles não posso? Então! Aqui os ângulos da base são congruentes!

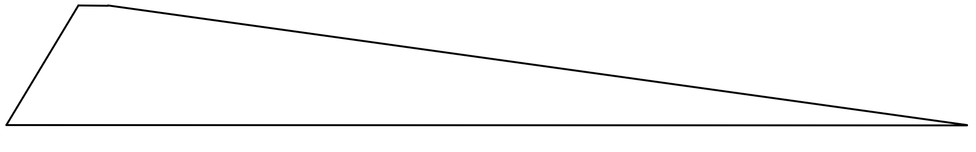
Comentamos que o que ela observou era uma propriedade válida para um caso particular do trapézio, e que não devemos generalizar uma propriedade observada em casos particulares. Destacamos também, a importância do trabalho em grupo, pois outros professores construíram trapézios diferentes e tiveram a oportunidade de constatar que o resultado observado não era válido em outros casos.

OU: - Eu também tinha feito um isósceles e observado isso, só que fiz outro para ver se era isso mesmo e vi que não era!

IM: - É, se fura para um caso então não vale para todos!

Concordaram que esse resultado valia para todo trapézio: "fizemos trapézios diferentes e valeu para todos os que fizemos, então vale para todo trapézio." Notamos que eles não estavam vendo necessidade de demonstrar a propriedade observada. Questionamos:

I: - E se fizermos um trapézio bem "esquisito" ? Mais ou menos assim:



IZ: - Vale sim! Olha bem: Quanto mais você fecha aqui em baixo, mais abre lá em cima.

Notamos que, as justificativas eram apenas visuais e comentamos este fato com eles.

IM: - Isso é intuitivo, mas se o aluno desenvolve isso, já é meio caminho andado! Só falta provar matematicamente!

IZ: - Provar matematicamente! Antes disso eu não posso garantir que vale para todos!

OU: - Eu só quero saber o que temos fazer para provar!

IZ: - Acho que dá pra usar ângulos alternos ... opostos pelo vértice ... é isso?

Comentamos que, o que fizemos até então, foi levantar conjeturas. E levantar conjeturas é uma característica da nossa oficina, pois procuramos não apresentar um resultado pronto solicitando que simplesmente o demonstrem. Essa atividade exemplifica o que os PCN chamam de “problema”, ou seja, uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado.

SA: - É! E a gente já chega com tudo pronto para os alunos!

Discutimos a diferença entre conjeturar e demonstrar. Entregamos a eles a nossa *caixa de ferramentas* e passamos à demonstração (item *e* da atividade).

AS: - Como vou registrar isso? Posso chamar de ângulo Â e Â’, por exemplo?

IZ: - Eu tracei um quadrado, mas coloquei um trapézio senão não consigo visualizar!

SE: - Mas tem que ser um trapézio pela hipótese!

IM: - Mas eu tenho que começar pelas paralelas e a transversal?

Notamos que ainda não estava claro que a questão das paralelas e a transversal, era um resultado para ser utilizado na demonstração.

IZ: - Eu só tenho que afirmar que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$, certo?

IM: - Vamos desenhar um quadrilátero conforme o enunciado.

IZ: - Como eu coloco o ângulo interno e o externo? Eu quero colocar! Eu quero chegar que o ângulo Â somado com o ângulo $\widehat{D}$ dá um complementar!

I: - Você acha que o ângulo Â é interno ou externo?

IZ: - O meu é interno!

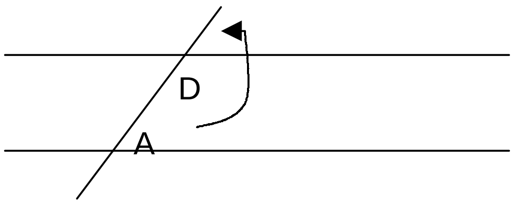
I: - E o $\widehat{B}$?

IZ: - O meu é interno!

I: - E por que razão você quer falar em ângulo externo?

IZ: - Porque eu quero transportar para o externo do $\widehat{D}$ e somar!

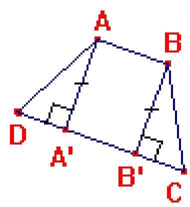
A professora foi ao quadro e fez o desenho:



IZ: - Eu quero passar esse ângulo Â pra cá. Eu quero saber se aqui, eu posso chamar de Â' ou posso deixar Â mesmo ... eles são congruentes! O ângulo Â somado com D̂ é 180, entendeu? É isso que eu quero fazer, mas não consigo pôr direitinho!

Notamos que a professora já tinha traçado uma estratégia para a demonstração pretendida. No entanto tem muita dificuldade em escrevê-la. Considerando essa dificuldade, solicitamos que eles fossem dizendo o que queriam fazer e fomos escrevendo a demonstração no quadro.

A parte B gerou bastante discussão. Traçaram trapézio isósceles. Chamamos a atenção sobre as informações que temos sobre esse tipo de trapézio: um par de lados paralelos e um par de lados não paralelos congruentes.



IM: - $\overline{AA'}$ é congruente a $\overline{BB'}$ porque as bases são paralelas.

Sobre a congruência dos triângulos AA'D e BB'C, observamos:

IZ: - Porque tem os mesmos ângulos, não é?
AS: - São congruentes porque os ângulos da base são iguais.
I: - Isso já foi provado?
IM: - Quais são os casos de congruência mesmo?

Relembramos os casos LLL, LAL, ALA e os casos de congruência de triângulos retângulos[24]: cateto e ângulo oposto, hipotenusa e cateto e hipotenusa e ângulo agudo. Esses casos constam na caixa de ferramentas.

OU: - Temos o lado $\overline{BC} = \overline{AD}$, o ângulo $\hat{B} = \hat{A}'$ que é reto e o lado $\overline{B'C} \equiv \overline{A'D}$.
I: - O que nos garante que $\overline{B'C}$ e $\overline{A'D}$ são congruentes?
OU: - Se não forem, o trapézio não é isósceles!
I: - São esses os lados congruentes do trapézio isósceles?
IZ: - Então vamos tomar o caso LAL. Pegamos o os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ e os ângulos $\hat{A}'$ e $\hat{B}'$.
AS: - Mas o ângulo tem que estar no meio dos dois lados!

Depois de muita discussão, chegaram à conclusão que sempre faltava um dado para enquadrar a situação em um dos três primeiros casos listados na caixa de ferramenta. Pediram para pensar em casa.

Surgiu uma discussão sobre a SBEM, alguns deles tinham conhecimento da existência da sociedade, mas não sabiam como funcionava. Falamos sobre os grupos de trabalho pois, é importante saber da existência desses grupos, inclusive para procurar o que está sendo pesquisado e estudado sobre problemas ou situações que eles (os professores) enfrentam em suas escolas. Comentamos também sobre o pouco contato que o professor tem com a pesquisa.

[24] Ver BARBOSA, 1985, p.66

IZ: - Você acha que devemos diminuir a distância entre professor e pesquisador. É isso? Agora, para chegar nesse ponto aí é muito difícil. Veja, cada livro tem uma informação diferente, o que você está nos mostrando dá pra ver bem isso!

SE: - É! Nesse ponto abriu bem a nossa cabeça!

IZ: - Não devemos acreditar em tudo que lemos nos livros.

AS: - Mas vocês estão falando de autor de livro?

IZ: - É! O livro nada mais é do que aquilo que o autor foi apanhando das pesquisas!

AS: - Eu não entendo assim, o autor nem sempre é o pesquisador.

IZ: - Eu sei que não é, mas ele apanha dados das pesquisas!

AS: - Mas estamos falando de pesquisador, independentemente dos livros didáticos.

I: - Vocês lembram de alguma pesquisa que falamos aqui durante a oficina?

IZ: - Essa dos registros. Isso é interessante porque eu mesma, sinto muita dificuldade em passar para o papel se não for o desenho!

AS: - Através dessa pesquisa que você fala, a gente já está percebendo que a maneira de registrar, que a gente não passa para o aluno, funciona bem. É uma forma de diminuir a distância, nós não tínhamos percebido isso ainda. Então, a pesquisa já está nos ajudando nesse ponto!

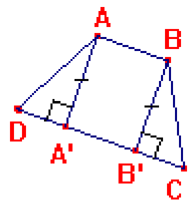
SE: - Sabe, não que eu não acredite no trabalho do pesquisador, eu sei que ele entende e sabe muito. O problema é que ele não aplica na base. Quem trabalha na base somos nós, os professores. Então quem deveria ter condições de estudar e pesquisar é quem está na base!

OU: - Se não dá para pesquisar, pelo menos que tenhamos acesso às pesquisas e as informações para aplicarmos na base.

IZ: - E quem faz essa ponte?

De certa forma, nessa dissertação estamos investigando se é possível estabelecer esta ligação. Um trabalho com as características do nosso, ou seja, discutindo com eles as pesquisas que tem por trás da oficina é uma forma de "fazer a ponte"? Descobrimos que o professor está aberto a conhecer e discutir pesquisas realizadas na área de Educação Matemática. Fica aqui uma sugestão para novas pesquisas: que outras formas de trabalho podem contribuir para estabelecer um elo entre a pesquisa e professor do ensino fundamental e médio que estão trabalhando em sala de aula?

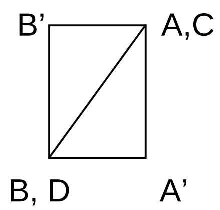
No próximo encontro, continuamos a discussão sobre a atividade 6. Queríamos provar a congruência dos triângulos AA’D e BB’C.



OA: - Mas se o ângulo $\hat{A}$ não for igual ao ângulo $\hat{B}$, os lados não são paralelos! Veja bem, se eu levantar um pouco o B, encolhe ali e deixa de ser paralelo!

IZ: - Pega esse triangulo ali (AA’D) e põe aqui! Faz isso virar um retângulo.

Desenhou na lousa:



Deixamos os professores discutirem a idéia. Não perceberam que a figura formada só seria um retângulo, se os triângulos fossem congruentes e se fossem, não teríamos nada a demonstrar.

IZ: - Vamos escrever...

AO: - Transportando ...

IZ: - ... sobrepondo...

OA: - ... sobrepondo de maneira invertida ...

IZ: - ... pega esse bico e põe ali !

OA: - Como é que você vai escrever que pegou isso e jogou pro outro lado?

IM: - Vamos ver o raciocínio desde o começo!

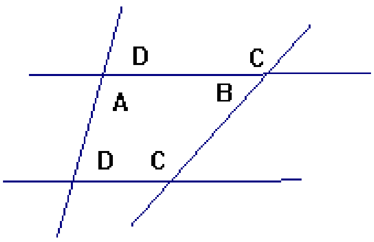
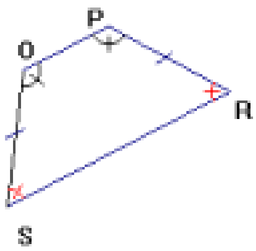
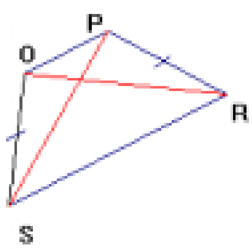
Na discussão, perceberam que estavam andando em círculos. Sugerimos que olhassem os casos de congruência para triângulos retângulos. Já havíamos concluído que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, além disso, o trapézio é isósceles, assim as hipotenusas dos triângulos considerados são congruentes, temos então pelo caso "cateto e hipotenusa" que os dois triângulos são congruentes.

OA: - Então, se esses triângulos são congruentes, posso dizer que os ângulos da base do trapézio isósceles são iguais!

Afirmaram que as diagonais do trapézio eram congruentes, justificando que os triângulos ABC e BCD são congruentes pelo caso LAL.

Passamos à institucionalização por meio do preenchimento da tabela abaixo.

Institucionalização:

Enunciado verbal da propriedade	**Interpretação em Linguagem figural**	**Interpretação em linguagem matemática**
Se ABCD é um trapézio e AB // BC, então $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=\ 180^{O}$.		*Hipótese:* Se ABCD é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ <u>Conclusão:</u> $\hat{A}\cup\hat{D}\equiv\hat{B}\cup\hat{C}\equiv$ ângulo raso
Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles OPRS são congruentes		Hipótese: OPRS é um trapézio isósceles <u>Conclusão:</u> $\hat{O}\equiv\hat{P}$ e $\hat{R}\equiv\hat{S}$
Em um trapézio isósceles as diagonais são congruentes..		<u>Hipótese:</u> OPRS é um trapézio isósceles. <u>Conclusão:</u> $\overline{OR}\equiv\overline{PS}$

No que diz respeito à nossa categorização, observamos durante o desenvolvimento dessa atividade, os seguintes pontos:

- Dificuldades com a geometria: os professores não sentiram necessidade de demonstrar um resultado observado experimentalmente; uma professora pensou em generalizar para todos os trapézios, uma propriedade particular do trapézio isósceles; ao enunciar uma propriedade observada, não esclareciam em que figura a propriedade é válida. Além disso, observamos também uma falta de segurança em relação aos termos que poderiam utilizar, ouvimos "... quero saber se posso chamar de Â' ?"

- Notamos que os professores se apóiam basicamente em aspectos visuais para justificar algumas conjeturas, por exemplo, "... quanto mais você fecha aqui em baixo, mais abre lá em cima ..."; "... veja bem, se eu levantar um pouco o B, encolhe ali e deixa de ser paralelo ..."

- Com relação à forma que trabalham, uma professora novamente afirmou que "chegam com tudo pronto para os alunos".

- Sobre a visão que têm de pesquisa, notamos que fazem uma associação com os livros didáticos, uma professora acredita que o que está nos livros didáticos deve ser um "apanhado" que o autor faz das pesquisas existentes na área de matemática. Os professores concordam que existe uma distância entre eles e a pesquisa e afirmam que acreditam no trabalho do pesquisador, mas "o problema é que não se aplica na base". Concordam que deveriam ter condições de estudar e pesquisar, pois são eles que estão "na base". Uma professora diz: "Se não dá pra pesquisar, que pelo menos tenhamos acesso às pesquisas ...".

- Sobre as diversas formas de representar, notamos que a grande dificuldade é mesmo escrever em linguagem discursiva, ouvimos de uma professora: "tenho muita dificuldade em passar para o papel se não for o desenho."

ATIVIDADE 07

a) Construir um paralelogramo EFGH. Comparar os seus ângulos opostos. O que você observa?
b) Enunciar o resultado observado acima na forma de um teorema. Este resultado é mesmo um teorema? Justificar.
c) Enunciar o recíproco deste teorema. Verifique se é verdadeiro.
d) É possível enunciar os itens (b) e (c) em um único enunciado? Justifique.

OBS: Os resultados obtidos em b) e c) podem ser enunciados da seguinte forma: *Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, tem ângulos opostos congruentes.*

Parte B

a) Comparar os lados opostos do paralelogramo EFGH. O que você observa?
b) Enunciar o resultado observado acima na forma de um teorema. Este resultado é mesmo um teorema?
c) Enunciar o recíproco do resultado obtido acima e verifique se é verdadeiro.
d) Enunciar os resultados obtidos em (b) e (c) na forma "*se, e somente se*".
e) Construir as diagonais $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ do paralelogramo EFGH. Seja M o ponto de intersecção dessas diagonais. Compare $\overline{ME}$ e $\overline{MG}$, $\overline{MF}$ e $\overline{MH}$. O que você observa? O resultado observado é geral? Justifique sua resposta.
f) Enunciar o resultado observado acima na forma de teorema.
g) Enunciar seu recíproco e verificar se é verdadeiro.
h) Enunciar os resultados obtidos em (f) e (g) na forma "*se, e somente se*".

Objetivos:

- Fazer conjeturas e demonstrar a congruência entre os ângulos opostos e lados opostos de um paralelogramo.
- Trabalhar com teorema recíproco.
- Enunciar teoremas recíprocos em um único teorema.

Institucionalização:

Estabelecer o caráter oficial do conhecimento; corrigir possíveis distorções sobre propriedades do paralelogramo e do retângulo.

Explicitar estas propriedades em três registros.

Considerações didáticas:

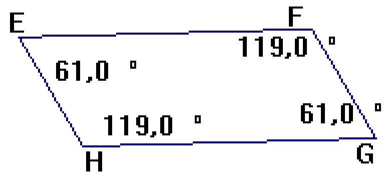
Como na atividade anterior, esta atividade também propicia momentos característicos das situações propostas por BROUSSEAU: construção de forma livre, verificação experimental, validação, sempre mediante a discussão em grupo.

Aqui consideramos, pela primeira vez, o conceito de recíproco de um teorema. Com o item d, o que pretendemos, é provocar uma discussão sobre o que vem a ser *afirmações equivalentes*. Queremos deixar claro que, se as proposições $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$ são simultaneamente verdadeiras, dizemos que P e Q são equivalentes e, representamos por $P \leftrightarrow Q$ que lemos: P é equivalente a Q, ou, P é condição necessária e suficiente para Q, ou ainda, P se e somente se Q.

Pode ser que os participantes não apresentem uma justificativa formalizada sobre o fato de podermos escrever os itens b e c em um único enunciado.

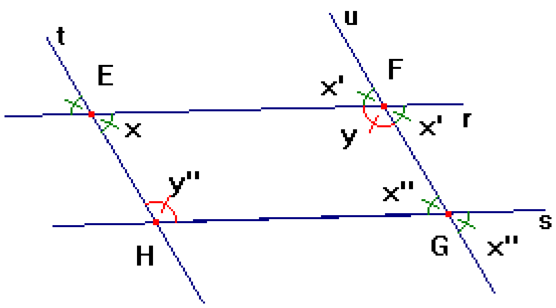
Solução possível:

a)



b) Conjetura: Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Demonstração:



Consideremos desenho ao lado.

Como t // u e r é transversal à t e u, temos que x = x'.

Como r // s e u é transversal a r e s, temos que x'= x''.

Analogamente, concluímos que y = y''.

Como demonstramos que o resultado observado é válido para um paralelogramo qualquer, concluímos que nossa conjetura é um teorema.

c) Se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.

Demonstração:

Seja o quadrilátero ABCD, como $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$, temos que $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$. ABCD é quadrilátero, assim: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^{o}$

Então: $\hat{A}+\hat{B}=\hat{C}+\hat{D}=180^{o}$ logo, $\overline{AD}//\overline{BC}$ e $\overline{AB}//\overline{CD}$ (ver caixa de ferramenta).

d) É possível enunciar as duas afirmações em uma só, pois são recíprocas entre si e também são equivalentes.

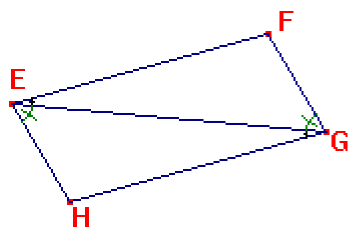
Parte B

a) O lados opostos são congruentes.

b) Em um paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

Para garantir que este resultado é um teorema, precisamos demonstrá-lo.

Demonstração:



O desenho ao lado, representa o paralelogramo EFGH.

Consideremos a diagonal EG.

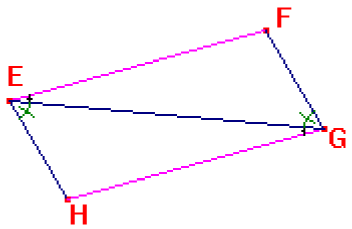
Como $\overline{EF}//\overline{GH}$ então $E\hat{F}G \equiv E\hat{G}H$

Como $\overline{EH}//\overline{GF}$ então $G\hat{E}H \equiv E\hat{G}F$

Temos também que $\overline{EG}$ é comum aos triângulos EFG e GHE, então esses triângulos são congruentes. Logo, $\overline{EH} \equiv \overline{FG}$ e $\overline{EF} \equiv \overline{GH}$.

c) Se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes, então é um paralelogramo.

Demonstração:



Seja EFGH um quadrilátero em que $\overline{EF} = \overline{GH}$ e $\overline{FG} = \overline{EH}$, conforme o desenho ao lado.

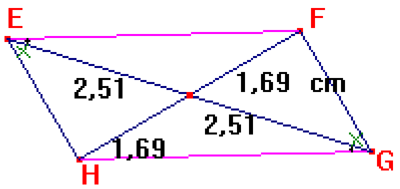
Considerando a diagonal $\overline{EG}$, temos que os triângulos EFG e GHE são congruentes (LLL).
Assim, $F\hat{E}G \equiv E\hat{G}H$ e $F\hat{G}E \equiv G\hat{E}H$.

A primeira igualdade garante que $\overline{EF} // \overline{GH}$.
A segunda garante que $\overline{EH} // \overline{FG}$.

Logo, EFGH é um paralelogramo.

d) Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos são congruentes.

e)

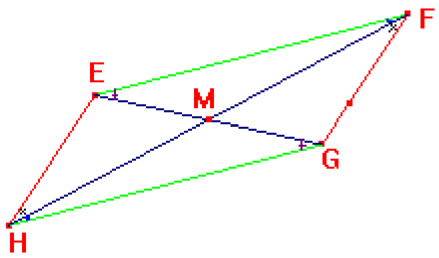


Observamos que as diagonais se cruzam em seus respectivos pontos médios.

Para garantir que este resultado é geral, devemos demonstrar que ele é válido para todo paralelogramo. Vejamos a demonstração em (f).

f) Se EFGH é um paralelogramo, então suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

Demonstração:



O desenho ao lado, representa um paralelogramo EFGH.

Considerando a diagonal $\overline{FH}$, temos: $H\hat{F}G \equiv E\hat{H}F$ e $E\hat{F}H \equiv G\hat{H}F$.

Considerando a diagonal $\overline{EG}$, temos: $F\hat{E}G \equiv E\hat{G}H$.

Notemos que os triângulos EFM e GHM são congruentes (ALA), assim $\overline{EM} = \overline{MG}$ e $\overline{FM} = \overline{MH}$.

Logo, M é o ponto médio das diagonais $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.

g) Se as diagonais de um quadrilátero EFGH se interceptam em seus pontos médios, então EFGH é um paralelogramo.

Demonstração:

Considerando o desenho acima, temos:

Os triângulos EFM e GHM são congruentes (LAL) então EF = HG

Os triângulos FMG e HME são congruentes (LAL) então EH = FG.

Ora, já vimos que se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, este quadrilátero é um paralelogramo.

Portanto EFGH é um paralelogramo.

h) O quadrilátero EFGH é um quadrilátero se, e somente se, suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

Relato e comentários:

Os professores construíram o paralelogramo, usando régua e compasso e observaram a congruência dos ângulos opostos. Ao enunciarem o resultado na forma de teorema, observamos os comentários:

OU: - Se EFGH é um paralelogramo ...
SE: - ... logo seus lados opostos são congruentes.
IM: - Logo não! Então.
OA: - ... então os lados opostos são paralelos.
SE: - Não! Seus ângulos opostos são congruentes
OU: - Se EFGH é um paralelogramo então, seus ângulos opostos são congruentes.
I: - É um teorema?
AO: - Tem que provar!
IM: - Pela transversal dá pra provar.
OA: - É. Essas duas são as paralelas e essa é uma transversal.

Notamos que eles já tinham o caminho da demonstração porém, dificuldades para escrevê-la. Assim a escrevemos na lousa junto com eles. Quanto ao recíproco do teorema, ouvimos:

IM: - Recíproco é a volta não é?
OA: - Verifique se é verdadeiro? Pode não ser?
I: - Pode! Como fica o recíproco?
OA: - Se os ângulos opostos são congruentes ...
OU: - ... EFGH é um paralelogramo.
I: - Isso é verdadeiro?
OA: - Acho que é!
IM: - Acho que não. O losango tem ângulos opostos congruentes e é losango!
IZ: - E losango não é paralelogramo?
IM: - É mesmo!
OA: - Tem que provar! A gente usa que os ângulos opostos são congruentes?

I: - Para chegar onde?

OA: - Que os lados opostos são congruentes!

IM: - Não! Paralelos.

OA: - Pense comigo: se eu fizer um ângulo um pouquinho maior que o outro, aumenta o lado! Consegue enxergar isso? Se eu abrir, não tem como os lados serem iguais. Se os lados não são iguais, fura o paralelismo.

Notamos que o professor OA, sempre usa argumentos visuais em suas justificativas!

SE: - Como mostra que são paralelos?

I: - Tem alguma coisa na caixa de ferramentas?

IM: - Se ao cortarmos duas retas com uma transversal, e a soma desses ângulos for 180 ... Ah! Isso nós já mostramos lá atrás!

OA: - Então é teorema!

Escrevemos a demonstração na lousa, discutimos sobre a forma "se, e somente se" de um teorema e passamos ao item b dessa atividade.

OA: - Os lados opostos têm o mesmo tamanho!

SE: - Então os lados opostos são congruentes.

IZ: - Se EFGH é um paralelogramo, então, seus lados opostos são congruentes.

I: - É um teorema?

OU: - Só se a gente conseguir demonstrar!

IZ: - A gente parte do paralelismo? Escrevo que $\overline{EF} \,//\, \overline{HG}$, pode fazer isso?

Discutiram e pediram sugestão. Sugerimos que olhassem os casos de congruência de triângulos. Consideraram os triângulos EFG e EHG e o caso ALA de congruência para justificar a veracidade do teorema. Não conseguiram escrever, no entanto, percebemos que o caminho da demonstração estava claro para eles. Enunciaram o recíproco e justificaram que era um teorema, pois poderia ser demonstrado por congruência de triângulos.

Quanto à forma “se, e somente se”, a professora IZ, enunciou: Se um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, tem lados opostos congruentes. Observaram que o “se” do inicio da frase não fazia sentido. A professora corrigiu e encerramos o encontro.

No encontro seguinte, retomamos o item e da atividade 6, em que os professores construíram e por meio de medidas, constataram que as diagonais do paralelogramo se interceptam em seus pontos médios. Quanto à garantir se o resultado é geral, ouvimos:

OA: - Eu acho que é geral ... se os lados são paralelos ... mas tem que provar! Se é um paralelogramo, já provamos que os lados opostos são congruentes, então, se não der no ponto médio, você muda o ângulo, se mudar o ângulo, cai o paralelismo ...

IM: - As diagonais dividem os ângulos ao meio?

IZ: - Não!

I: - Como fica escrito na forma de um teorema?

OU: - Se M é ponto médio de $\overline{FH}$ e $\overline{EG}$, então ... tem que falar ... Do que eu vou falar primeiro: do paralelogramo ou do ponto médio?

I: - de onde partimos?

OU: - Então estou fazendo o contrário! ... Se EFGH é paralelogramo, então M é o ponto médio ...

IM: - Então as diagonais desse paralelogramo se interceptam ...

OU: - No ponto M!

IM: - Mas tem que falar que é médio de cada uma!

IZ: - Como é duro a tal da escrita!!!

OA: - Se interceptam no ponto M que é médio das diagonais.

SA: - Olha o meu como ficou: Se EFGH é um paralelogramo, então $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ se interceptam. Então, M é o ponto médio de $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.

IZ: - Se EFGH é um paralelogramo, então, $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ se cruzam no ponto médio.

I: - Ponto médio de quem?

IM: - E se colocar que $\overline{EM}$ é congruente a $\overline{MG}$?

A grande dificuldade dessa atividade, foi escrever o resultado observado na forma de um teorema. Depois de muita discussão sugerimos: Se EFGH é um paralelogramo, então suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios. Justificaram que é um teorema pois pode ser demonstrado pela congruência entre os triângulos EFM e GHM. Passamos ao recíproco.

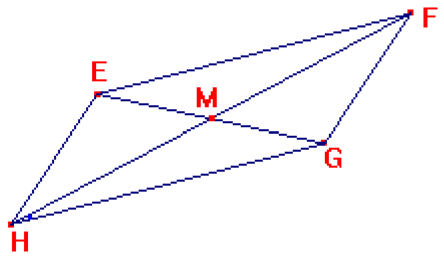
OA: - O recíproco vai ficar: Se M é o ponto médio, então as diagonais se cruzam sobre ele?

I: - Não seria: se as diagonais de um quadrilátero, se cruzam em seus respectivos pontos médios, então, é um paralelogramo.

Notamos que ainda não está claro para o professor OA o que é hipótese e conclusão de um teorema, ou não está claro que, no recíproco, estas posições se invertem. Reconhecemos que falhamos nesse ponto: deveríamos ter dado mais tempo para que novas idéias fossem colocadas pelos professores ao invés de enunciarmos a forma do teorema. Passamos à demonstração.

IM: - Tem que demonstrar agora! Vamos pegar o quadrilátero EFGH...

OA: - Vamos ter que partir de EM = MG e MH = MF.



I: - Se eu provar que os ângulos opostos são iguais, eu provo que é paralelogramo?

OA: - Prova.

I: - Tem outra coisa que eu posso fazer para provar?

OA: - Que os lados são paralelos.

IM: - Ou congruentes.

Mostramos pelo caso, LAL que os triângulos EMH e GMF são congruentes portanto, os lados opostos $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ são também congruentes.

OA: - Se eu quiser posso usar a mesma coisa, mudando tudo e provar que os outros dois lados opostos também são congruentes.

O professor queria dizer que, pelo mesmo caso de congruência, podemos provar que os triângulos EFM e GHM são congruentes portanto, os lados $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ também o são.

I: - Fazendo isso, mostramos que os lados são paralelos?

OA: - Não! Mostramos que são congruentes. Mas, já vimos que se os lados opostos são congruentes então o quadrilátero é paralelogramo.

Quanto à forma "se, e somente se":

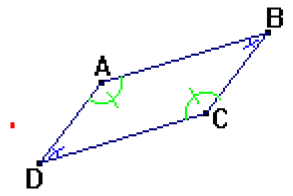
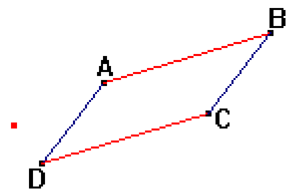
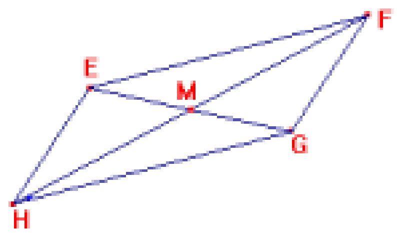
OA: - Se EFGH é um paralelogramo...

OU: - Tem afirmar que é, não pode falar "se"! Sendo EFGH um quadrilátero, as suas diagonais se cruzam ao meio se, e somente se, EFGH é um paralelogramo.

IM: - Eu também posso falar assim: Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cruzam ao meio.

Passamos à institucionalização completando a tabela abaixo e o item b.

Institucionalização:

Enunciado verbal da propriedade	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, os ângulos opostos são congruentes.		(Ida) Se o quadrilátero ABCD é paralelogramo então $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$ (Volta) Se o quadrilátero ABCD é tal que $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$ então ABCD é um paralelogramo.
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos são congruentes		(Ida) Se o quadrilátero ABCD é paralelogramo então $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. (Volta) Se o quadrilátero ABCD é tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ então ABCD é paralelogramo.
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.		**(Ida)** **Se o quadrilátero EFGH é paralelogramo então,** $\overline{EM} \equiv \overline{MG}$ **e** $\overline{FM} \equiv \overline{MH}$**,** **onde M = EG∩FH** (Volta) **Se o quadrilátero EFGH é tal que** $\overline{EM} \equiv \overline{MG}$ **e** $\overline{FM} \equiv \overline{MH}$**, onde** $M = \overline{EG} \cap \overline{FH}$, então EFGH é paralelogramo.

b) Para ter certeza que um quadrilátero é um paralelogramo, basta saber que:

- seus lados opostos são: paralelos (por definição)
- ou que seus ângulos opostos são: congruentes.
- ou que suas diagonais possuem o mesmo: ponto médio
- ou que seus lados opostos têm o mesmo: comprimento

Constatamos no decorrer dessa atividade que os professores ainda têm grande dificuldade em escrever uma demonstração. Na atividade com teorema recíproco, notamos também que existem dúvidas sobre hipótese e conclusão de um teorema.

ATIVIDADE 08

a) Construir um retângulo ABCD. ABCD é um paralelogramo? Por quê?
b) Construir e medir suas diagonais. O que você observa? Enuncie este resultado como um teorema do tipo "se...então".
c) Demonstrar este teorema.
d) Enunciar o recíproco deste teorema. Ele é verdadeiro?
e) Enunciar os resultados obtidos como um teorema na forma "se, e somente se". .
f) As diagonais de ABCD interceptam-se nos respectivos pontos médios? Por quê?
g) Explicar como você construiria um paralelogramo EFGH cujas diagonais são congruentes. Fazer a construção. EFGH é um retângulo? Por quê?
h) Depois destas atividades, pode-se concluir que todo quadrilátero que possui as diagonais congruentes é um retângulo. Esta afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Objetivos:

- Construir (com régua e compasso) um retângulo.
- Fazer conjeturas e demonstrar as principais propriedades do retângulo.
- Trabalhar com teorema recíproco.
- Enunciar teoremas recíprocos em um único teorema.
- Utilizar a linguagem natural escrita, para descrever os passos da construção geométrica de um retângulo, partindo das diagonais.
- Introduzir a utilização de contra exemplo.

Considerações didáticas:

Aqui, vamos estudar um caso particular – o retângulo – da figura estudada na atividade anterior – o paralelogramo. Também trabalhamos com proposições equivalentes.

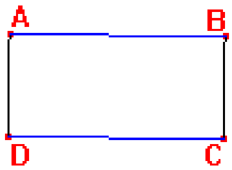
Ao questionarmos no item f, se as diagonais do retângulo se interceptam nos respectivos pontos médios, esperamos, que os participantes respondam afirmativamente, justificando que o retângulo é caso particular do paralelogramo. Caso a resposta não seja esta, retomaremos as definições de paralelogramo e retângulo.

Exploraremos a construção (com régua, compasso ou esquadro) do paralelogramo com diagonais congruentes, bem como o registro escrito desta construção na forma discursiva.

Com o item h, pretendemos introduzir a utilização do contra-exemplo para justificar que uma afirmação é falsa, esclarecendo que, para garantir que uma afirmação é verdadeira devemos demonstrá-la, e para provar que ela é falsa, basta apresentar um elemento que satisfaça a hipótese, mas não satisfaça a conclusão da afirmação: o contra-exemplo.

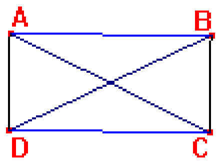
Solução possível

a)



ABCD é um paralelogramo, pois seus ângulos opostos são congruentes.

b)



Observamos que as diagonais de ABCD são congruentes.

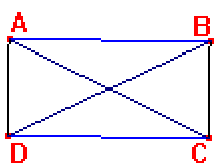
Podemos enunciar: Se o paralelogramo ABCD é um retângulo, então suas diagonais são congruentes.

c) Como o retângulo ABCD é um paralelogramo, seus lados opostos são congruentes.

Considerando o desenho acima, temos que os triângulos ADC e BDC são congruentes, pois, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, $\overline{CD}$ é comum e $\hat{D} \equiv \hat{C}$ (LAL). Logo, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, ou seja, suas diagonais são congruentes.

d) Recíproco: Se o paralelogramo ABCD tem as diagonais congruentes, então ABCD é um retângulo.

Demonstração:

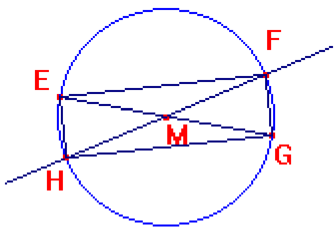


Como ABCD é paralelogramo e AC ≡ BD, os triângulos ABC e BAD são congruentes (LLL).
Então $\hat{A} \equiv \hat{B}$.
Ora, $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$ já que ABCD é paralelogramo.
Assim, $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$. Como estes ângulos devem somar 360º, temos que cada um deles mede 90º. Logo, ABCD é um retângulo.

e) Um paralelogramo é retângulo se, e somente se, suas diagonais são congruentes.

f) Sim, as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios, pois ABCD é um paralelogramo.

g)



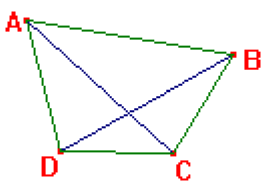
Traçamos o segmento EG (com barrinha), encontramos seu ponto médio M.

Por este ponto traçamos uma reta qualquer.

Traçamos uma circunferência de centro M e raio EM que intercepta a reta em dois pontos que chamaremos de F e H (conforme o desenho).

O quadrilátero EFGH é o paralelogramo desejado, que é um retângulo pois, suas diagonais são congruentes.

g) Esta afirmação é falsa. Veja o desenho a seguir:



AC = BD, no entanto ABCD não é um retângulo.

Diagonais congruentes não garantem que um quadrilátero qualquer é um retângulo. O quadrilátero precisa ser um paralelogramo.

Relato e comentários:

Os professores construíram o retângulo, ou melhor, o desenho representando um retângulo, usando régua e esquadro. Anotamos os comentários:

OA: - O retângulo é paralelogramo porque os lados são paralelos, os ângulos opostos são congruentes e os lados opostos são congruentes.

I: - Precisa falar tudo?

OU: - Não!

Quanto às diagonais:

OU: - Elas dividem o ângulo reto ao meio?

IM: - Não!

OA: - Elas se cruzam no ponto médio.

AS: - Elas são iguais.

OA: - Eu medi! A intersecção é no ponto médio sim!

I: - Dá para garantir essa intersecção no ponto médio?

OA: - Não! (Esperávamos ouvir que sim!)

IM: - Elas são iguais sim!

I: - Considerando essa congruência, como fica em forma de teorema?

IM: - Se o quadrilátero é um retângulo, então as diagonais são congruentes.

I: - Isso é o enunciado de um teorema?

OA: - Não! É uma conjetura. Temos que provar! Sai por congruência, temos que provar que as diagonais ...

IM: - ...são congruentes.

OU: - Eu posso ir pelo mesmo caminho do exercício anterior. Retângulo não é paralelogramo?

IM: - Vamos pegar os triângulos ABC com BCD...

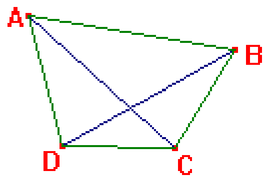
Discutiram e chegaram à conclusão que são congruentes pelo caso LAL.

OA: - Também posso garantir que são congruentes pelo teorema de Pitágoras já que os triângulos são retângulos!

Sobre o recíproco, registramos os comentários:

OA: - Dado um Quadrilátero ABCD, se as diagonais são iguais, então é retângulo.

Como não houve nenhuma manifestação, desenhamos na lousa:



IM: - Ah! A volta não é verdadeira!

SE: - Mas faltou falar que os lados opostos são paralelos!

IM: - E se falar que é um paralelogramo? ... se o paralelogramo tem as diagonais congruentes então é retângulo.

SA: - Eu não estou vendo diferença! O retângulo é um paralelogramo!

Mostramos um outro quadrilátero com diagonais congruentes que não fosse um retângulo.

SA: - Ah! É mesmo! A volta é falsa!

I: - Para mudar a volta, a ida não pode ficar como está. Se escrevermos assim: Se o paralelogramo ABCD é retângulo, então suas diagonais são congruentes.

OU: - A volta fica: Se as diagonais do paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é retângulo.

SA: - Entendi! Agora está afirmando que é um paralelogramo!

IM: - Isso! Não é um quadrilátero qualquer!

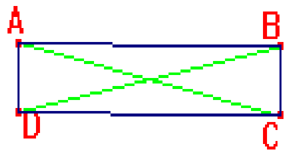
OA: - Mas tem que provar!

IZ: - Então fica: o paralelogramo ABCD é retângulo se, e somente se, suas diagonais são congruentes?

IM: - Ainda não! Vamos provar a volta... temos que sair das diagonais congruentes.

IZ: - Diagonais do paralelogramo!

Discutiram e acharam que tinham provado. Ao verificarmos, constamos que tinham utilizado os triângulos retângulos ADC e BCD, ou seja, utilizaram na prova, exatamente o que queriam provar (que os ângulos eram retos!).



OA: - Eu tenho que chegar que os quatro ângulos são retos!

IZ: - Vamos usar o caso LLL.

IM: - Se a gente provar que a soma dos quadrados dos catetos ... mas ... e as medidas?

OU: - Vamos usar o perpendicularismo!

I: - Como sabemos que são perpendiculares?

OU: - Fizemos a figura!

I: - Mas queremos provar que são perpendiculares!

OU: - Certo!

IM: - Olha, e se eu provar que os quatro ângulos são congruentes? Eu já sei que a soma entre eles é 360 graus!

IM: - Se é paralelogramo, os ângulos opostos são iguais.

OA: - Isso! Então $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{D} \equiv \hat{B}$

IM: - Como as diagonais são congruentes, os triângulos ADC e BCD são congruentes (LLL), então $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

OA: - Mas $\hat{A} \equiv \hat{C}$ ...

IM: - Então $\hat{A} \equiv \hat{D}$ ...

OA: - Se $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{D} \equiv \hat{B}$ porque são opostos ...

SE: - Então os quatro são iguais!

Mesmo com o caminho da demonstração corretamente verbalizado, não a escreveram. Constatamos que a escrita de uma demonstração precisa ser trabalhada de forma mais detalhada.

O item f, questiona se as diagonais do retângulo se interceptam nos respectivos pontos médios. A professora IM diz que sim, pois o retângulo é um paralelogramo, e essa é uma propriedade do paralelogramo. O professor OA que, anteriormente disse não poder garantir que a intersecção se dava no ponto médio, concorda com a colega IM.

Com relação ao item g, que solicita a construção de um paralelogramo EFGH com diagonais congruentes, observamos a discussão a seguir:

OA: - É só fazer um retângulo!

SA: - A gente não mostrou que no paralelogramo as diagonais se cruzam no ponto médio? Não é isso que tem que fazer?

IM: - Eu estou fazendo isso mas, o meu está dando um quadrado! Já fiz duas vezes e dá quadrado!

I: - Explica como você está fazendo!

IM: - Eu coloquei dois Segmentos do mesmo tamanho, cruzando no ponto médio assim e assim (pelo que professora apontou, estava colocando uma diagonal na horizontal e a outra na vertical).

A professora mudou a posição inclinando uma das diagonais, e notou que poderia desenhar um quadrilátero que não fosse quadrado. A discussão continuou e concluíram:

OA: - Traçar dois segmentos congruentes se cruzando no ponto médio e ligar as diagonais.

I: - É um retângulo?

OA: - É, porque é um paralelogramo com diagonais que se cruzam no ponto médio.

IM: - Não é por isso! É porque elas são congruentes!

OA: - Eu não concordo!

IM: - Olha, a gente provou na aula anterior que em todo paralelogramo as diagonais se cruzam ao meio. Agora, se forem congruentes, aí é retângulo!

OA: - Ah sim! ... então fica assim: porque as diagonais se cruzam no ponto médio é paralelogramo mas, como elas são congruentes, aí é um retângulo!

O item h, questiona se é verdadeira ou falsa a afirmação: todo quadrilátero que possui as diagonais congruentes é um retângulo. Ouvimos:

SE: - Acho que é falsa, pode ser um quadrado!
OA: - É, pode ser um quadrado.
SE: - E quadrado não é retângulo?
OA: - É verdadeiro ou falso?
IM: - Todo quadrilátero não! Você já desenhou um que não é!
AS: - É falsa!

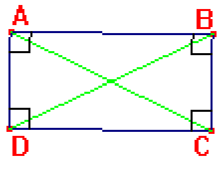
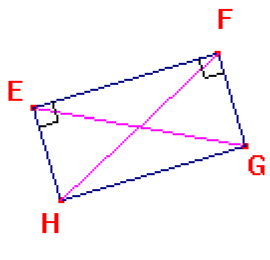
Falamos do contra exemplo.

I: - Nessa afirmação, qual é a hipótese?
SE: - Diagonais congruentes.
I: - Se estamos procurando um contra-exemplo, devemos tomar um quadrilátero com essa característica, mas que ...
OA: - ... não seja retângulo.

A professora SE tomou um caminho diferente: traçava quadriláteros que não fossem retângulos, depois conferia as diagonais.

Encontraram contra-exemplos e concluíram que a afirmação é falsa.

Institucionalização:

Enunciado verbal da propriedade	**Interpretação em Linguagem figural**	**Interpretação em linguagem matemática**
Se ABCD é um retângulo, então suas diagonais são congruentes		Hipótese: ABCD é um retângulo Conclusão: $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$
Se um paralelogramo tem diagonais congruentes então, o paralelogramo é um retângulo.		Hipótese: EFGH é um paralelogramo / EG=FH Conclusão: EFGH é retângulo.

A maior dificuldade constatada nessa atividade foi, novamente, com a demonstração, notamos que para provar que um paralelogramo é retângulo, utilizavam dois triângulos retângulos formados por dois lados consecutivos do paralelogramo inicial e uma das suas diagonais, ou seja, utilizavam como hipótese aquilo que queriam demonstrar.

ATIVIDADE 09

a) Explicar como você faria a construção de um quadrilátero LMNO cujos lados são congruentes. Fazer a construção.
b) É possível construir outro quadrilátero com lados congruentes, mas com ângulos diferentes do que você construiu no item (a) ? Construir.
c) Construir as diagonais destes quadriláteros. Medir o ângulo formado por elas.
d) Enuncie este resultado na forma de um teorema do tipo “se ... então”.
e) Demonstre este teorema.
f) Explicar como você construiria um paralelogramo RSTU cujas diagonais são perpendiculares. Fazer a construção. RSTU é um losango? Demonstre a sua resposta.

Objetivos

- Descrever os passos da construção de um quadrilátero com lados congruentes.
- Verificar experimentalmente, que o quadrilátero pode ser deformado, alterando a medida dos ângulos porém, conservando a congruência dos lados.
- Fazer conjeturas sobre a posição das diagonais do losango.
- Demonstrar que as diagonais do losango são perpendiculares.
- Concluir que, para traçar um desenho representando um losango, basta traçar as diagonais perpendiculares se interceptando no ponto médio.

Considerações didáticas:

Nessa atividade, estudamos outro caso particular do paralelogramo – o losango. Como na atividade anterior, também trabalhamos com construção, medidas, conjeturas, proposições equivalentes e demonstrações, por isso não nos alongamos nessas considerações.

Relato e comentários:

Em todos os encontros, formávamos um único grupo com todos os professores presentes. Para esta atividade, os professores foram discutindo de tal forma que, sem nenhuma intenção, se dividiram em dois grupos: um de ois e outro de quatro elementos.

Sobre o traçado de um quadrilátero com lados congruentes, observamos os comentários:

OA: - Eu fiz assim: Tracei uma reta. Pelo ponto médio dessa reta (??) tracei um segmento qualquer de maneira que o ponto médio desse segmento, coincida com o ponto médio da outra reta dada, na perpendicular.

I: - Não é um segmento qualquer?

OA: - Não! É perpendicular ao primeiro.

I: - Por que você acha que dessa forma os lados serão congruentes?

O professor poderia justificar dizendo que se os quatro lados são congruentes, os opostos também o são e, portando trata-se de um paralelogramo. No entanto, sobre o perpendicularismo das diagonais, não temos nada comprovado.

IZ: - Nós não acabamos de fazer com lados congruentes na atividade anterior?

IM: - Fizemos com diagonais congruentes.

IZ: - Se eu traçar duas retas paralelas.

OA: - Vamos ver se dá!

I: - Percebe que você está usando um fato que ainda não foi comprovado? A informação que temos para construir o quadrilátero é que os lados são congruentes.

IZ: - Se eu traçar retas paralelas e congruentes duas a duas, não sai?

A professora faz um desenho e diz:

IZ: - É! Dá certo! Vamos escrever: Dados dois lados paralelos ...

I: - Por que paralelos?

IZ: - Porque se não for paralelo não dá! Nós falamos sobre isso no paralelogramo.

I: - Então eu posso garantir que isso é um paralelogramo?

IZ: - Não.

SE: - (Olhando o material das aulas anteriores) Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos são congruentes.

I: - Se os quatro lados são congruentes então os opostos são congruentes, certo?

OA: - Com certeza!

IZ: - Então é mesmo um paralelogramo!

OA: - E se fizer dois triângulos invertidos? ... como você fez IM?

IM: - Peguei o compasso, marquei essa distância aqui, depois marquei aqui, aqui e fechei aqui.

OA: - Você pegou retas paralelas?

IM: - Não.

OA: - Mas e se você tivesse marcado mais pra cima?

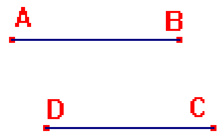
IM: - Espere um pouco ... vou ver direito o que foi que eu fiz.

IZ: - Veja o que eu fiz: Dadas duas retas paralelas, marque os pontos AB e na segunda marque os pontos CD congruentes.

I: - Pontos A, B, C e D tais que $\overline{AB}$ seja congruente a $\overline{CD}$, é isso que você quer dizer?

IZ: - Isso mesmo!

Fizemos o desenho abaixo na lousa e perguntamos: - Assim?

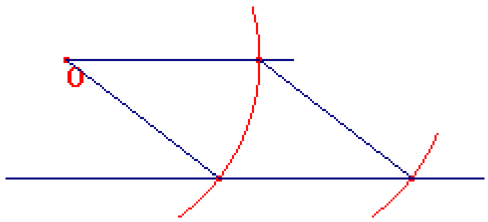


IZ: - Não! Antes de falar que são paralelas, eu tenho que falar na distância. Eu vou melhorar isso!

IM: - Foi assim que eu fiz: Tracei esse segmento de reta, marquei esse ponto O, ... não! ... tracei dois Segmentos! (Não informou que eram paralelos) Peguei o compasso com uma abertura qualquer ...

OA: - Qualquer, mas maior que a distância entre as paralelas!

IM: - É. Centrei em O e marquei esses pontos ... centrei aqui e marquei aqui. (O desenho ficou como o representado abaixo)



SE: - O nosso não saiu! (trabalhava com IZ)

IZ: - Eu vou ditar e vocês tentam desenhar: Dada uma reta qualquer, marque sobre ela um ponto AB. Não! Um ponto A e um ponto B ... um segmento AB. Usando o compasso com a ponta seca em A e abertura AB trace uma circunferência. Faça o mesmo em B. Trace no ponto A uma reta tangente a B.

I: - Tem como traçar uma reta tangente a um ponto?

IZ: - Trace uma tangente passando pelo ponto! Depois trace por B uma tangente à circunferência A.

I: - A é circunferência ou ponto?

IZ: - Então como fica?

I: - Não seria melhor a circunferência centrada em A ou B?

IZ: - Tá bom! Trace por B uma reta tangente à circunferência centrada em A.

IM: - Mas eu posso traçar essa reta de qualquer ponto!

IZ: - Não ... eu falei o ponto!

IM: - Mesmo assim!

OA: - Não! A tangente tem que ser perpendicular.

IM: - Ah é!

IZ: - Feito isso, trace o segmento $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$ com raio $\overline{AB}$.

OA: - Onde é esse D?

IZ: - Eu estou mandando traçar! Trace uma reta!

OA: - Onde?

IZ: - Trace uma reta com raio $\overline{AB}$!

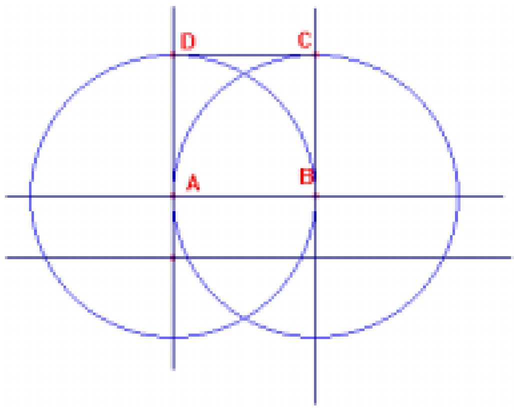
IM: - Reta com raio?!

IZ: - Trace uma reta paralela a $\overline{AB}$, tangenciando as duas circunferências.

OA: - Onde? Em cima ou em baixo?

IZ: - Tanto faz! Marque o ponto CD no cruzamento da tangente.

O que pretendiam ver desenhado pelos outros está representado abaixo.



O item b, questiona se é possível obter outro quadrilátero com lados congruentes, mas com ângulos diferentes. Observamos os comentários:

IM: - O nosso dá! Mas o de vocês só sai quadrado.

IZ: - Mas eu pensei num quadrado, pois os lados têm que ser iguais!

SE: - É! Essa receita só sai quadrado!

IZ: - Eu vou apagar tudo!

SE: - Não! Está perguntando se é possível obter outro. A sua resposta é não!

IM: - Vamos ver o nosso: aqui, para mudar o ângulo, eu tenho que mudar o tamanho do lado.

OA: - Hum! ...se eu mudar...se eu trouxer a paralela mais próxima?

IM: - Vamos fazer? ... (desenhando) Dá mesmo!
OA: - Se eu aproximo as paralelas, eu diminuo esse ângulo.

Neste momento comentamos sobre o programa Cabri-Geometre que permite arrastar essas paralelas e observar a alteração das medidas dos ângulos. Os professores manifestaram interesse em conhecê-lo.

Os professores traçaram as diagonais e verificaram que são perpendiculares. Vamos aos comentários:

IZ: - O meu dá 90 graus.
SE: - O meu também!
OA: - Mesmo mudando o ângulo as diagonais continuam paralelas!
SA: - É! Se você deita uma pra cá, a outra deita também e continua 90 graus.
SE: - A forma “se ... então” vai ficar: o quadrilátero LMNO é um paralelogramo ...
IZ: - Se o quadrilátero tem os lados congruentes, então as diagonais ...
SE: - São perpendiculares! É isso?
OA: - Agora temos que provar!

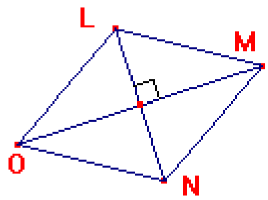
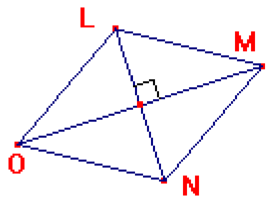
Discutiram e encontram um caminho para demonstrar que as diagonais formam quatro ângulos congruentes. Não escreveram a demonstração de forma rigorosa, mas fizeram suas anotações.

Quanto à construção de um paralelogramo com diagonais perpendiculares, concluíram:

- Traçar um segmento e levantar uma perpendicular a ele passando por seu ponto médio (não é paralelogramo?). Tomar o compasso com abertura qualquer centrado no ponto médio e marcar esses dois pontos aqui, quer dizer que esse ponto é médio dos dois segmentos. É um losango porque as diagonais são perpendiculares e se cruzam no ponto médio.

Passamos à institucionalização e registramos as propriedades demonstradas nessa atividade na tabela abaixo:

Losango

Enunciado verbal da propriedade	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
Todo losango tem diagonais perpendiculares		Hipótese: LMNO é losango Conclusão: $\overline{LN} \perp \overline{MO}$
Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.		Hipótese: LMNO é paralelogramo e $\overline{LN} \perp \overline{MO}$ Conclusão: LMNO é losango.

Notamos com essa atividade, que os professores já se soltaram mais em relação à escrita da demonstração e tentavam redigi-la. Essa tentativa revelou a dificuldade que os professores têm em lidar com termos próprios da redação de textos matemáticos, ou seja, com o registro em linguagem matemática, ouvimos expressões do tipo: ponto médio da reta; pontos AB e pontos CD congruentes; reta tangente a um ponto; reta com raio AB. Não acreditamos que essas expressões sejam conseqüência de falhas conceituais e sim, do pouco contato com registro discursivo. No entanto, caberia aqui uma investigação.

ATIVIDADE 10

a) Explicar como você construiria um quadrilátero plano UVWZ que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Fazer a construção.
b) Que quadrilátero é este?
c) Construir as diagonais de UVWZ. Elas são perpendiculares? Elas são congruentes? Demonstrar sua resposta.

Objetivo:

- Verificar que o quadrado é ao mesmo tempo, um retângulo e um losango.

Considerações didáticas:

Estudamos nessa atividade, mais um caso particular do paralelogramo – o quadrado – que também é um caso particular do losango e do retângulo.

Para construir o quadrilátero UVWZ solicitado no item *a,* podemos partir de um par de retas paralelas, traçar outro par de reta paralelas entre si que sejam perpendiculares ao primeiro par de tal forma que a distância entre elas seja a mesma distância entre as restas do primeiro par. Também podemos considerar que se os quatro ângulos são congruentes, então os opostos também o são, assim, UVWZ é paralelogramo. Logo, suas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios. O quadrilátero é ao mesmo tempo um losango e um retângulo e, vimos nas atividades anteriores, que o losango tem diagonais perpendiculares e o retângulo tem diagonais congruentes. Ora, para construir o quadrilátero solicitado, basta traçar dois segmentos congruentes, perpendiculares entre si que se interceptam nos respectivos pontos médios.

Relato e comentários:

Depois de um tempo de discussões, registramos os comentários:

IZ: - Nosso desenho da atividade nove era um quadrado!

OA: - Vamos fazer assim: traçar duas paralelas.

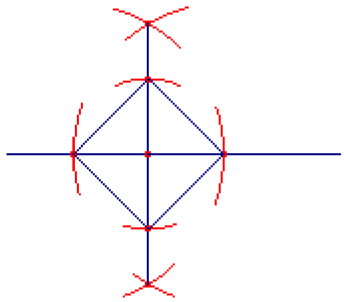
IM: - É, porque vai ser paralelogramo.

SE: - Eu fiz esse segmento, com o compasso eu marquei esses pontos, tracei a perpendicular aqui, liguei as extremidades ... e deu um Quadrado!

I: - Você começou pelas diagonais?

SE: - É!

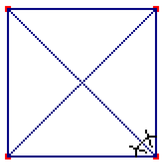
I: - Por quê? As informações falam dos lados e dos ângulos.



O desenho que a professora havia construído está representado acima. Porém, em sua explicação faltam informações que levem a ele. Notamos que a professora estava utilizando propriedades do quadrado, que ainda não havíamos provado especificamente para o quadrado, mas já havíamos visto para o retângulo (diagonais congruentes) e para o losango (diagonais perpendiculares). No entanto a professora não justificava o motivo pelo qual sua figura era um quadrado. Tentamos investigar o que estava pensando:

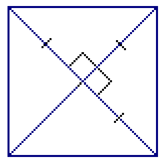
I: - O fato das diagonais serem perpendiculares lhe garante o quê?

SE: - O ângulo de 90 graus! Se aqui dá 45 e aqui dá 45 (indicando os ângulos assinalados) então, tenho 90!



A professora AS interferiu:

AS: - Veja, se aqui é 90º e esse lado é igual a esse, o triângulo é isósceles. Esse outro, é congruente ao primeiro ...



Bastava comprovar que os outros dois triângulos também eram congruentes ao primeiro.

SE: - Eu não vejo erro na minha construção! Eu sei que isso é um quadrado, mas não sei escrever isso!

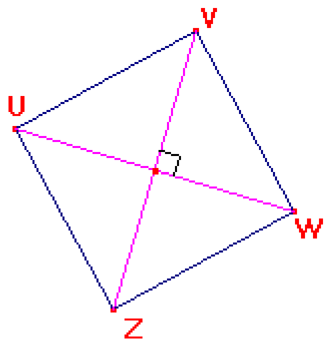
De fato, o que as professoras estavam propondo estava correto, porém não estavam conseguindo justificar.

OA: - Veja como eu fiz: Tracei duas paralelas. Marquei um ponto U sobre uma delas, levantei uma perpendicular no cruzamento desta com a outra reta. Marquei o ponto V. Centrei o compasso em V com abertura UV marquei o ponto W e depois o ponto Z. Uni tudo! É um quadrado porque os lados são congruentes e os quatro ângulos também. Eu medi as diagonais, vi que elas são congruentes. Agora tenho que demonstrar.

O professor esboçou informalmente uma demonstração. O caminho estava correto.

Notamos aqui, que o professor não está confiando apenas no desenho já sentindo necessidade da demonstração.

Institucionalização:

Quadrado:Enunciado verbal da propriedade	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
Todo quadrado tem diagonais perpendiculares e congruentes.		Hipótese: UVWZ é quadrado Conclusão: $\overline{UW} \perp \overline{VZ}$ e $\overline{UW} \equiv \overline{VZ}$

ATIVIDADE 11:

Exercício 1

Mostrar que as condições dadas em cada item são suficientes para que o quadrilátero ABCD seja do tipo indicado.

Enunciar cada afirmação na forma de um teorema do tipo “se ... então”.

a) Paralelogramo – Diagonais cortando-se ao meio.
b) Retângulo – Paralelogramo com um ângulo reto.
c) Losango – Diagonais bissetrizes dos ângulos internos.

Exercício 2 (baseado em atividades do Projeto Fundão/UFRJ)

Dobrar uma folha retangular duas vezes, paralelamente às duas bordas.

Dobrar o retângulo obtido depois das duas primeiras dobras, ao longo da diagonal que não contém que não contém as pontas da folha original.

Abrir o papel e riscar com régua, as marcas da última dobra. A respeito da figura contornada, responda:

a) Que tipo de figura é essa? Por quê?
b) Qual a relação entre as diagonais dessa figura e as dimensões do retângulo original? Qual a relação entre os oito triângulos formados pelas dobras?
c) Qual a relação entre as áreas do retângulo inicial e a do losango formado?
d) Você pode garantir que todo losango pode ser inscrito num retângulo? Como?

Exercício 3

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo. Se for verdadeira, provar. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

a) Todo quadrilátero tem os lados opostos paralelos.
b) Todo quadrado é um losango.
c) Todo quadrilátero tem os lados opostos congruentes.
d) Num paralelogramo RSTU, a diagonal $\overline{RT}$ é a bissetriz do ângulo $U\hat{R}S$.
e) As bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares.
f) Todo quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares é um losango.
g) Todo quadrilátero cujas diagonais são congruentes é um quadrado.

Exercício 4

Justifique as afirmações:

Para demonstrar que um quadrilátero é um:

a) <u>Retângulo</u>, basta mostrar que é um paralelogramo que tem um ângulo reto.
b) <u>Losango</u>, basta mostrar que é um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes.
c) <u>Quadrado</u>, basta mostrar que é um losango com um angulo reto.

Considerações:

Esta atividade não foi desenvolvida em sala durante as atividades da oficina, pois precisaríamos de mais um encontro e não tivemos condições de reunir todos os professores para esse novo encontro. Explicamos que a atividade envolve os conceitos discutidos nas atividades anteriores e que o seu objetivo é utilizar esses conceitos como ferramenta em novas situações. Os professores ficaram de resolvê-la em casa.

CAPÍTULO IV

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sobre formação de professores, os autores que lemos contribuíram para o desenvolvimento dessa dissertação da seguinte forma: nos baseamos em CARRASCOSA e PONTE para justificar o fato de trabalharmos conteúdos nesse projeto, já que esses autores comentam a importância em se dominar os conteúdos que se ensina; ALMOULOUD E MELLO, GOUVEA, LORENZATO e PEREZ afirmam que muitos professores não detêm conhecimentos em geometria suficientes para desenvolverem um bom trabalho com seus alunos; FLEMMING, CUNHA E KRASILCHICK, PEREZ nos falam sobre a necessidade da formação continuada; nos baseamos em PONTE e em PERRENOUD para justificar o fato de trabalharmos com conhecimentos didáticos, pois esses autores afirmam que esses conhecimentos permitem ao professor encontrar maneiras mais adequadas de apresentar matérias de ensino.

Acreditamos que a metodologia adotada foi importante pois, permitiu que o professor participante, vivenciasse dois momentos: o primeiro como se ele estivesse na posição do aluno, resolvendo situações-problema selecionadas por outra pessoa, sentindo e superando eventuais dúvidas ou dificuldades; no segundo momento, o professor realiza uma reflexão sobre pesquisas inerentes ao ensino e aprendizagem, tendo a oportunidade de relacioná-las com seu trabalho com os alunos.

Nossa questão de pesquisa foi: como trabalhar com formação de professores de forma a contribuir com saberes referentes à geometria e, ao mesmo tempo, proporcionar aprimoramento em conhecimentos didáticos inerentes a esse conteúdo? As duas primeiras categorias que estipulamos para observar a participação dos professores, contribuíram para constatar que a forma como desenvolvemos a oficina, proporcionou ao participante momentos de reflexão sobre alguns pontos de dificuldades em geometria. Citamos alguns exemplos:

- Para garantir se uma figura representa ou não um objeto geométrico, deve-se compará-lo à definição que está sendo considerada para o objeto: um paralelogramo pode ser um trapézio ou não, dependendo da definição de trapézio.
- As diagonais de um polígono nem sempre são internas. Ouvimos dos professores: "... a idéia que temos, é que diagonal é dentro!"
- A classificação do conjunto dos quadriláteros em subconjuntos, depende dos critérios adotados.
- Existe diferença entre dizer que um quadrilátero *tem um par de lados paralelos* e que *tem exatamente um par de lados paralelos.*
- A base de um trapézio não precisa ser paralela ao plano horizontal. Ouvimos: "A gente tem idéia de base, o apoio em baixo, sempre na horizontal. Acho que a gente toma a nossa base que é o chão!"
- Existem notações que são utilizadas para diferentes significados. Ouvimos de uma professora: "Mas isso muda? Pensei que fosse padrão!".
- Não podemos generalizar fatos observados apenas experimentalmente: a atividade 5 solicita a construção de um quadrilátero com um par de lados paralelos, a professora SA desenhou um retângulo e, a princípio, concordou que poderia afirmar que o desenho solicitado representaria um paralelogramo, já que o desenho que construíra era um retângulo. Ao verificar o desenho dos outros professores, concluiu que estava equivocada. Em outra situação, atividade 6, levantaram uma conjetura sobre uma propriedade do trapézio, através da medição de seus ângulos e não sentiram necessidade de demonstrá-la, alegando que construíram

trapézios diferentes e “valeu para todos os que fizemos, então vale para todo trapézio.” Nas atividades que se seguiram, já não se falava em generalizações sem a devida demonstração.

- Para demonstrar não podemos usar a conclusão.
- O recíproco de um teorema pode não ser verdadeiro. Notamos que no primeiro contato com teorema recíproco, um professor estranhou o fato da atividade (07) solicitar a verificação da veracidade do recíproco, indagando: “Pode não ser?”. Nas atividades seguintes já se procurava caminhos para constatar se o recíproco do teorema estudado era verdadeiro.

Com relação à demonstração, constatamos que a oficina contribuiu no sentido de chamar a atenção para sua necessidade, os professores avançaram, visto que na primeira atividade com demonstrações, não conseguiam utilizar a ferramenta sugerida (paralelas cortadas por uma transversal) e nas últimas, já conseguiam explicitar o caminho da demonstração. No entanto, a oficina não deu conta de desenvolver conhecimentos a ponto do professor escrever sozinho uma demonstração completa. Se faz necessário um estudo mais profundo sobre demonstrações.

Mesmo assim, acreditamos que nossa primeira hipótese foi validada. Ou seja, a oficina proporcionou ao professor participante o aprimoramento de conceitos relativos a geometria.

As quatro últimas categorias estão relacionadas com a segunda parte da nossa questão. Elas contribuíram para verificar se, de alguma forma, a oficina proporcionou ao participante, conhecimentos didáticos inerentes ao ensino de geometria.

O enfoque que demos sobre a Teoria das Situações, subsidiou os professores no sentido de refletir sobre a forma de organizar e coordenar situações de aprendizagem. Observamos que os professores desse grupo se deram conta que não têm apresentado aos alunos atividades que lhe permitam vivenciar todas as fases propostas por Brousseau. Vejamos alguns momentos que nos revelam esse fato. Durante a discussão gerada pelo item 4 da atividade 1, ouvimos:

- “Já pensou se na sala de aula os alunos gerassem essa discussão?”.
- “Aqui tem uma grande vantagem: está todo mundo quietinho, concentrado...”

Mais adiante:

- “Um dos problemas da sala de aula, é que a gente despeja muita coisa de uma vez só.”
- “E rápido! Senão eles ficam dispersos, então a gente vai soltando outra coisa... eles não param para analisar.“
- “E a gente não deixa parar também né! Se parar, a sala cai!”

No último encontro, depois que discutimos as fases propostas por Brousseau, ouvimos:

- “Eu concordo que às vezes, a gente faz muita coisa errada ...”
- “Mas não é por querer! A gente não tem consciência do que está fazendo! A gente faz uma transferência: eu sei assim, vou ensinar assim ... e não deixa o aluno crescer!”
- “Eu nunca pensei em deixar o aluno desenhar! Eu sempre desenhei! A gente não passa por aqui (apontou a fase de ação), nem por aqui (formulação), muito menos por aqui (validação)! Vamos direto aqui!” (institucionalização)

O fato do professor reconhecer que pode estar errando em sua forma de trabalhar por não ter “consciência do que está fazendo”, já é um grande avanço em direção ao estabelecimento de vínculos com teorias subjacentes às atividades de aprendizagem. Constatamos que nosso trabalho, de certa forma, ofereceu subsídios para que o professor reflita sobre essa competência descrita por Perrenoud, pois esse reconhecimento o faz perceber a necessidade de verificar o que dizem pesquisas em Educação Matemática que lhe forneçam parâmetros para decidir sobre escolhas relacionadas à forma de trabalhar.

Os professores comentaram que uma das dificuldades em trabalhar seguindo essas fases consiste no fato que seus alunos já vêm habituados com o professor apresentando tudo pronto que, quando propõem alguma atividade em que precisam descobrir sozinhos, eles (os alunos) pressionam tanto para que o professor faça, que eles (os professores) acabam cedendo. Uma professora comentou que em certa ocasião, um aluno lhe perguntou sobre o significado de um determinado símbolo e ela sugeriu que ele fizesse uma pesquisa. O aluno lhe perguntou: “Por que professora? Você não sabe?” Segundo a professora, ela se sentiu na obrigação de responder para mostrar que sabia. Outra professora comenta que sente dificuldade em despertar a atenção do aluno para uma situação, para ele, o professor tem obrigação de resolver, como se pensasse: “Você tem obrigação de me falar como faz!”

O último comentário relatado no parágrafo anterior, está relacionado com o que BROUSSEAU chama de *devolução do problema* um dos primeiros momentos da teoria das situações, em que o aluno toma para si a responsabilidade de encontrar uma solução para o problema proposto. Constatamos que os professores têm grande dificuldade em provocar essa devolução.

Também comentaram a dificuldade que têm em modificar a forma de trabalhar, no sentido de não interferir no raciocínio do aluno: “Dá vontade de pegar e fazer! Se o aluno mostra alguma coisa com erro, dá vontade de falar logo: corrige aqui ... o jeito certo de fazer é esse ... a gente tem que se cuidar muito para se controlar!” Como pesquisadora, também senti dificuldades em relação a esse controle, em determinados momentos eu apresentava respostas de forma precipitada.

No início das atividades da oficina, notamos que os professores de um modo geral, viam o livro didático como algo inquestionável. Verificamos que essa visão foi se modificando até que no último dia, ouvimos a seguinte discussão:

IZ – Depois desse curso, eu estou olhando os livros didáticos com outros olhos.

SE - Ah! Isso é verdade. Principalmente com relação às definições!

SA – ... eu sempre queria seguir o que os outros faziam, com o risco de cometer inclusive, os erros da pessoa. Eu me subestimava ... mas vi que também posso pensar diferente do que está ali (apontou o livro didático)!

No que diz respeito à visão de pesquisa, também constatamos alguns avanços. Por exemplo, nos primeiros encontros, um professor demonstrou ter uma certa aversão a pesquisadores (o professor dizia *pedagogos*) pelo fato deles não estarem lecionando para alunos do ensino fundamental ou médio. No último encontro, ouvimos do mesmo professor: "... eu vou te falar uma coisa: eu sempre fui muito ranzinza com algumas coisas, mas, de uns tempos pra cá estou aberto a mudanças. Depois que falamos dos *pedagogos*, eu comecei a enxergar de uma outra forma. Eu gosto de ensinar, eu amo o que faço e tenho o meu jeito de ensinar. Mas, de repente, quando a gente vê essas coisas que você colocou aqui, a gente vê que falta alguma coisa!" Interpretamos que o professor agora aceita que essa "alguma coisa" que sente falta, pode ser procurada em pesquisas inerentes a aprendizagem.

Quanto a registros de representação, observamos que esses professores não tinham, até então, refletido sobre o seu uso em matemática. Comentaram que a pesquisa de Duval serviu para perceberem que não passam para o aluno as diversas formas de registrar objetos matemáticos.

Diante da constatação das dificuldades que têm em registrar resultados em linguagem natural, uma professora levantou um questionamento: "Será que quando o aluno faz alguma coisa errada, não foi a gente que passou uma mensagem errada achando que estava certo?" Notamos aqui, que o contato com a pesquisa de Duval, já levou a professora a uma reflexão relacionando a teoria vista com sua prática em sala de aula.

Nossa segunda hipótese, era que a discussão do referencial teórico provocaria no grupo, reflexões sobre sua forma de trabalhar em sala de aula. Os comentários acima citados, nos revelam que a reflexão aconteceu. Sendo assim, nossa segunda hipótese, também foi validada. Resta agora saber, se aconteceram mudanças na forma desse grupo de professores trabalhar com seus alunos, mas isso fica como sugestão para outra investigação.

Entendendo *formação de professores* como área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que estuda o processo através dos quais os professores se implicam em experiências de aprendizagem em que adquirem ou melhoram os seus conhecimentos e competências com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem[25], nossa pesquisa nos mostrou que é possível contemplar em um projeto de formação, tanto os aspectos conceituais quanto os aspectos didáticos da geometria.

Sugerimos que, ao planejar projetos de formação de professores, não devemos pensar apenas em um conteúdo pré-fixado, pois constatamos que o professor tem interesse e necessidade de discutir assuntos que, muitas vezes, não programamos. No caso específico dessa pesquisa, notamos necessidade de discutir sobre uso de calculadoras, problemas inerentes à faixa etária dos alunos, contextualização da matemática, como lidar com alunos especiais ... Sugerimos então, que em projetos de formação, esteja previsto a participação de outros profissionais (formadores) capacitados a discutir com os professores os assuntos que surgirem.

[25] Conforme GARCIA.

BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.* CEMA (Caderno de educação matemática), v. III. São Paulo: PUC, 1997.

ALMOULOUD, Saddo Ag; MELLO, Elizabbeth Gervazoni Silva de. Iniciação à demonstração aprendendo conceitos geométricos. 23ª reunião da ANPED. Internet. 2000

ALONSO, Myrtes. Formar professores para uma escola nova. In: ALONSO, Myrtes (org). *O trabalho docente.* São Paulo: Pioneira, 1999.

ANDRÉ, Marli e LÜDKE, Menga. *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU, 1986.

AZANHA, José Mário Pires. Comentários sobra a formação de professores em São Paulo. In: SERBINO, Raquel Volpato et al (Org). *Formação de Professores.* São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 1998. p. 49- 58.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana.* Rio de Janeiro: SBM, 1985.

BONGIOVANNI, Vincenzo; CAMPOS, Tânia M. M.; ALMOULOUD, Saddo A. *Descobrindo o Cabri-Géomètre. Caderno de atividades.* São Paulo: FTD, 1997.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodoes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique de mathématiques*. Paris, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

__________. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecícilia; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da matemática reflexões pedagógicas.* Porto Alegre: ARTES MÉDICAS, 1996. p. 48-72.

CARRASCOSA, Jaime. Análise da formação continuada e permanente dos professores de ciências ibero-americanos. In: MENEZES, Luis Carlos de (Org). *Formação continuada de professores de Ciências no âmbito ibero-americano.* Trad. SCHIMIDT, Inês P. e SALÉM, Sonia. Campinas: Autores Associados; São Paulo: NUPES, 1996.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org). *Aprendendo e ensinando geometria.* Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1996.

CUNHA, Ana Maria de O; KRASILCHIK, Myriam. A formação continuada de professores de ciências: percepções a partir de uma experiência. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23., set. 2000, Caxambu – MG. Educação não é privilégio: anais. Caxambu: ANPED, 2000. 1 cd.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Tempo da escola e tempo da sociedade. In: SERBINO, Raquel Volpato et al (Org). *Formação de Professores.* São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 1998. p. 239-250.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penssé.*Annales de Didactique et de Sciences Cognititives.*5 (1993) (p. 37-65) IREM de Strasbourg.

__________. *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Paris: Peter Lang, 1995.

FLEMMING, Diva Marília. Formação continuada no contexto da educação matemática: Reflexões e experiências. IV CIBEM, jul. 2001. Bolívia.

FONSECA, Maria da Conceição F. R., et al. *O ensino de geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Situações didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Educação matemática: uma introdução.* São Paulo: EDUC, 1999.

GARCIA, Carlos Marcelo. *Formação de professores para uma mudança educativa.* Coleção ciências da educação século XXI. Portugal: Porto Editora,1999.

GOUVÊA, Filomena A. Teixeira. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental .* São Paulo, 1998. Dissertação de Mestrado – PUC/SP.

GUELLI, Oscar. *Coleção Matemática uma aventura do pensamento*. São Paulo: Ática, 2001.

GRASSESCHI, Maria Cecília C.; ANDRETTA, Maria Capucho; SILVA, Aparecida Borges dos Santos. *Coleção Promat: projeto oficina de matemática.* São Paulo: FTD, 1999.

HERSHKOWITZ, Rina; BRUCKHEIMER, Maxim; VINNER, Shlomo. Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org). *Aprendendo e ensinando geometria.* Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1996.

HOFFER, Allan. Van Hiele- based Research. In *Acquisition of matematical concepts and processes.*Trad. Clenisa T. Curti. Nova Iorque: Academics Press, 1983.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar.* São Paulo: Atual, 1985.

LIMA, Elon Lages. *Medida e forma em geometria.* Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LINS, Rômulo. Caminhos da educação matemática no Brasil. *Encontro brasileiro de estudantes de pós-graduação em educação matemática* (4:2000: Rio Claro, SP). Anais. Rio Claro: UNESP, 2000.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *Educação em Revista* , Rio de Janeiro, n. 4, p. 4-13, 1995.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). *Educação matemática: uma introdução.* São Paulo: EDUC, 1999.

MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática – 5ª a 8ª séries. Brasília: 1998.

NASSER, Lílian. Níveis de Van Hiele: Uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria? *Boletim GEPEM,* Rio de Janeiro, n. 29, p. 31-35, 1991.

NASSER, Lílian e SANT'ANA, Neide P. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele.* Rio de Janeiro: Projeto Fundão, IM/UFRJ, 1998.

NÓVOA, António. Relação escola – sociedade: "Novas respostas para um velho problema". In: SERBINO, Raquel Volpato et al (Org). *Formação de Professores.* São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 1998. p. 19 -39.

PASTOR, Adela Jaime; RODRIGUEZ, Angel Gutiérrez. Una propuesta de fundamentacion para la enseñanza de la geometria: el modelo de Van Hiele. In: CISCAR, Salvador L; GARCÍA, Maria V. Sanches. Teoria y practica em educacion matemática. Sevila: Ediciones Alfar, 1990.

PAVANELLO, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*, Campinas, ano 1, n. 1, p. 7-17. 1993.

PEREZ, Geraldo. A realidade sobre o ensino de geometria no 1º e 2º graus, no estado de São Paulo. *Educação Matemática em Revista* , SBEM, n. 4, p. 54-62, 1995.

PERRENOUD, Philippe. Formar professores em contextos sociais em mudança. Prática reflexiva e participação crítica. *Revista Brasileira de Educação*. n. 12, p.5-21, set/out/nov/dez. 1999.

PONTE, Joao Pedro da, O desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Revista Educação e Matemática*. Lisboa. n. 31, p. 9-12 e 20. 1994.

___________________, Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de matemática. www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/ind_uk.htm-36k

RIBAS, Mariná Holszmann. *Construindo a competência - Processo de formação de professores*. São Paulo: Olho d'Água, 2000.

SCIPIONE. *Coleção Matemática Scipione, conceitos e historias.* São Paulo: Scipione, 1995.

TINOCO, Lúcia A. A. Geometria Euclidiana por meio da resolução de problemas. Rio de Janeiro: IM/ UFRJ, 1999.

Endereços eletrônicos

http://www.anped.org.br

www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte

ANEXO I

Cianorte, 14 de maio de 2001.

Prezado Professor de Matemática

Nós, professores de matemática, sabemos das dificuldades que encontramos para desenvolver nosso trabalho com a geometria em sala de aula. Pesquisas apontam inclusive, um abandono do ensino da geometria no Brasil nas últimas décadas.

Nos encontramos diante de um fato: fomos formados numa época em que o ensino da geometria já vinha sendo negligenciado, mas precisamos trabalhar com ela em nossas aulas. Este fato provoca conseqüências tais como nossa insegurança diante das aulas de geometria.

Na tentativa de amenizar estas conseqüências, estamos propondo como parte da nossa dissertação de mestrado em Educação Matemática, pela PUC/SP, a formação de um grupo de estudos, composto por professores de matemática do ensino fundamental e médio, com o objetivo inicial de discutir alguns conceitos geométricos e teorias relacionadas ao ensino de geometria.

Caso você tenha interesse em fazer parte deste grupo de estudos, ou queira obter maiores informações, por favor, entre em contato conosco pelo telefone (44) 629 2676 ou pelo e-mail maioli@cianet.com.br.

Atenciosamente,

Marcia Maioli.

ANEXO II

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Programa de Mestrado em Educação Matemática
Mestranda – Marcia Maioli
Orientador – Dr. Saddo ag Almouloud

Prezado professor:

O objetivo deste questionário é recolher dados para traçar o perfil dos professores participantes deste projeto.

1) Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

2) Idade: ( ) Até 20 anos ( ) de 21 a 30 anos ( ) de 31 a 40 anos
( ) de 41 a 50 anos ( ) mais de 50 anos

3) Há quanto tempo leciona matemática?
( )até 2 anos ( ) de 2 a 5 anos ( ) de 5 a 10 anos
( ) de 10 a 20 anos ( ) mais de 20 anos

4) Em que grau(s) de ensino leciona?
( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio ( ) ensino Superior

5) Você leciona quantas aulas por semana? ....

6) Em quantas escolas você leciona atualmente?
( ) uma ( ) duas ( )três ( ) quatro ou mais

7) Você trabalha, atualmente, em escolas: ( ) Públicas ( ) Particulares

8) Qual a sua formação acadêmica/profissional?
( ) Não graduado
( ) Graduado em Matemática (Bacharelado)
( ) Graduado em Matemática (Licenciatura) ( ) Curta ( ) Plena
( ) Graduado em Ciências (Licenciatura) ( ) Curta ( ) Plena
( ) Graduado em outro curso. Qual? ....
( ) Pós Graduado. Qual curso/instituição? ....

9) Nos últimos três anos você fez ou está fazendo algum curso, participou de algum congresso?
( ) Não ( ) Sim. Qual(is)? (nome, instituição, duração)
....
....
....
....

10) Você conhece os Parâmetros Curriculares Nacionais com relação ao tema *Geometria* ?   (   ) Não   (   )Sim. Neste caso, qual é a sua opinião sobre os PCN?
....
....
....

Obrigada!

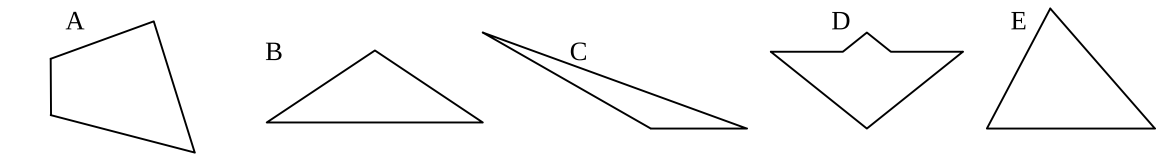
ANEXO III

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Programa de Mestrado em Educação Matemática
Mestranda – Marcia Maioli
Orientador – Dr. Saddo ag Almouloud

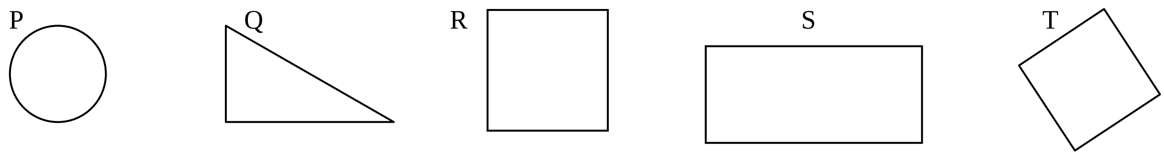
Nome: ....

Os Exercícios a seguir foram adaptados do teste de Van Hiele[26]

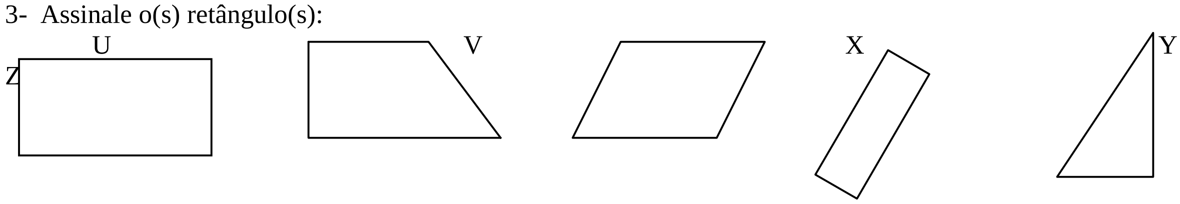
1 - Assinale o(s) triângulo(s):



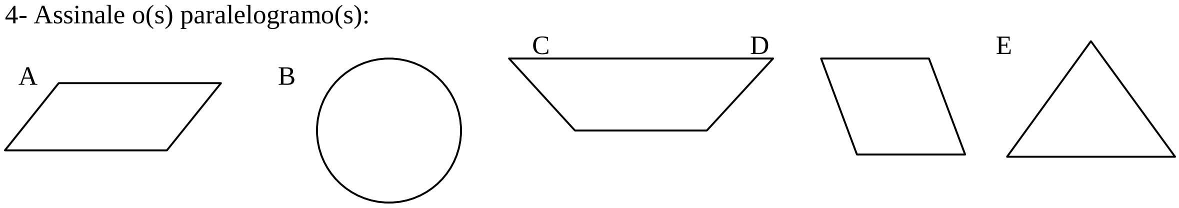
2 - Assinale o(s) quadrado(s):



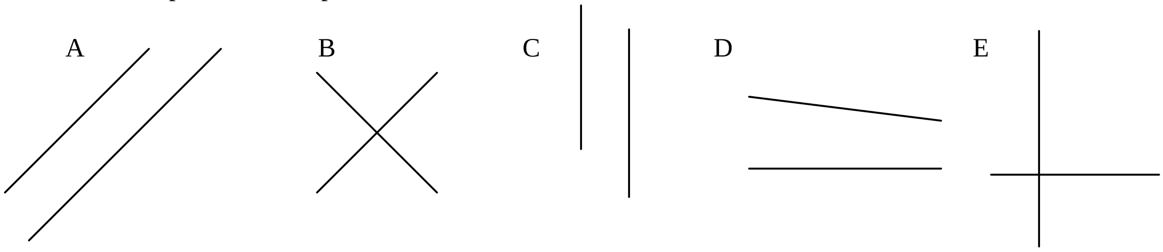
3- Assinale o(s) retângulo(s):



4- Assinale o(s) paralelogramo(s):



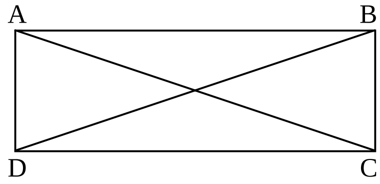
5 - Assinale os pares de retas paralelas:



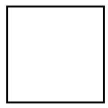
[26] Ver Nasser e Santana, 1998

6- No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais.
Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os quatro lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

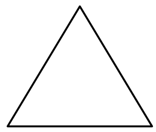


7 - Dê 3 propriedades dos quadrados:
1 - ....
2 - ....
3 - ....

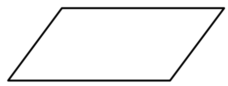


8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a alternativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.
b) Um dos ângulos mede 90º.
c) Dois ângulos têm a mesma medida.
d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
e) Nenhuma das alternativas é verdadeira.

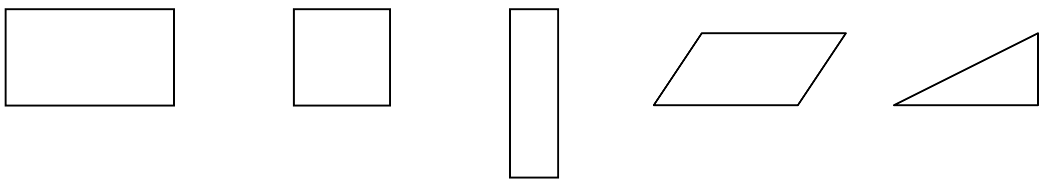


9 – Dê três propriedades dos paralelogramos:
1- ....
2- ....
3- ....



10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

11 – Assinale a (s) figura (s) que pode (m) ser considerada (s) retângulos:



12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.
a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?   ....
b) Por que? ....
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ....

13 – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? ....
Por que? ....

14 – Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.
(II) A figura X é um triângulo.

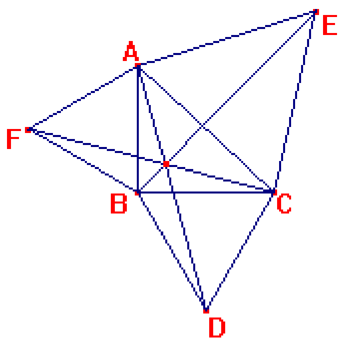
Assinale a afirmativa verdadeira:

(a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
(b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
(c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
(d) I e II não podem ser ambas falsas.
(e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

16 – O triângulo ABC é retângulo. Sobre os lados de ABC foram construídos triângulos eqüiláteros ACE, ABF e BCD.
A partir desta informação, pode provar-se que AD, BE e CF têm um ponto em comum.
O que é que esta afirmação lhe diz:



A) Só neste triângulo desenhado podemos ter a certeza de que AD, BE e CF têm um ponto comum.
B) Em alguns, mas não em todos os triângulos retângulos, AD, BE e CF têm um ponto comum.
C) Em qualquer triângulo retângulo, AD, BE e CF têm um ponto comum.
D) Em qualquer triângulo, AD, BE e CF Têm um ponto comum.
E) Em qualquer triângulo eqüilátero AD, BE e CF Têm um ponto comum.

17 – Eis três propriedades de uma figura:

I. Tem diagonais de igual comprimento.
II. É um quadrado.
III. É um retângulo.

A) I implica II, que, por sua vez, implica III.
B) I implica III, que, por sua vez, implica II.
C) II implica III, que, por sua vez, implica I.
D) III implica I, que, por sua vez, implica II.
E) III implica II, que, por sua vez, implica I.

18 – Considere as duas proposições:

I. Se uma figura é um retângulo, então as suas diagonais bissectam-se.

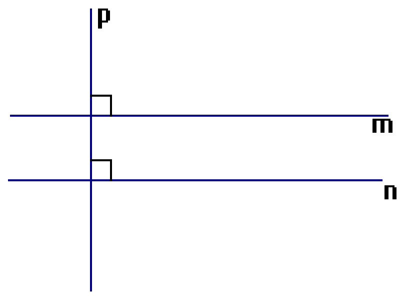
II. Se as diagonais de uma figura se bissectam, então a figura é um retângulo.

Qual é verdadeira?
a) Para provar que I é verdadeira, Basta provar que II é verdadeira.
b) Para provar que II é verdadeira, basta provar que I é verdadeira.
c) Para provar que II é verdadeira, basta encontrar um retângulo cujas diagonais se bissectem.
d) Para provar que II é falsa, basta encontrar uma figura que não seja um retângulo cujas diagonais se bissectem.
f) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.]

19) Em Geometria:
a) Cada termo pode ser definido e cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.
b) Cada termo pode ser definido mas é necessário saber que certas proposições são verdadeiras.
c) Alguns termos têm de ficar indefinidos mas cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.
d) Alguns termos têm de ficar indefinidos. É necessário ter algumas proposições que são consideradas verdadeiras.
e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

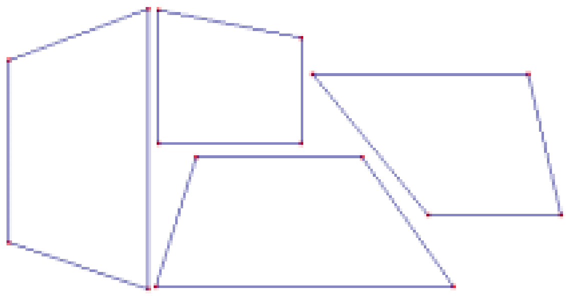
20 – Examine estas três proposições:
1) Duas retas perpendiculares à mesma reta são paralelas.
2) Uma reta que é perpendicular a uma de duas retas paralelas, é perpendicular à outra.
3) Se duas retas são eqüidistantes então são paralelas.
Na figura abaixo, as retas m e p são perpendiculares e as retas n e p perpendiculares. Qual é das proposições abaixo que poderia ser a razão porque a reta m é paralela à reta n?

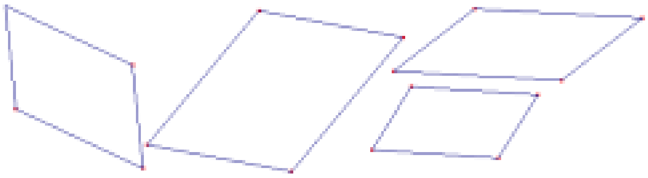
a) Só (1).
b) Só (2)
c) Só (3)
d) (1) ou (2)
e) (2) ou (3).

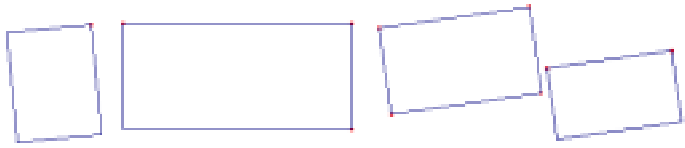


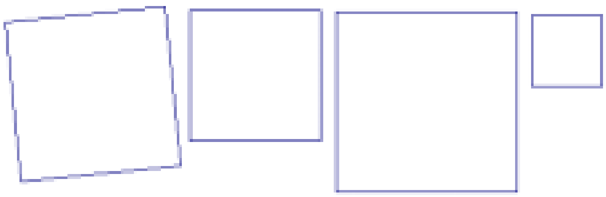
ANEXO IV

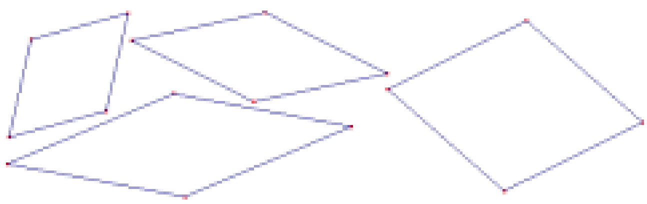
RECORTES

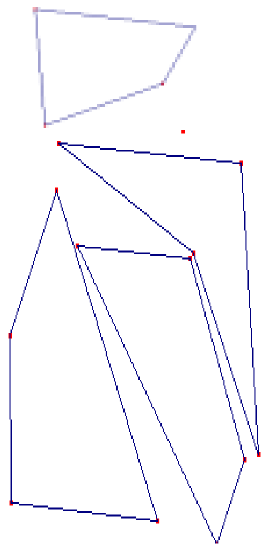






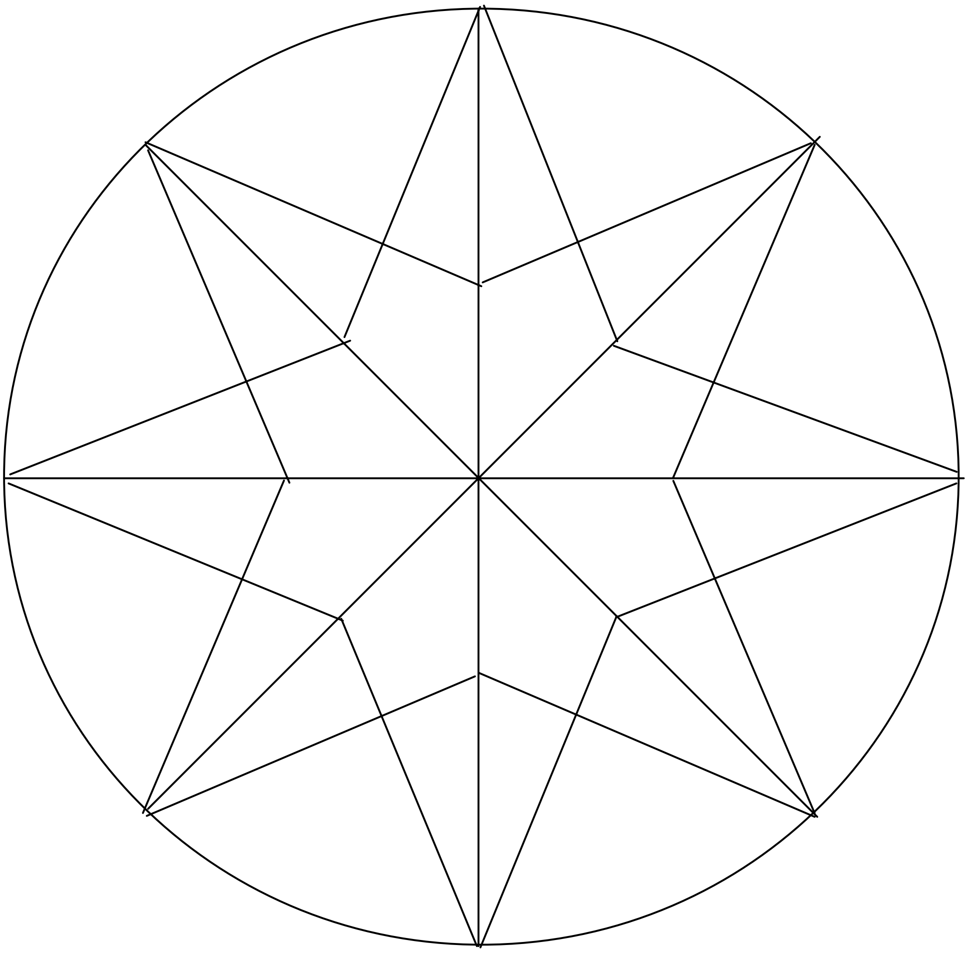






ANEXO V

Desenho da professora DE



ANEXO VI

"CAIXA DE FERRAMENTAS"

Temos aqui uma tabela onde registraremos os resultados que formos demonstrando em nossos encontros. Note que a "caixa" já contém alguns resultados registrados[27]. São propriedades referentes à geometria de um modo geral, que, apesar de não demonstra-las neste trabalho, utilizaremos na demonstração das propriedades dos quadriláteros.

Notação: Utilizaremos letras maiúsculas A, B, C, ... para designar pontos; letras minúsculas a, b, c, ...para designar retas; $\overline{AB}$ para designar o segmento com extremidades nos pontos A e B; AB para designar a medida de $\overline{AB}$; ABC para designar o triângulo com vértices nos pontos A, B e C; $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$ para designar o ângulo formado pelas semi-retas S_{AB} e S_{AC} (quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice A, utilizaremos apenas a notação $\hat{A}$); $\equiv$ para designar congruência.

ASSUNTO	ENUNCIADO
Medição de ângulos	- Ângulos opostos formados por duas retas concorrentes têm a mesma medida.
Congruência	- Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB = EF, AC = EG e $\hat{A} \equiv \hat{E}$, então ABC$\equiv$ EFG. (LAL) - Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB = EF, $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$, então ABC$\equiv$ EFG. (ALA) - Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes. (LLL) - Sejam ABC e A'B' C' dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são $\hat{C}$ e $\hat{C}$'. Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes: 1) BC=B'C' e $\hat{A} = \hat{A}$' (Cateto e ângulo oposto) 2) AB=A'B'e BC = B'C (Hipotenusa e cateto) 3) AB = A'B'e $\hat{A} = \hat{A}$' (Hipotenusa e ângulo oposto)

[27] As demonstrações destes resultados são encontradas no livro:Geometria Euclidiana Plana, de João LucasM. Barbosa da Sociedade brasileira de Matemática

Retas paralelas	- Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, conforme a figura, obtivermos Â + Ê = 180º então, as retas são paralelas.