



I Conferência Latino-Americana de GeoGebra

GeoGebra e Educação Matemática: pesquisa, experiências e perspectivas.



13 a 15 de Novembro de 2011

EXPLORANDO ASPECTOS DINÂMICOS NO ENSINO DE FUNÇÕES REAIS COM RECURSOS DO GEOGEBRA

Dirce Uesu Pesco

Humber to José Bor tolossi

Wanderley Moura Rezende



Instituto de Matemática e Estatística



Caminho histórico x Descaminho didático

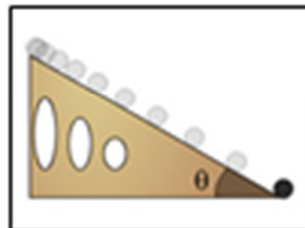
- Caminho histórico*
 - Função – Variável – aspectos dinâmicos
 - Marco histórico: Filósofos escolásticos (séc. XIV)
 - Núcleo semântico: interdependência e fluência
 - Descaminho didático**
 - Abordagem estática e algébrica
 - Desvio de natureza epistemológica
- *(BOYER, 1949, CARAÇA, 1948, YOUSCHKEVITCH, 1977)
- ** (ROSSINI, 2006, REZENDE, 2006, ZUFFI, 1999)

GeoGebra e o CDME

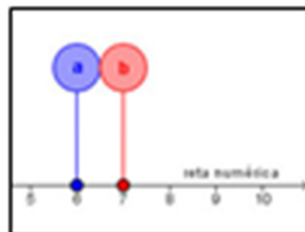
- “Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem da Matemática do Ensino Médio” - MEC/MCT/FNDE ***
- <http://www.uff.br/cdme/> e <http://www.cdme.im-uff.mat.br/>
- Atividades
 - Variação da função afim
 - Variação da função quadrática
 - Variação da função exponencial
 - Como b depende de a ?
- *** (BORTOLOSSI, 2009)

Usando o potencial do GeoGebra

- Variação da função quadrática



- Como b depende de a?





uff

Varição da função quadrática

Matemática: funções

Relembrando...	Varição da função quadrática	Função quadrática e sequências	Caracterização da função quadrática	Problemas
----------------	------------------------------	--------------------------------	-------------------------------------	-----------



Atenção: usuários do Internet Explorer devem baixar e instalar o programa gratuito [MathPlayerSetup.exe](#) (1.7 MB) para poder visualizar as fórmulas matemáticas deste módulo. Usuários do Firefox não precisam se preocupar, pois este recurso já vem instalado com o próprio navegador. Para a realização plena das atividades deste módulo o seu navegador deverá ter também o *plug-in* do [Flash Player](#) (você pode baixá-lo gratuitamente clicando no nome do programa).

Relembrando...

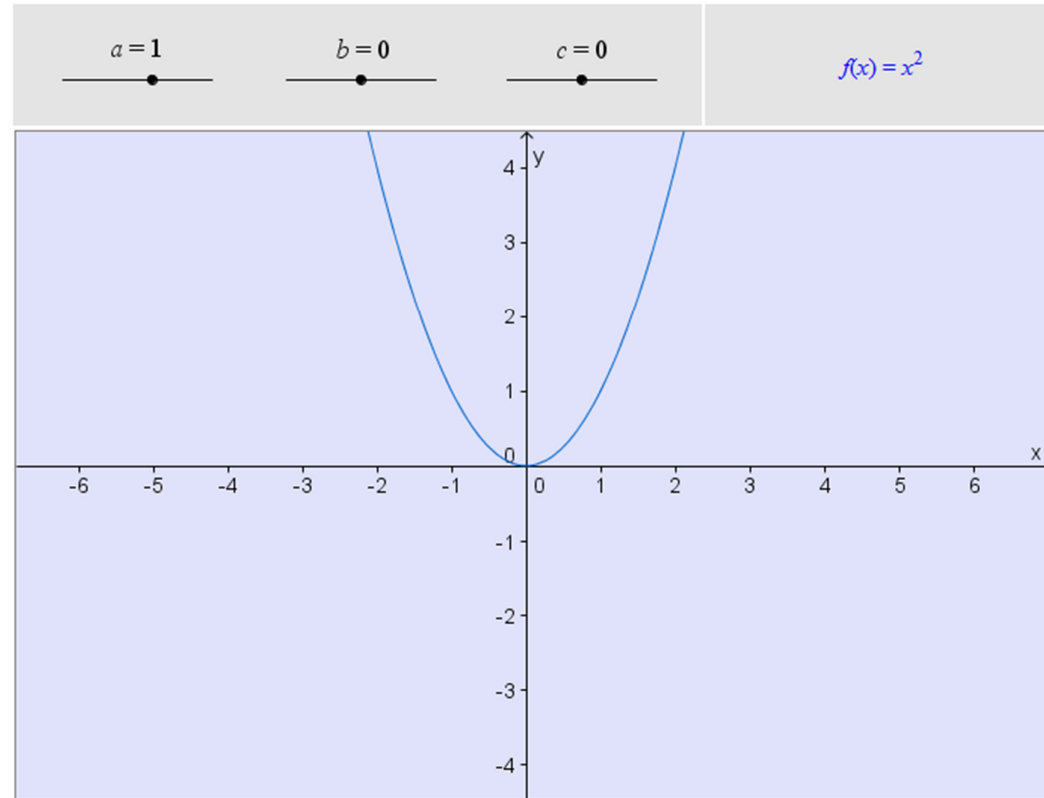
Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função quadrática quando existem números reais a , b e c , $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola onde os números a , b e c assumem um papel especial no traço dessa curva. Você lembra o que representam esses números?

Atividade 1

Na figura a seguir, *clique e arraste* os botões para variar, respectivamente, os valores de a , de b , de c e verifique o que acontece com o gráfico da função.

Mas faça isso de forma coordenada. Varie inicialmente apenas o valor de a e faça a sua observação; depois varie apenas o valor de c e faça a sua observação; e por último (você vai perceber o porquê) varie apenas o valor de b e faça a sua observação.



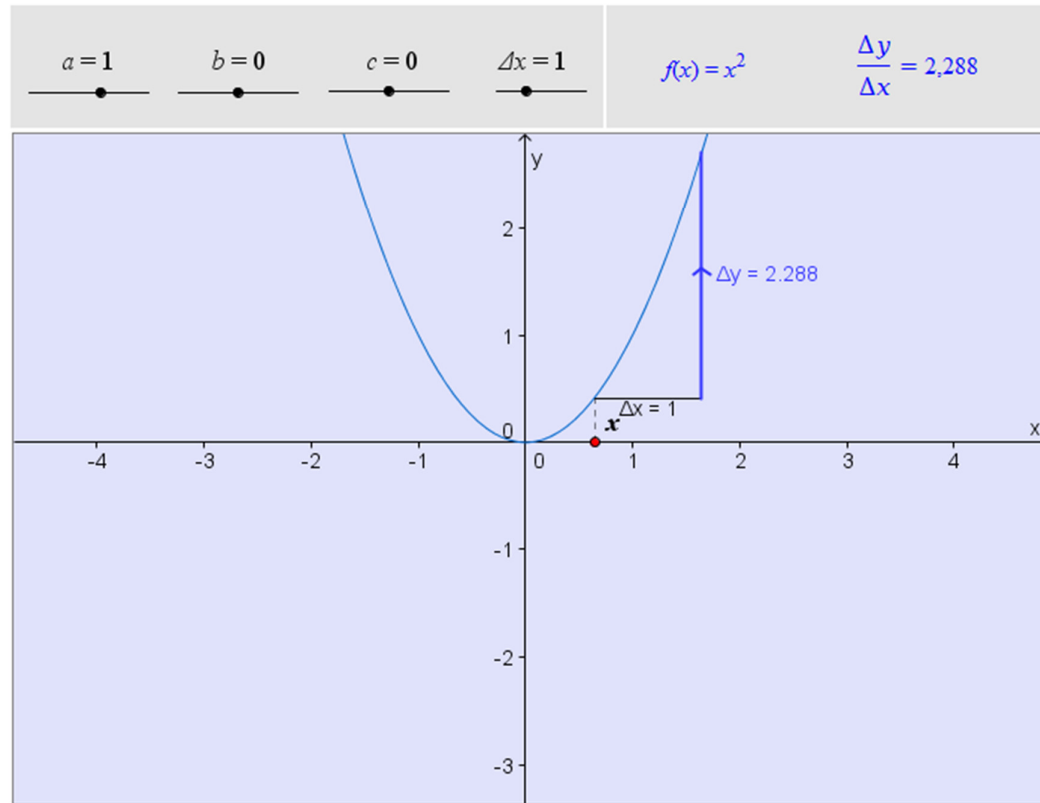
Varição da função quadrática

Para a função afim percebemos que a variação de y , $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, depende apenas de Δx e não do ponto x do domínio da função. Será que tal fato acontece com a função quadrática?

Resolva a atividade a seguir.

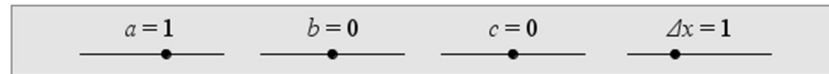
Atividade 2

Escolha inicialmente valores para os números a , b e c da função quadrática e um valor para Δx (para isso, clique e arraste, respectivamente, os botões correspondentes aos números a , b , c e Δx). Em seguida, desloque o botão que indica a posição do ponto x e observe o que acontece com a variação Δy .

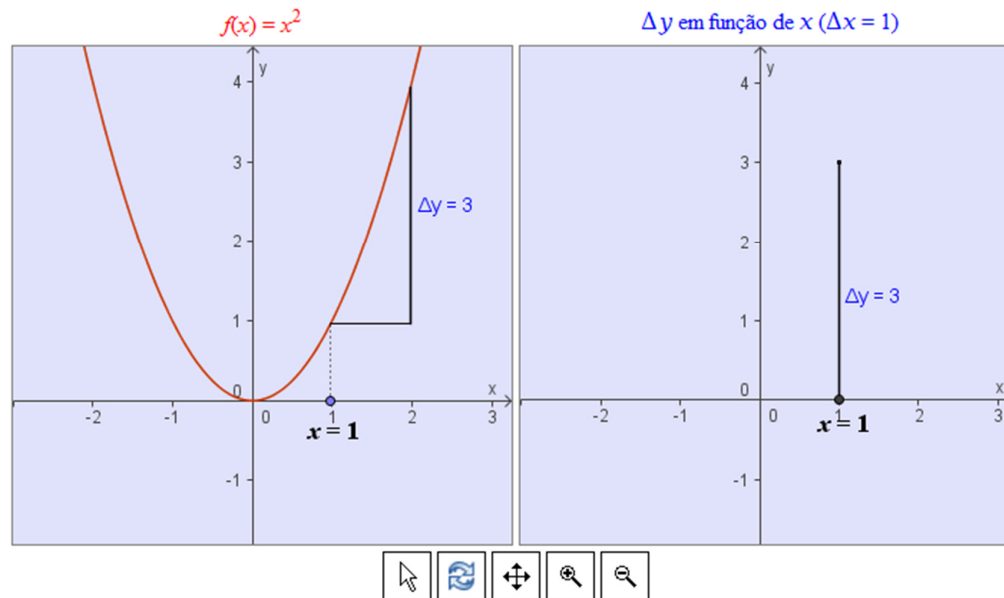


Atividade complementar

Escolha inicialmente valores para os números a , b e c da função quadrática e um valor para Δx . Em seguida, clique no botão *habilitar rastro*. Desloque o botão que indica a posição do ponto x na janela da esquerda e observe o gráfico que indica o valor de Δy em função de cada ponto x do domínio da função quadrática.



Habilitar rastro



☞ [Clique aqui](#) e verifique se o que você percebeu coincide com a nossa observação.

Próxima atividade

Função quadrática e sequências

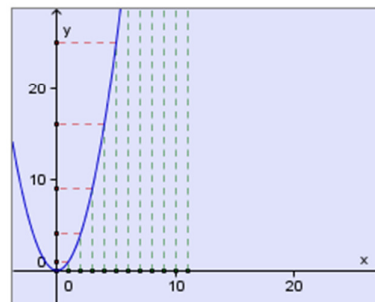
Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão aritmética definida por $x_n = x_0 + n\Delta x$, onde x_0 é um ponto qualquer do domínio de f e Δx é um incremento da variável independente x .

O que podemos afirmar a respeito da sequência $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$? Será que esta sequência também será uma progressão aritmética? Resolva a atividade a seguir.

Atividade 3

No painel a seguir escolha inicialmente valores para os números a , b e c da função quadrática (basta deslocar os botões associados às letras correspondentes). Em seguida, escolha um valor x_0 (termo inicial da progressão aritmética (x_n)) e outro para Δx (razão da progressão aritmética (x_n)). A tabela ao lado do painel registra então os valores de x_n , $f(x_n)$, $\Delta y_n = f(x_n + \Delta x) - f(x_n)$ e $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$ em cada uma de suas colunas.

$$f(x) = x^2$$



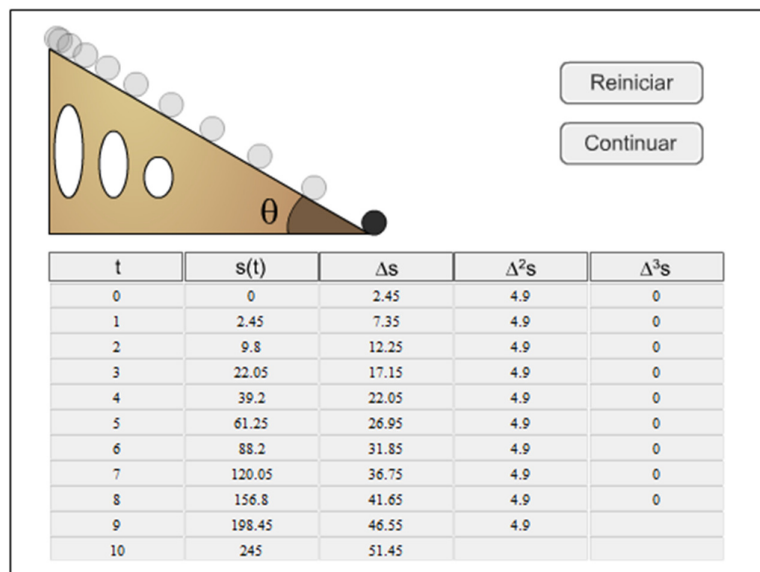
x_n	$f(x_n)$	Δy_n	$\Delta^2 y_n$
0,0	0,0	1,0	2,0
1,0	1,0	3,0	2,0
2,0	4,0	5,0	2,0
3,0	9,0	7,0	2,0
4,0	16,0	9,0	2,0
5,0	25,0	11,0	2,0
6,0	36,0	13,0	2,0
7,0	49,0	15,0	2,0
8,0	64,0	17,0	2,0
9,0	81,0	19,0	2,0

Resolvendo problemas...

1 - Uma bolinha é largada do topo de uma rampa cuja inclinação em relação ao plano horizontal da superfície terrestre é de 30° ($\theta = 30^\circ$). Realizando o experimento diversas vezes, um estudante mede, a cada segundo, a distância $s(t)$, em centímetros, da bolinha em relação ao topo da rampa.

Na figura a seguir clique no botão iniciar e veja uma simulação do resultado final da experiência realizada pelo aluno.

As colunas da tabela indicam, respectivamente, os valores medidos de t e $s(t)$ e os valores de Δs , de $\Delta^2 s$ e de $\Delta^3 s$, calculados a partir dos valores obtidos nas colunas anteriores ($\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, $\Delta^2 s = \Delta s(t + \Delta t) - \Delta s(t)$, $\Delta^3 s = \Delta^2 s(t + \Delta t) - \Delta^2 s(t)$).



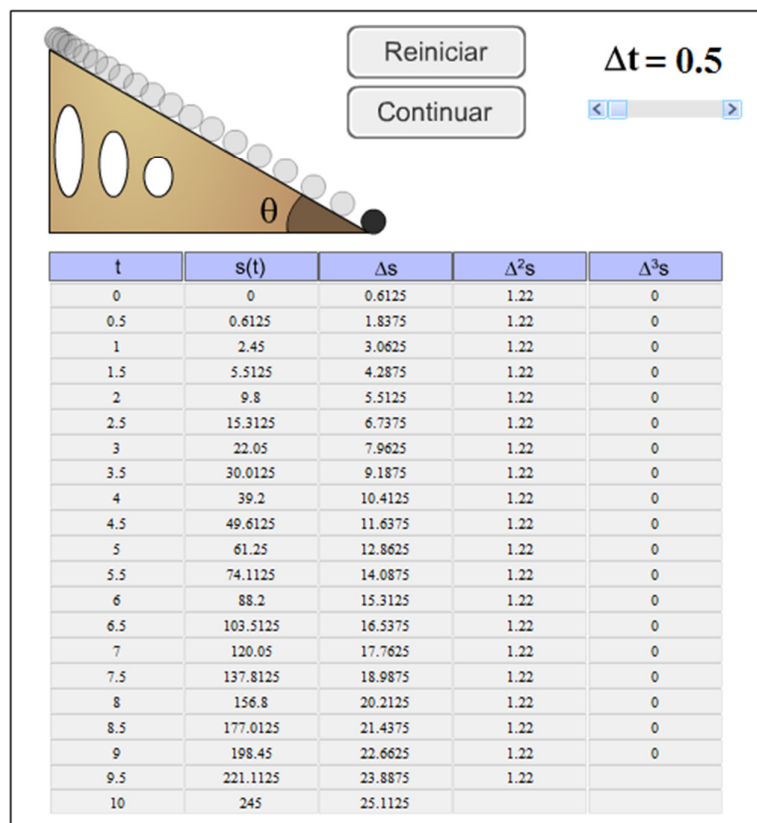
a. Observando os dados da tabela, que tipo de função você escolheria para descrever a relação entre as variáveis s e t ?

- uma função afim
- uma função quadrática
- uma função exponencial

Confira sua resposta

Resolvendo problemas...

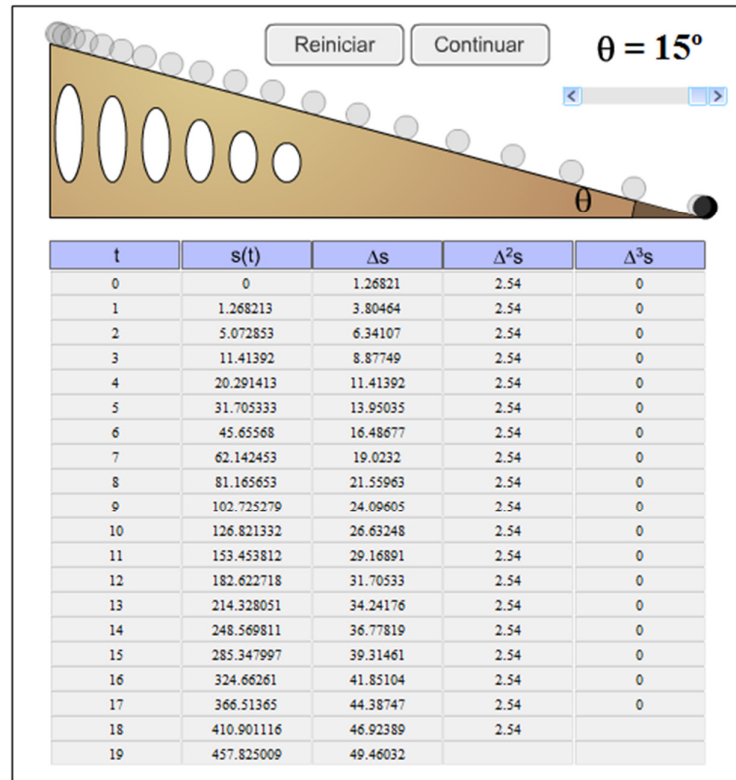
2 - Varie agora o intervalo de tempo Δt e observe o que acontece com os valores de Δs e $\Delta^2 s$.



a. Observando os dados da tabela, que tipo de função você escolheria para descrever a relação entre as variáveis s e t ?

- uma função afim
- uma função quadrática
- uma função exponencial

3 - Varie agora o ângulo de inclinação θ e observe o que acontece com os valores de Δs e $\Delta^2 s$.



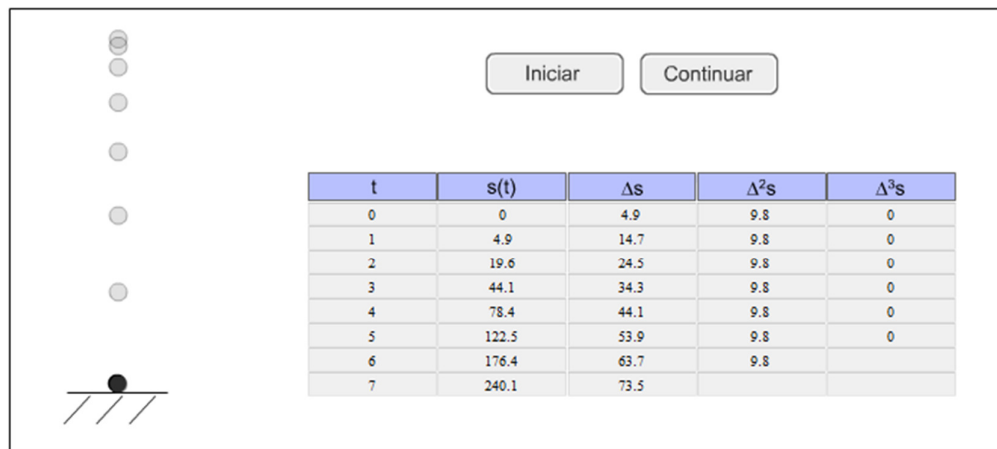
a. Observando os dados da tabela, pode-se concluir que, uma vez escolhido o ângulo de inclinação θ , a sequência de valores do deslocamento Δs :

- é constante
- é uma progressão aritmética
- é uma progressão geométrica
- não obedece a um padrão conhecido

Parabéns! Você acertou! [Clique aqui](#) para fazer a questão extra.

Atividade extra

A animação a seguir é uma simulação de um corpo em queda livre ($\theta = 90^\circ$). Para ver a animação clique no botão Iniciar.



t	s(t)	Δs	$\Delta^2 s$	$\Delta^3 s$
0	0	4.9	9.8	0
1	4.9	14.7	9.8	0
2	19.6	24.5	9.8	0
3	44.1	34.3	9.8	0
4	78.4	44.1	9.8	0
5	122.5	53.9	9.8	0
6	176.4	63.7	9.8	
7	240.1	73.5		

Uma vez admitido que s é uma função quadrática, determine no espaço a seguir os coeficientes que definem a equação horária $s = s(t)$ de um corpo em queda livre:

$$s(t) = \text{[]} t^2 + \text{[]} t + \text{[]}$$

Confira sua resposta

Próxima atividade



uff

Como b depende de a?

Matemática: funções



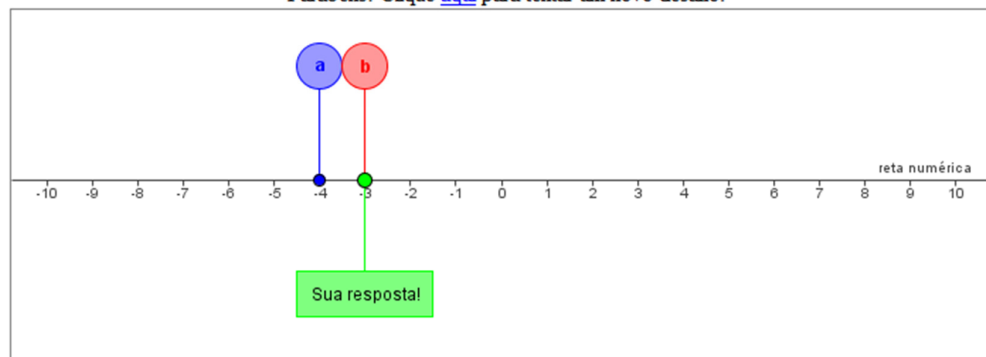
DESAFIO 1 DE 16

Tente descobrir como o número **b** depende do número **a**. Para isto, movimente o ponto **a** sobre a reta numérica (clique e arraste a bolinha azul) e observe o comportamento do ponto **b**! Para verificar sua resposta, escreva no campo abaixo uma expressão algébrica em termos de **a** e clique no botão "Acertei?". **É importante que sua resposta coincida com o ponto b para qualquer posição do ponto a!** No final desta página você encontrará uma lista com os comandos das funções. [Clique aqui para ver uma animação ensinando como usar o programa!](#)

Placar: 3

Sua resposta: $b = f(a) =$

Parabéns! Clique [aqui](#) para tentar um novo desafio.





uff

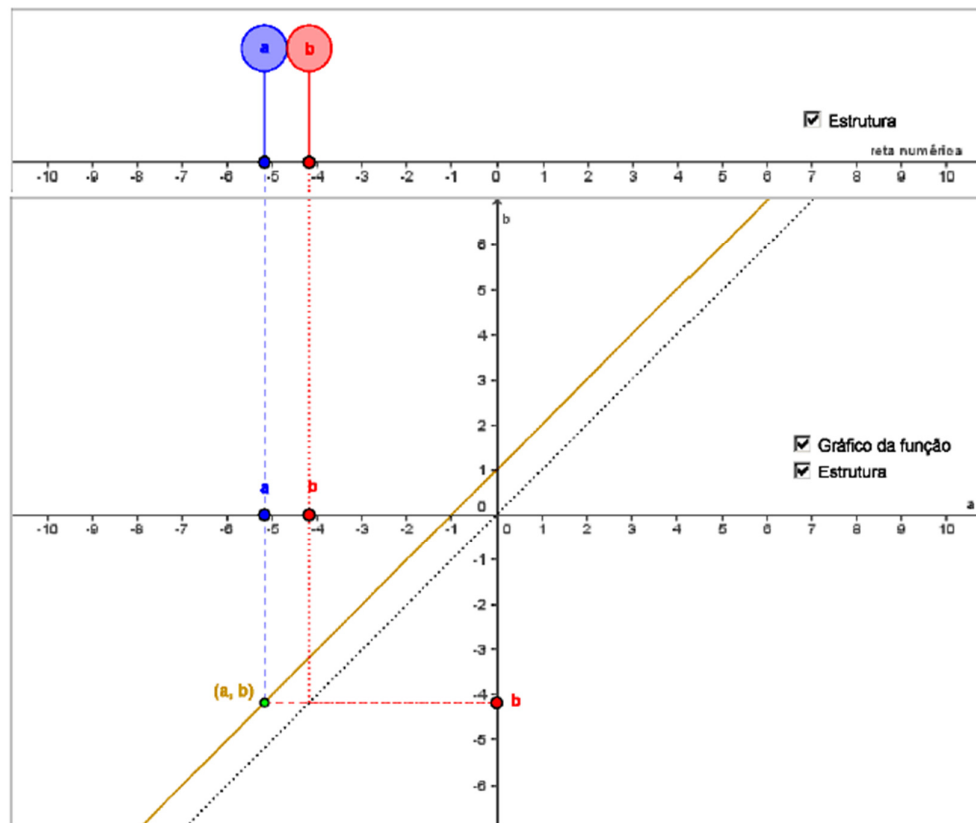
Como b depende de a?

Matemática: funções

Nessa atividade você poderá visualizar o gráfico das funções de cada um dos desafios que você acabou de fazer, bem como o de outras funções reais (exponencial, logarítmica, trigonométrica, etc.). Para isso, digite no campo abaixo a função que desejar e clique no botão "Atualizar!".

$$b = f(a) = a + 1$$

Atualizar!



Bibliografia

- BORTOLOSSI, H. J. **Conteúdos Digitais de Matemática e Estatística**. Projeto de Pesquisa. UFF. 2009.
- BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York: Dover Publications Inc, 1949.
- CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9ª edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1948.
- REZENDE, W. M. Um Mapeamento das Idéias Fundamentais do Cálculo no Ensino Básico. **III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. In: Anais III SIPEM. Águas de Lindóia, 2006.
- ROSSINI, R. **Saberes Docentes sobre o tema Função: uma Investigação das Praxeologias**. Tese (doutorado) em Educação Matemática. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. PUC-SP. São Paulo: PUC, 2006.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. (1976/77). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. **Archive for History of Exact Sciences**, 16, 37-85.
- ZUFFI, E. M. **O tema “funções” e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio – por uma aprendizagem de significados**. 1999. Tese (doutorado) em Didática - Ensino de Ciências e Matemática. Faculdade de Educação. USP. São Paulo: USP, 1999.



- **CDME**
- <http://www.uff.br/cdme/>
- <http://www.cdme.im-uff.mat.br/>



- **Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro**
- <http://www.uff.br/geogebra/>

 brigad  !!