



I Conferência Latino-Americana de GeoGebra  
GeoGebra e Educação Matemática: pesquisa, experiências e perspectivas.



13 a 15 de Novembro de 2011

# **Dar significado aos conceitos de trigonometria com o GEOGEBRA**

Ruth Ribas Itacarambi – Faculdades Oswaldo Cruz  
[ritacarambi@yahoo.com.br](mailto:ritacarambi@yahoo.com.br)

Rogério Chaparin – IFSP - Campus Guarulhos  
[rochaparin@gmail.com](mailto:rochaparin@gmail.com)



## Objetivos

Este trabalho trata das concepções dos alunos de dois cursos de graduação, um curso público e outro privado, sobre **temas básicos de trigonometria:**

radiano, ciclo trigonométrico, seno, cosseno e tangente.

e das **mudanças conceituais** propiciadas pela intervenção dos professores com atividades experimentais apoiadas no software GEOGEBRA.



## **Metodologia do trabalho de intervenção**

- A metodologia do trabalho de intervenção começou com o levantamento das pré-concepções dos alunos sobre os temas citados.
- Com o levantamento em mãos organizou-se atividades experimentais buscando dar significado aos conceitos.
- As atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática de cada escola e complementadas com atividades extras, para as quais os alunos foram convidados a baixar o software em seus computadores pessoais.
- Após este trabalho conceitual apresentou-se questões solicitando-se que os alunos resolvessem usando os conceitos trabalhados, com o apoio do software.



### **Levantamento das pré-concepções dos alunos:**

- Noção de radiano
- Representação dos radianos no ciclo trigonométrico
- Conceito de seno, cosseno e tangente
- Representação no ciclo trigonométrico
- Função trigonométrica
- Esboço gráfico da função

### **Público alvo:**

Alunos da instituição privada

Total de alunos: 13 alunos de 15 responderam

Alunos da instituição pública

Total de alunos: 15 alunos

## Noção de radiano

Privada		Pública	
A medida do arco no círculo trigonométrico	(3)	A medida do arco no círculo trigonométrico	(2)
Unidade de medida	(2)	Unidade de medida	(2)
Associa com o raio	(2)	Associa com o raio	(4)
São ângulos	(2)	São ângulos	(2)
Razão entre comprimento e raio	(4)	Razão entre comprimento e raio	(2)
Medida do ciclo trigonométrico	(0)	Medida do ciclo trigonométrico	(2)
		Não responderam	(1)

## Representação dos radianos no ciclo trigonométrico

Privada		Publica	
Representaram corretamente os três arcos	(2)	Representaram corretamente os três arcos	(10)
Representaram corretamente os três arcos, mas transformaram em graus	(3)		
Representaram corretamente dois arcos, erro no $5\pi/3$	(4)	Representaram corretamente dois arcos	(3)
Representaram corretamente apenas o $\pi/3$	(4)	Não representaram	(2)

## Conceito de seno, cosseno e tangente

Privada		Pública	
Razão, coordenadas de um ponto	(4)	Razão	(11)
Razão tendo como referência o triângulo retângulo	(5)		
Reta que corta os eixos	(1)		
Relação	(1)		
Não responderam	(2)	Não responderam	(4)

## Representação no ciclo trigonométrico

Privada		Pública	
Eixo x, y e paralelo ao eixo y	(5)	Eixo x, y e paralelo ao eixo y	(11)
Não representaram	(4)	Não responderam	(3)
Como dado um ponto projeção ortogonal sobre os eixos	(4)	Projeção ortogonal	(1)



## As atividades desenvolvidas no laboratório e em

### 1- Quantos raios têm uma circunferência de raio dado?

Orientação:

- Escolher quatro raios diferentes traçar as circunferências determinando o comprimento de cada uma.
- Marcar em cada circunferência um arco no primeiro quadrante, determinar a medida do arco.
- Marcar o ângulo correspondente ao arco em radianos.
- Calcular a razão entre o comprimento da circunferência e o arco

Raio	Medida do Arco	Medida do ângulo	Comprimento	Razão

# Atividades dos alunos

## Aluno 1

1- Quantos raios têm uma circunferência de raio dado?

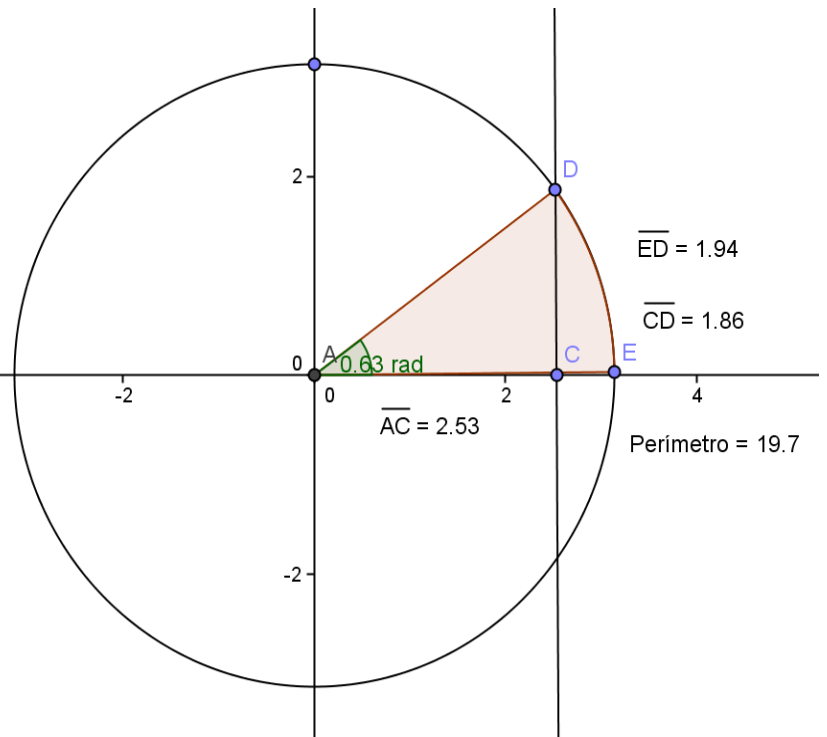
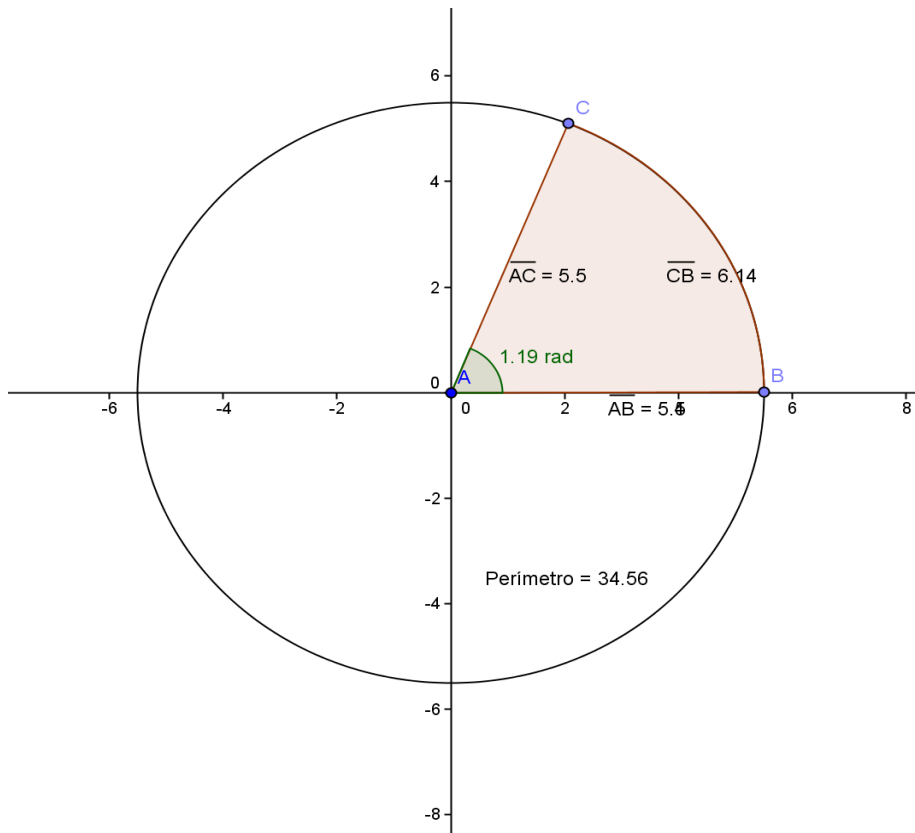
Orientação:

- Escolher quatro raios diferentes traçar as circunferências determinando o comprimento de cada uma.
- Marcar em cada circunferência um arco no primeiro quadrante, determinar a medida do arco.
- Marcar o ângulo correspondente ao arco em radianos.
- Calcular a razão entre o comprimento da circunferência e o arco

Raio	Medida do Arco	Medida do ângulo	Comprimento	Razão
5,5	6,14	1,19	34,56	5,63
4,87	3,58	0,75	30,6	8,55
3,12	1,31	0,42	19,6	14,96
2,22	1,55	0,71	13,95	9

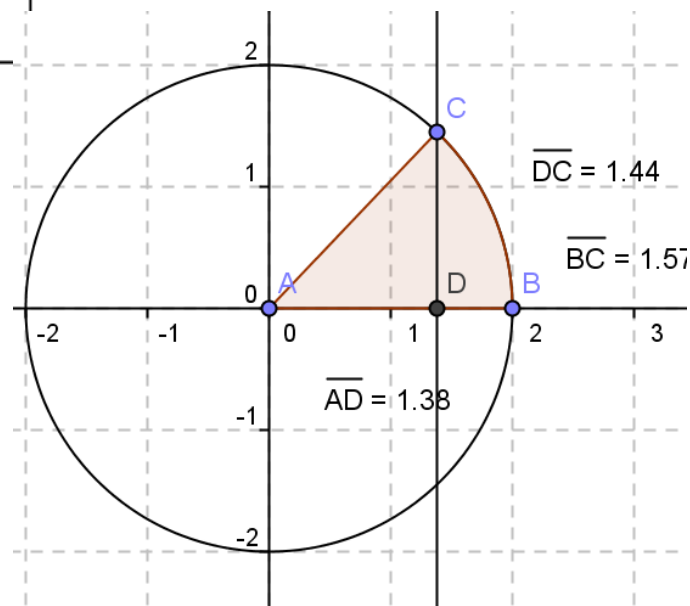
## Aluno 2

Raio	Medida do Arco	Medida do ângulo	Comprimento	Razão
2	1,64	0,85 rad	12,49	7,61
5	2,78	0,56 rad	31,42	11,30
3	1,94	0,63 rad	19,7	10,15
4	2,16	0,55 rad	25,13	11,63



2- Arcos no primeiro quadrante e projeções no eixo horizontal e vertical

Raio	Arcos	Proj h - AD	Proj v- CD	CD/AC	AD/AC	CD/AD
2	$BC = 0,81\text{rd}$					
3						
4						
5						



## Aluno 1

2- Arcos no primeiro quadrante e projeções no eixo horizontal e vertical

Raio	Arcos	Proj h - AD	Proj v- CD	CD/AC	AD/AC	CD/AD
2,22	BC = 1,55	1,67	1,47	0,66	0,75	0,88
3,12	1,31	2,85	1,28	0,41	0,51	0,44
4,87	3,58	3,55	3,33	0,68	0,78	0,93
5,15	6,14	2,06	5,1	0,93	0,37	2,47

## Aluno 2

2- Arcos no primeiro quadrante e projeções no eixo horizontal e vertical

Raio	Arcos	Proj h - AD	Proj v- CD	CD/AC	AD/AC	CD/AD
2	BC = 0,84 1,64	1,32	1,49	0,748	0,663	1,128
3	1,94	2,53	1,86	0,594	0,808	0,735
4	2,16	3,44	2,08	0,52	0,86	0,604
5	2,78	4,28	2,67	0,623	0,856	0,623

## Reflexão sobre a atividade dos arcos

- O que você observou sobre a razão entre o comprimento da circunferência e o arco?
- É possível ter uma medida de arco do primeiro quadrante maior que dois raios? Justifique. Qual é o maior arco possível?
- Escolha no grupo pelo menos 3 arcos, multiplicar pela razão e dividir pelo raio. O que você pode concluir?
- O que você observou nas razões:

$$\frac{CD}{AC} \quad \frac{AD}{AC} \quad \frac{CD}{AD}$$

- Que razões são menores que 1 e que razões são maiores que 1? Justifique



① Observamos que sempre há uma proporção, e quanto maior o arco menor a razão para o mesmo raio da circunferência.

② Não é possível, pois ao pegarmos a medida do comprimento da circunferência e dividimos por 4, pois só queremos saber a medida do arco do 1º quadrante e descobrimos que valor é menor que a medida de 2 raios.

(obs! Dividimos por 4, pois todas as circunferências tem 04 quadrantes)

Exemplo  $\rightarrow$  raio: 2,2  
comp: 13,82

$$\therefore \frac{\text{comp}}{4} = \text{med. do arco de 1º quadrante} = \frac{13,82}{4} = 3,45 \quad \text{e } 2 \text{ raios} = 4,4$$

$\downarrow$   
2,2

Então a medida do 1º quadrante é inferior a 2 raios da circunferência analisada.

O maior arco possível é a razão entre o comprimento da circunferência dividida por 4, neste exemplo é 3,45.

$$3) \text{a)} (7,61 \times 1,64) \div (2) = 6,2402$$

$$(10,15 \times 1,94) \div (3) = 6,5636$$

$$(11,63 \times 2,16) \div (4) = 6,2802$$

$$\left( \frac{\text{Comp}}{\text{Arec}} \times \text{Arec} \right) \div \text{raio}$$

$$2\tilde{\pi}r \div R$$

$$\frac{2\tilde{\pi}r}{r} = 2\tilde{\pi}$$

$$(9 \times 1,4) : 2 = 6,3$$

$$(12,08 \times 2,6) : 5 = 6,28$$

$$(8,05 \times 0,78) : 1 = 6,27$$

Os valores encontrados equivalem a metade dos valores correspondente ao comprimento.

Qualquer que seja o comprimento ou raio, a razão é uma constante equivalente a  $\approx 2$  vezes  $\pi$



3) Escolha na dupla pelo menos 3 arcos e faça o seguinte:  
 (razão x arco): raio. O que você pode concluir?

Ex.: raio = 4, arco = 4,77, razão = 5,26 → 6,27

raio = 1, arco = 0,58, razão = 10,82 → 6,27

raio = 5,5, arco = 6,14, razão = 5,63 → 6,28

a) Concluímos que  $\left(\frac{\text{comprimento}}{\text{arco}} \cdot \text{arco}\right) = \text{raio} = \frac{\text{comprimento}}{\text{raio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

4) O que significa as razões  $\frac{CD}{AC}$ ,  $\frac{AD}{AC}$  e  $\frac{CD}{AD}$ . Justifique. Que razões são menores que 1 e as maiores que 1?

$\frac{CD}{AC} = \frac{\text{cateto op.}}{\text{hip}} = \text{sen}$

as razões menores que 1 são  $\frac{CD}{AC}$ ,  $\frac{AD}{AC}$

ou seja, seno e cosseno

$\frac{AD}{AC} = \frac{\text{cat adq.}}{\text{hip}} = \text{cos}$

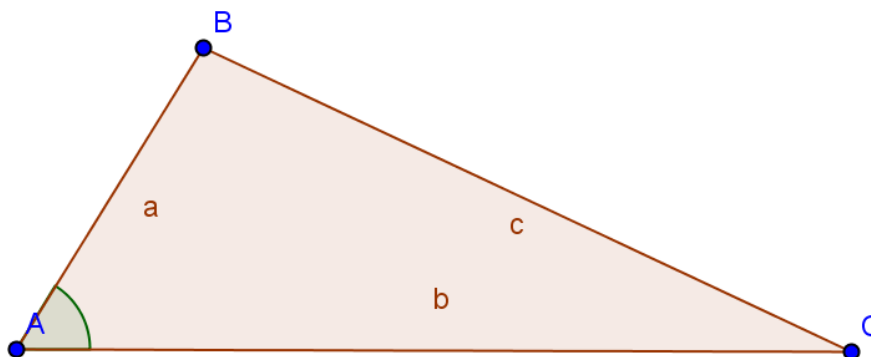
$\frac{CD}{AD} = \frac{\text{cat op.}}{\text{cat adq.}} = \text{tang}$

as razões maiores que 1 são  $\frac{CD}{AD}$ ,

ou seja, a tangente

## Atividade de investigação

**Investigação -1**  
Considere a figura

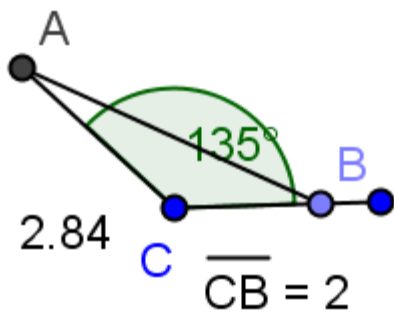
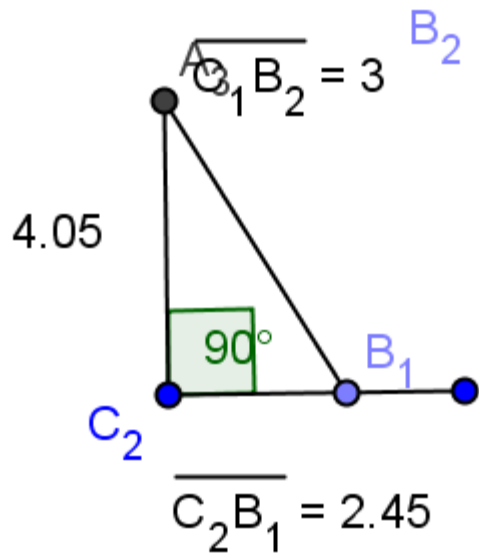
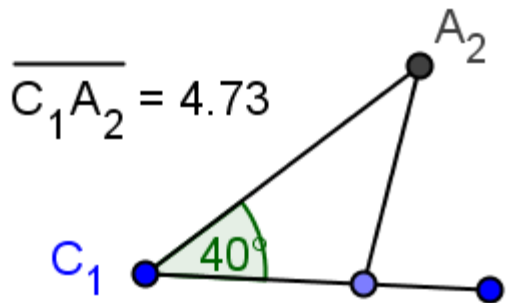


Qual a relação entre os lados de um triângulo e o ângulo  $\hat{A}$  ?

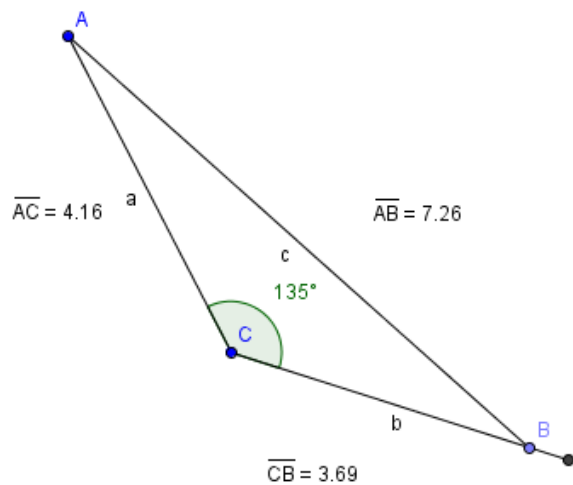
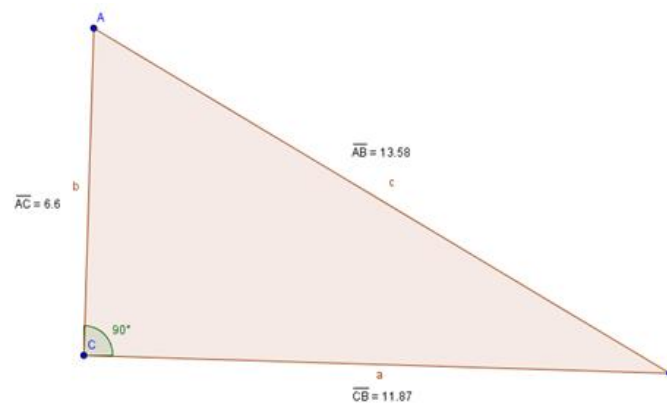
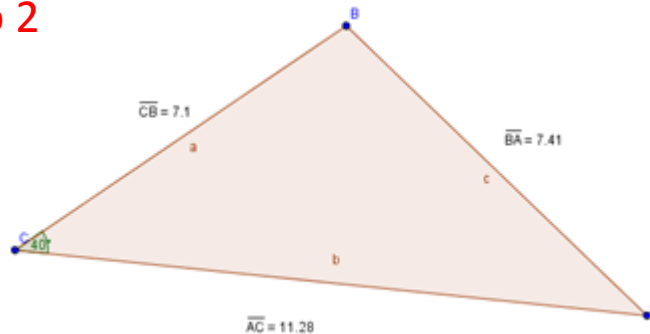
Usando o GEOGEBRA , verifique a relação nos seguintes casos

Ângulo $\hat{A}$ (graus)	Lado a	Lado b	Lado c
40	4.73	3.0	3.13
90	4.05	2.45	4.73
135	2.84	2.0	4.47

Aluno 1



Aluno 2



## Investigação- 2

- Há uma proporcionalidade entre os lados de um triângulo qualquer e o seno do ângulo oposto? Justifique.
- Considerando os triângulos acima encontre a constante de proporcionalidade em cada caso.
- Em seguida construa a circunferência circunscrita a cada triângulo. Qual o valor do diâmetro? Justifique

-

## Aluno 2

b- Usando o GEOGEBRA, verifique a relação nos seguintes casos

Ângulo $\alpha$	Lado a	Lado b	Lado c
40°	3	4,73	3,13
90°	2,45	4,05	4,73
135°	2	2,84	4,47

$$a) \frac{3,13}{\mu n 40^\circ} = \frac{3}{\mu n 1} = \frac{4,73}{\mu n 2}$$

$$\mu n 1 = 0,61$$

$$\mu n 2 = 0,96$$

$$\frac{4,73}{\mu n 90^\circ} = \frac{2,45}{\mu n 1} = \frac{4,05}{\mu n 2}$$

$$\mu n 1 = 0,51$$

$$\mu n 2 = 0,84$$

$$\frac{4,47}{\mu n 135^\circ} = \frac{2,84}{\mu n 1} = \frac{2,84}{\mu n 2}$$

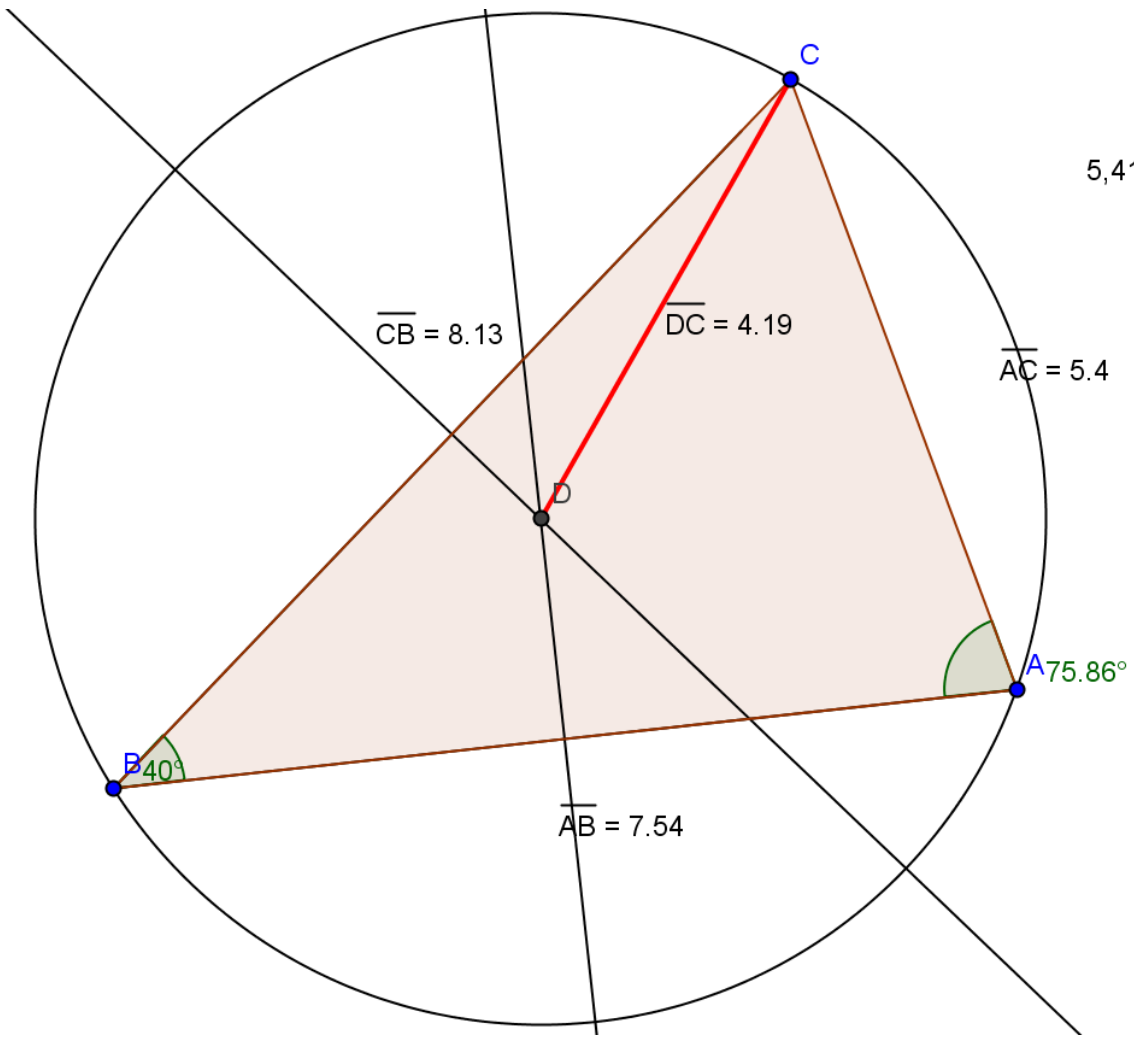
$$\mu n 1 = 0,31$$

$$\mu n 2 = 0,44$$

$$\frac{3,13}{0,64} = \frac{3}{0,61} = \frac{4,73}{0,96} \Rightarrow 4,89 \approx 4,91 \approx 4,92$$

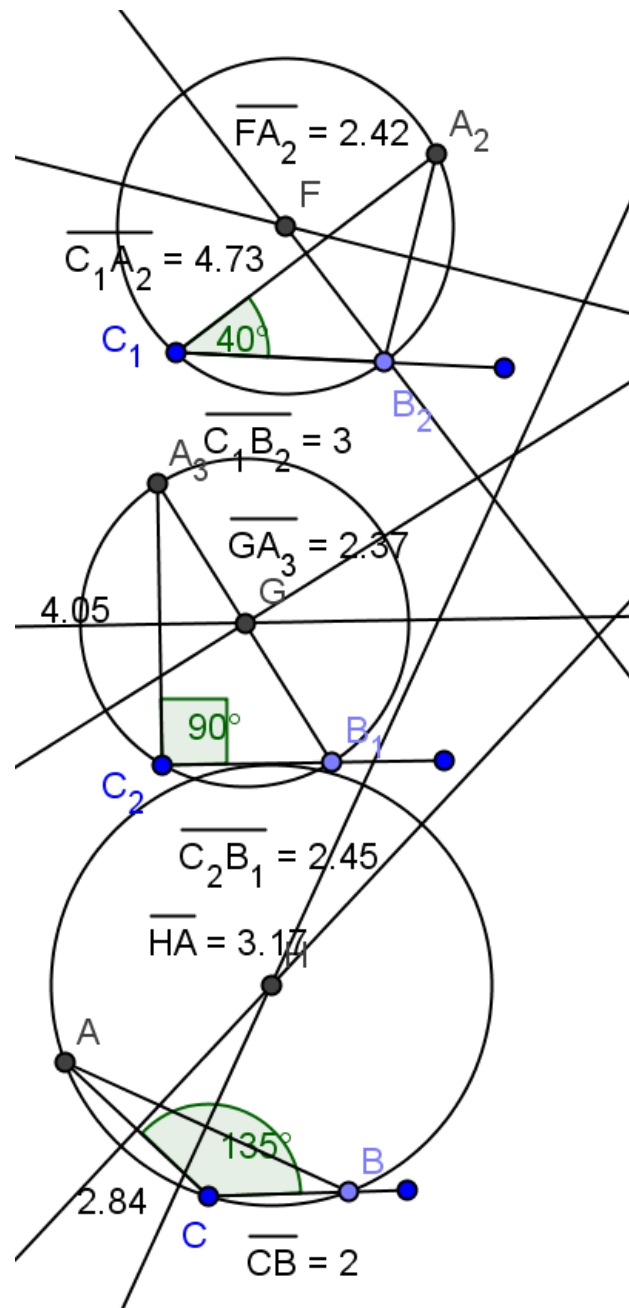
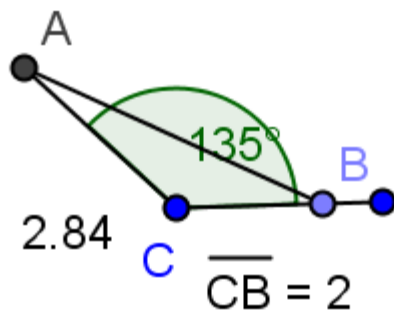
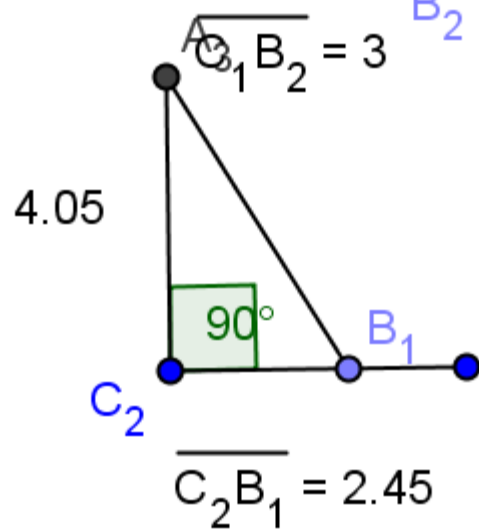
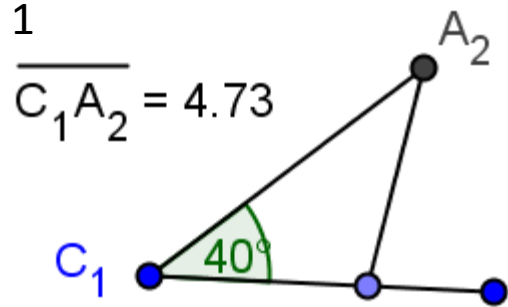
$$\frac{4,73}{0,51} = \frac{2,45}{0,51} = \frac{4,05}{0,84} \Rightarrow 4,73 \approx 4,8 \approx 4,82$$

$$\frac{4,47}{0,70} = \frac{2}{0,31} = \frac{2,84}{0,44} \Rightarrow 6,38 \approx 6,45 \approx 6,45$$



$$5,41/\text{sen}40 = 8,21/\text{sen}76 = 8,45 = 2R = 2 \cdot 4,2$$

Aluno 1







# Obrigado

Ruth Ribas Itacarambi – Faculdades Oswaldo Cruz

[ritacarambi@yahoo.com.br](mailto:ritacarambi@yahoo.com.br)

Rogério Chaparin – IFSP - Campus Guarulhos

[rochaparin@gmail.com](mailto:rochaparin@gmail.com)