PUC-SP
I Conferência Latino-Americana de GeoGebra
GeoGebra e Educação Matemática: pesquisa, experiências e perspectivas.

VISUALIZANDO DESIGUALDADES E PROPRIEDADES DE SEQUÊNCIAS RACIONAIS COM APOIO NO *GEOGEBRA*

Katia Vigo Ingar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE
Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará - UFC

Aspectos históricos e epistemológicos

Até o século XVI predominavam as idéias gregas segundo as quais as quantidades tinham dois componentes disjuntos: o discreto (número) e o contínuo (grandeza). Estes componentes refletiram na Matemática como o estudo das grandezas e números, isto é, como o estudo da Geometria e da Aritmética. Este cenário mudou com o trabalho de Simon Stevin de Bruges (1548–1620), que, em 1585, publicou seu livro *L'Arithmetique* produzindo um avanço epistêmico no conhecimento matemático.

A nova representação, proposta por Stevin, era flexível, no sentido de lidar com problemas de quantidade discreta e simultaneamente com os problemas de divisibilidade. Esta representação que lidava com partes da unidade foi a notação decimal que acabou com a tensão entre o discreto e o contínuo. (Da Silva e Penteado, 2010, p. 123-140).

Inicialmente, para representar quantidades inteiras de objetos, animais ou qualquer coisa que se quisesse contar, o homem criou símbolos que, hoje, são os números naturais. Porém, estes números foram insuficientes no trato de problemas que envolvem divisões em partes iguais fazendo com que surgissem as frações.

Com as frações surgiu uma grande crise nos alicerces do pitagorismo envolvendo a descoberta dos segmentos incomensuráveis. Esta crise foi superada com grande genialidade pelo sábio Eudoxo com a teoria das proporções, que quase dois mil anos depois, inspirou Dedekind a criar uma rigorosa teoria para construção dos números reais(LIMA, 1996).

Por outro lado, muito do que sabemos atualmente sobre os conjuntos numéricos foi fruto do labor e da sistematização proporcionada pelo método axiomático aplicado com vistas à construção conjuntos numéricos, sobretudo, os números racionais.

O Problema

Vale observar que a apresentação de propriedades formais relacionadas à cadeia $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

representa o legado que os matemáticos do século XIX e XX deixaram pronta para nós, "possibilitando-nos apresentar os conjuntos numéricos numa ordem logicamente coerente, rápida e elegante." (FERREIRA, 2010, p. 6).

Um dos problemas neste caso diz respeito à perda progressiva do caráter intuitivo destes conceitos!

Lima (2010, p. 33) explica de modo irretocável sua atitude quando observa que:

Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos. É apresentada uma lista de propriedades gozadas por eles (axiomas) e tudo o mais decorre daí. Não interessa o que os números naturais são; (isto seria um problema filosófico) o que interessa é como eles se comportam. Embora os axiomas por ele adotados já fossem conhecidos por Dedekind, tudo indica que Peano trabalhou de modo independente. De qualquer maneira, o mais importante não são quais axiomas que ele escolheu e sim a atitude que ele adotou, a qual veio a prevalecer na Matemática atual, sob o nome de método axiomático.

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim} = \overline{(a,b)} \mid (\text{a,b}) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad \mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}{\sim} = \left\{ \frac{a}{b} \mid \text{ a} \in \mathbb{Z} \text{ e b} \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Dado que os livros didáticos de Analise Real apresentam o estudo do *Campo dos Números Reais* utilizando a intuição geométrica para elucidar certas questões ou para levar a discussão outras. No entanto, as demonstrações de todos os teoremas importantes apresentam-se em forma analítica.

Segundo Guzman (1996, p.2): "*Las ideas básicas del análisis elemental, por ejemplo orden, distancia, operaciones entre números, nacen de situaciones bien concretas y visuales. Todo experto conoce la utilidad de atender a tal origen concreto cuando quiere manejar con destreza los objetos abstractos correspondientes*".

Esta abordagem com atenção explicita às possíveis representações concretas dado que evidenciam as relações abstratas nas quais o matemático está interessado, é o que Guzman (1996, p.3) chama *visualização* em matemática.

Pergunta de investigação

Como desenvolvem o processo cognitivo da visualização os alunos do curso de Licenciatura em Matemática quando lidam (criam, constroem) sequências de números racionais com apoio do geogebra?

Que aspectos abordados pelos livros de Analise dificultam o entendimento de aproximações de sequencias de racionais?

Objetivos:

1. Analisar os livros de Análise Real;
2. Identificar as dificuldades surgidas durante o processo que leva à aprendizagem das sequências de números racionais;
3. Analisar o papel da visualização na conceituação das sequências de números racionais.

Visualizando conceitos e objetos matemáticos

Assim, colocamos em destaque a posição epistemológica ante o saber matemático com a intenção de considerar aspectos particulares da existência (visualização) dos objetos envolvidos e prosseguir a investigação com apoio no método axiomático.

Por outro lado, no contexto do ensino, tal atitude é pouco recomendada, ademais, a noção de existência acessível e ao alcance dos iniciados é bastante condicionada pela *vizualização* destas entidades conceituais.

A noção de visualização tem sido explorada por vários autores: Zimmerman(1991), Arcavi(2003), Hitt(1997) , etc. Neste estudo referimo-nos às idéias de Duval (1995, 2011).

De acordo com Duval (1999):

1. A visualização é baseada na produção de uma representação semiótica.
2. A visualização na matemática é necessária porque ela apresenta a organização de relações, mas ela não é primitiva, porque ela não é mera percepção visual. Neste respeito, há aprendizagem a partir de registros geométricos.
3. Em uma perspectiva de aprendizagem, três problemas devem ser levados em conta a respeito de visualização: o problema da discriminação, o problema de tratamento e o problema da coordenação com um registro discursivo.

Metodologia

Para organização do trabalho, faremos uso de procedimentos teórico-metodológicos apresentados por Bardin (1979), através do livro "Análise de Conteúdo", que indica a elaboração de critérios para que estes auxiliem a análise, tanto no que diz respeito à organização propriamente dita, quanto em revelar aspetos relevantes do texto que podem estar "implícitos" ao leitor.

Efetuaremos uma leitura sistemática dos conteúdos formais em Análise Real, com o propósito de vislumbrar sua exploração no ambiente computacional.

Livros analisados:

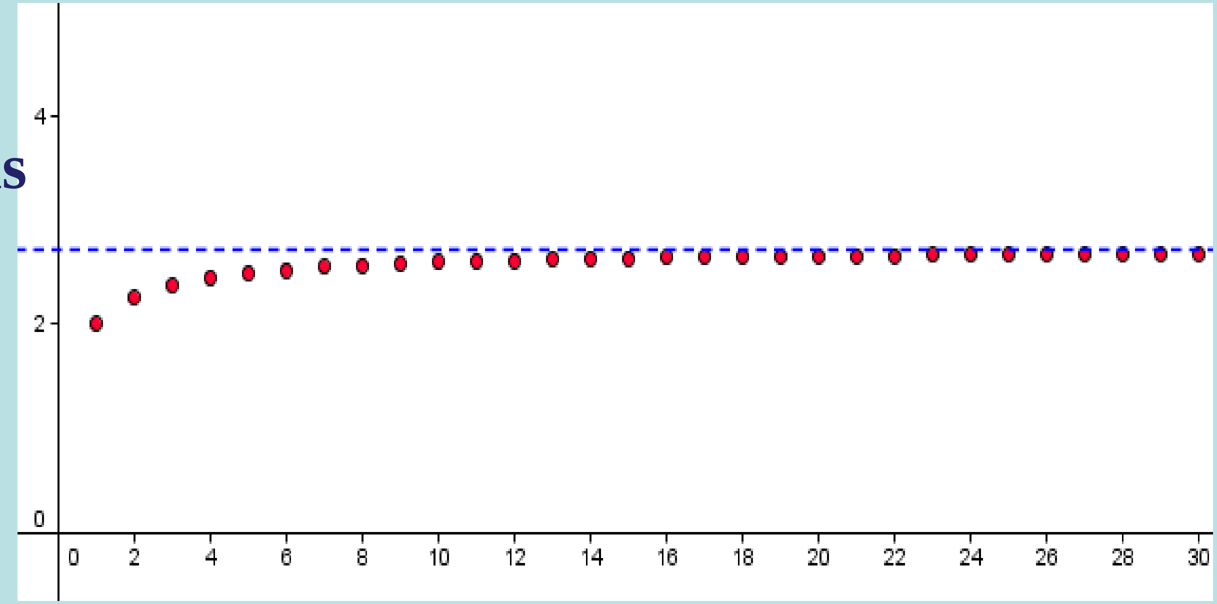
Livros de Análise Real	Autores	Editora e Ano
Números Reais	Aragona Jorge	Livraria da Física. 2010
A construção dos números	Ferreira Jamil	Rio de Janeiro. 2010
Curso de Análise. Vol. 1	Elon Lima	Rio de Janeiro.2010

Atividades

Sequências de racionais

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

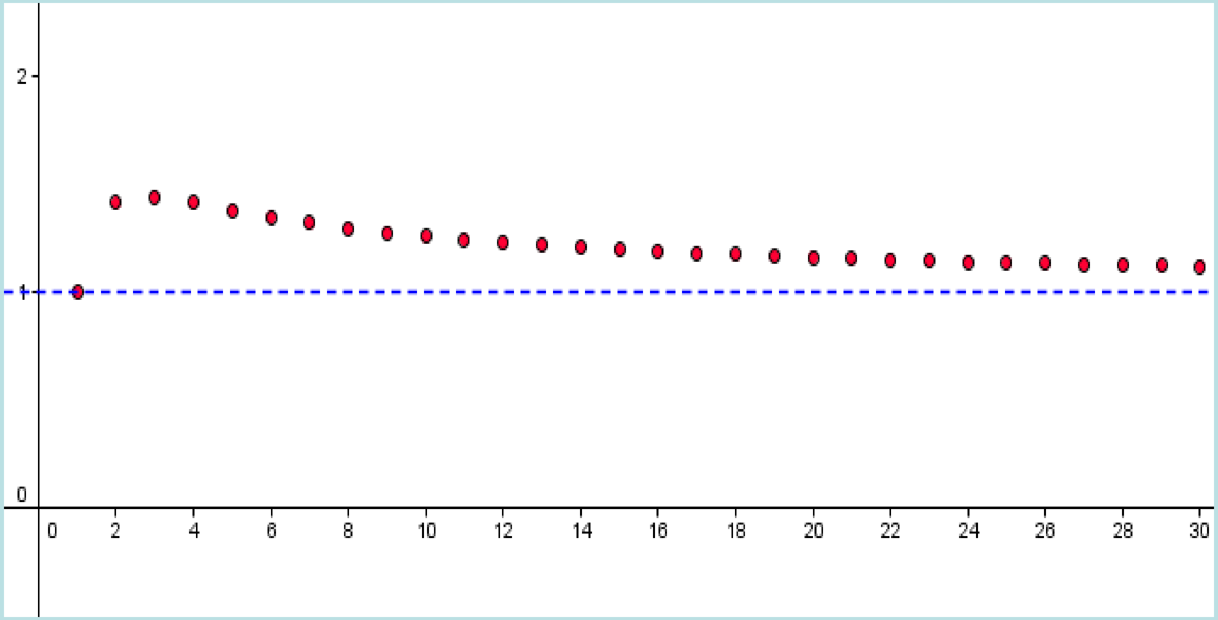
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$



Sequências de não racionais

$$y_n = \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

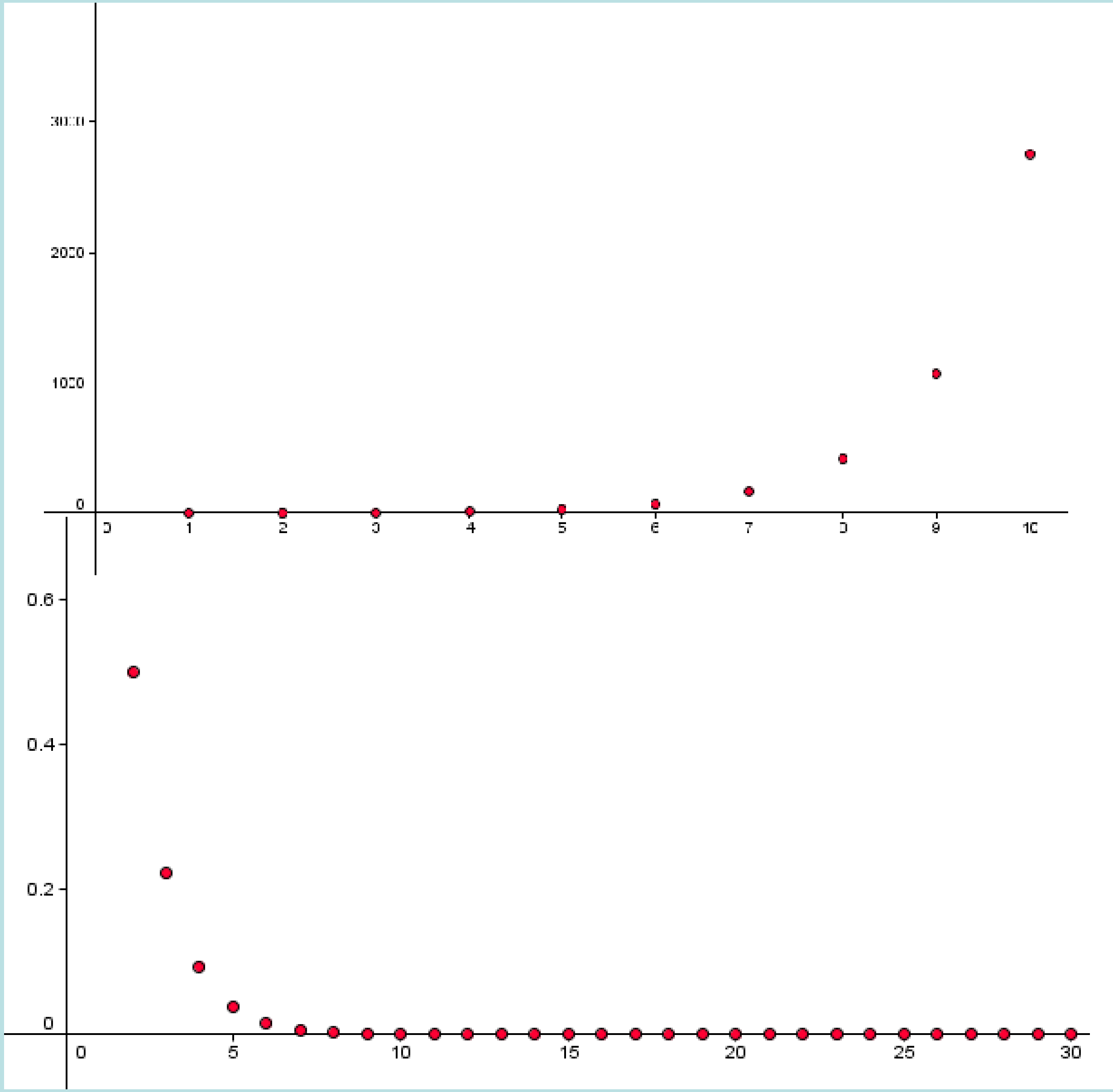


Sequências de racionais

$$y_n = \frac{n^n}{n!} \qquad \mathrm{Lim}_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$x_n = \frac{n!}{n^n} \qquad \mathrm{Lim}_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Por intermédio da visualização, podemos prever e conjecturar o comportamento de sequências complicadas estudadas em Análise Real.



Considerações finais:

Neste estudo colocamos em evidência situações em que exploramos a visualização e antevemos, pela simples inspeção dos gráficos produzidos pelo Geogebra, o comportamento de sequências numéricas.

No interessamos de modo particular pelas sequências de números racionais, pois, tal interesse foi registrado por muitos séculos na tentativa de compreensão da natureza de um número que reside no conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

A visualização tem vantagens para o ensino de Análise Real em ilustração e compreensão de conceitos matemáticos. Não há como negar o valor das representações semióticas e o geogebra para os processos heurísticos na descoberta da matemática.

Referencias:

1. Aragona, J. Números Reais. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
2. Bardin, L. Analise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70, 1979
3. Duval, R. Sémiosis et Pensée Humaine. Paris : Peter Lang Edition. 1995.
4. _______ *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. Psichology of mathematics education. Vol. 1. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN Universidad Autónoma del Estado de Morelos.Cuernavaca, Morelos, México 1999.
5. Da Silva, B. e Penteado, C. A Densidade dos números reais: concepções de professores da educação.Paradigma, Vol. XXXI, Nº 1; Junio de 2010 / 123 – 140.
6. Ferreira, Jamil. A construção dos Números. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
7. Lima. Elon. Lages. *Curso de Análise*. v.1, 12º edição, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2010.