Conjeturas y demostraciones a partir del embaldosado con polígonos regulares

Mario Dalcín **Verónica Molfino**
mdalcin00@gmail.com veromolfino@gmail.com

Departamento de Matemática del Instituto de Profesores 'Artigas'
Montevideo-Uruguay

Contexto del taller:
Parte del curso “La demostración en geometría”(cuatro meses, semipresencial) y que buscaba:

i) afianzar algunos conocimientos geométricos que se trabajan en la formación magisterial
ii) actualizar en didáctica de la geometría, y en especial de la demostración geométrica
iii) articular el trabajo en lápiz y papel y el trabajo en Geometría Dinámica.

Participaron doce profesores que se desempeñaban en 2010 como docentes de matemática de Magisterio, algunos eran maestros de enseñanza primaria y otros profesores de matemática de enseñanza media.

En sus concepciones los docentes reflejan concebir la matemática como algo ya acabado y por tanto la enseñanza busca transmitir resultados matemáticos (definiciones, teoremas…), lo que hace de la enseñanza un proceso bastante lineal.

Objetivo central del taller:

promover la reflexión acerca de la importancia de formular conjeturas y las formas de establecer su validez.

Lo que buscamos en el taller fue centrar la atención en los procesos matemáticos (definir, demostrar…) planteando a los docentes la siguiente actividad:

La actividad propuesta:

¿Se puede embaldosar una superficie plana ilimitada, usando solamente polígonos regulares de igual lado? ¿De cuántas maneras?

Forma de trabajo:

Se solicitó a los docentes que al abordar la actividad, fueran registrando los caminos seguidos, tanto los exitosos como los que no.

El taller se inició en forma presencial y trabajando en lápiz y papel. El trabajo continuó a distancia durante dos semanas hasta el próximo encuentro presencial, momento en que debía entregarse el registro de las producciones, a partir de las cuales se centró la discusión.

Algunos trabajaron solos y otros en equipos de a dos o de a tres, tanto en la instancia presencial como a distancia.

¿Cómo concebir la geometría y la actividad geométrica?

Houdement y Kuzniak (1999, 2000) proponen tres geometrías:

Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

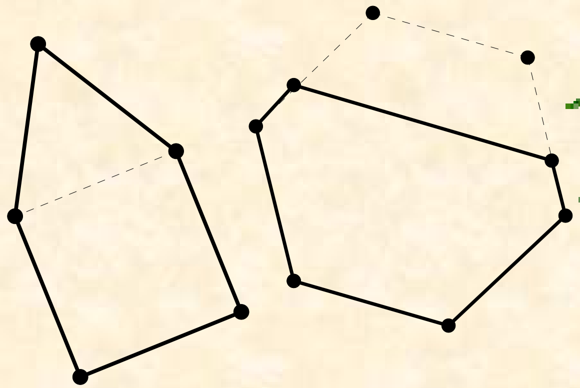
¿Qué es un polígono regular?

1) polígono con lados iguales e inscriptible,
2) polígono con lados iguales y ángulos iguales,
3) polígono con lados iguales,
4) polígono con ángulos iguales.

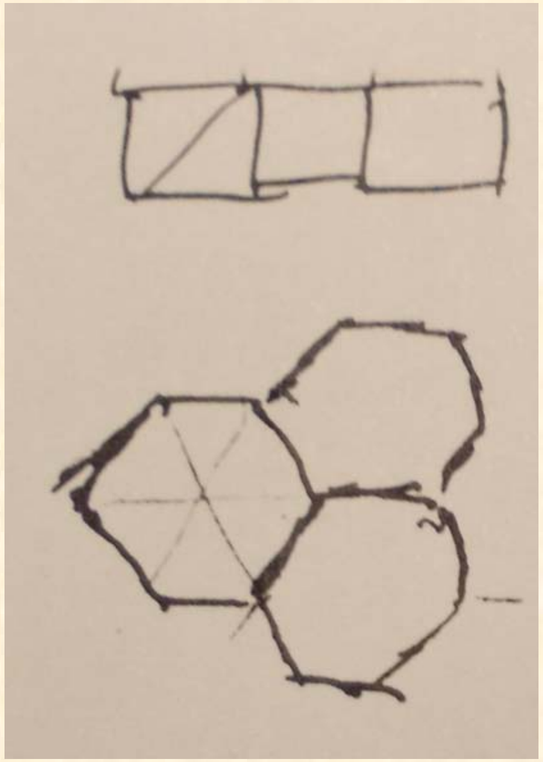
Lados iguales → ángulos iguales?
Ángulos iguales → lados iguales?

- En el triángulo equilátero se cumple → en el resto de los polígonos [regulares] también debería ser así.
- Rectángulo como contraejemplo de última implic.
- Rombo como contraejemplo de implic. previa.

Y si excluimos a los cuadriláteros?



Algunas producciones



"Los casos más sencillos son los siguientes:

3 hexágonos
4 cuadrados
6 triángulos"

(Alejandro)

“Vimos que tenía relación con la medida de los ángulos de los polígonos, más precisamente con que la suma de los ángulos que concurren en un vértice debe ser de 360º.”

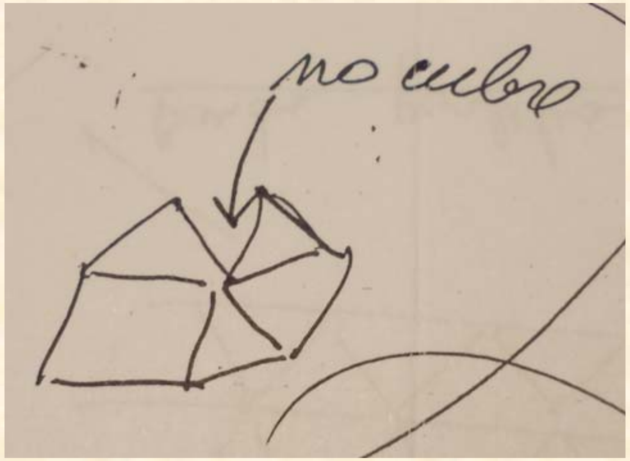
•“Con el rectángulo también se puede cubrir el plano, lo mismo que con paralelogramos.”

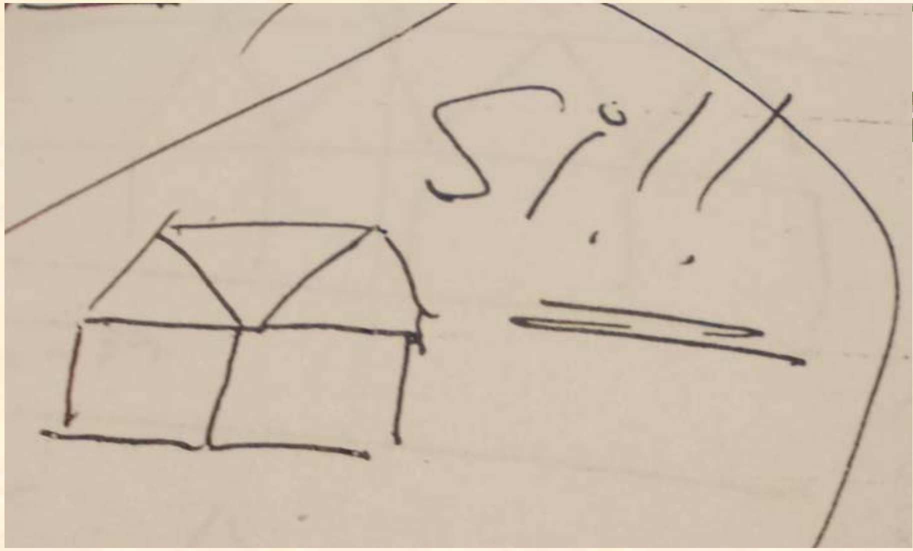
•“Volviendo a los polígonos regulares con el pentágono no se puede recubrir el plano, calculamos la medida del ángulo interior del pentágono, es de 108º por lo que no podemos formar 360º.”

•“Nos interrogamos que sucedería con los pentágonos no regulares.”

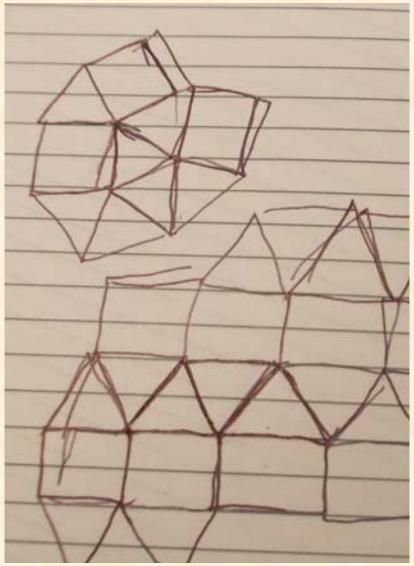
•“Con figuras de más de 6 lados no se puede recubrir el plano.”

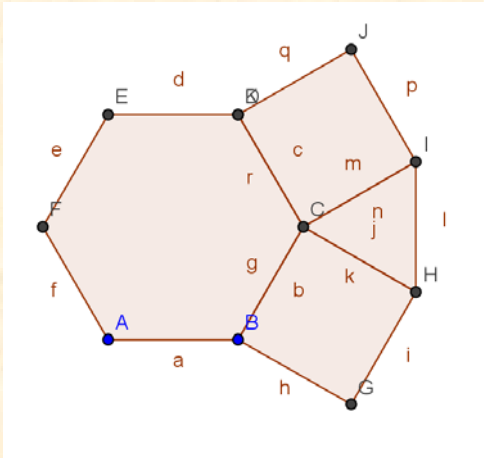
(Ángela y Carmen)

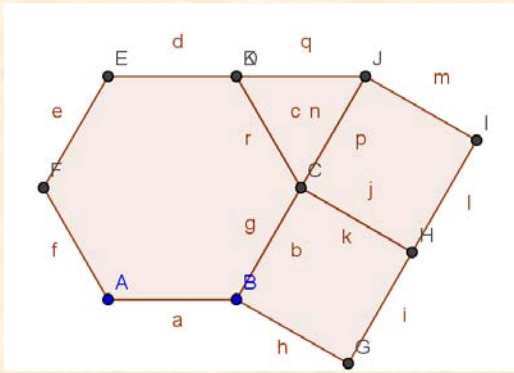

no cubre


Si!!

Distintas herramientas

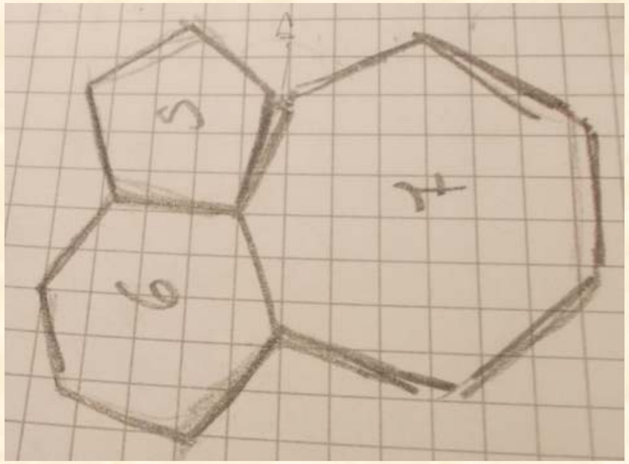


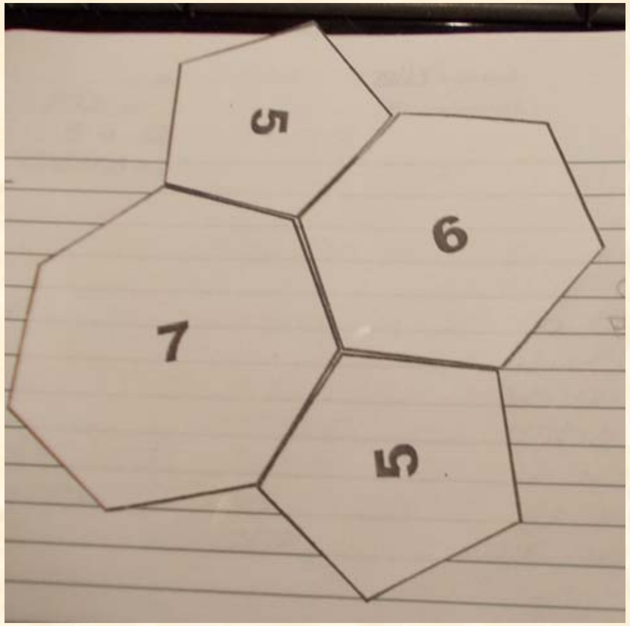




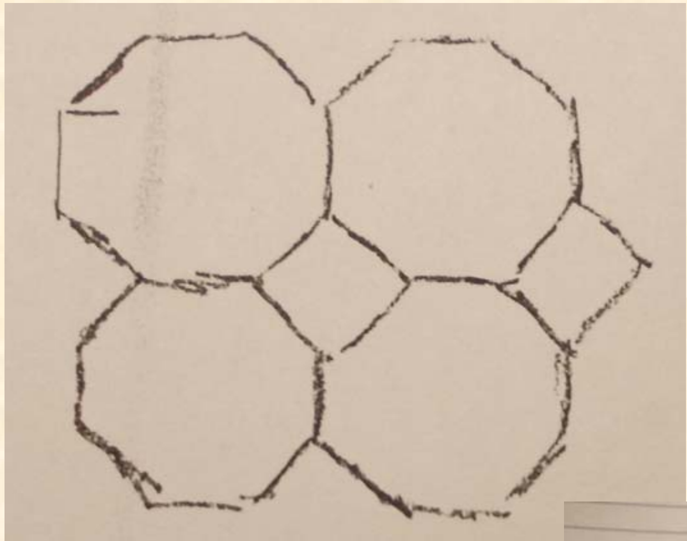
Mismos polígonos con distintas configuraciones

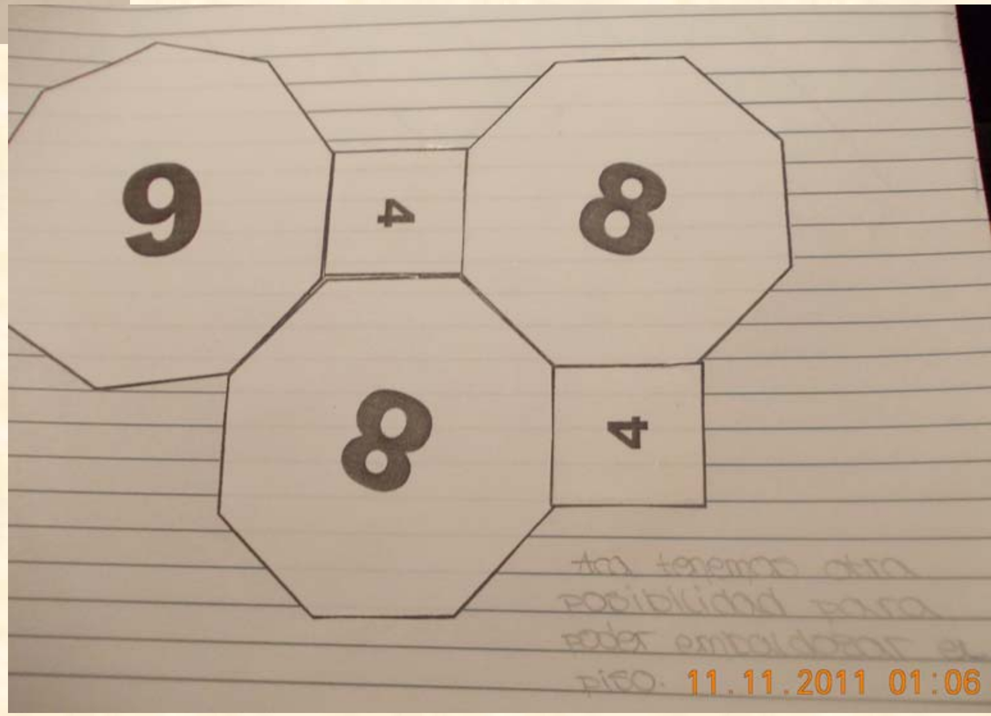
¿Son embaldosados?

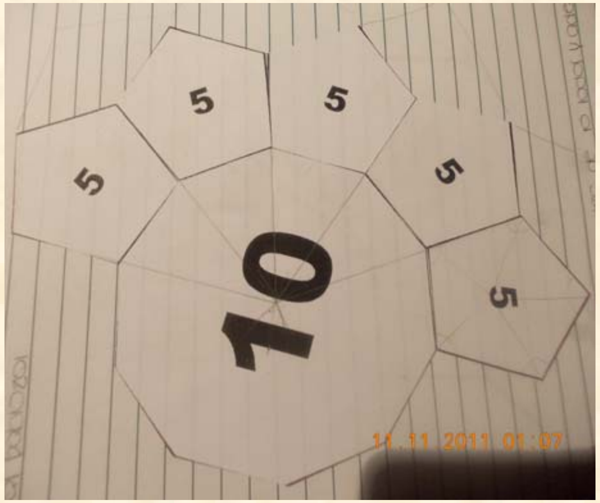




Primeros resultados

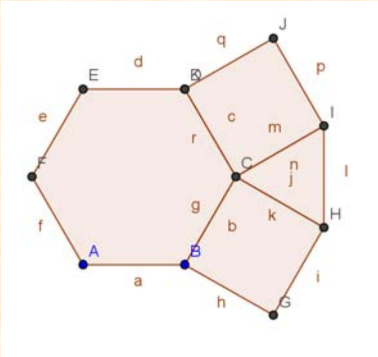


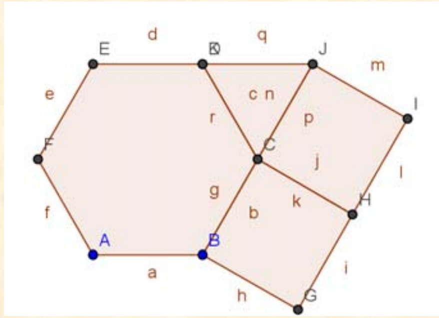


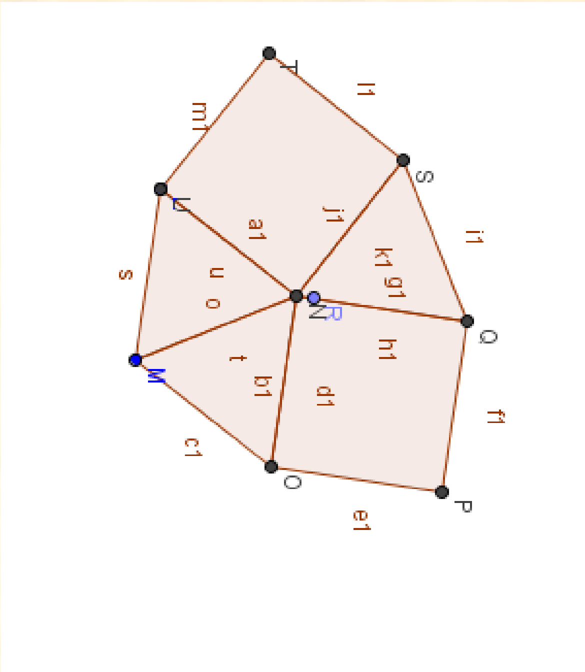

5
5
5
5
5
10
11.11.2011 01:07

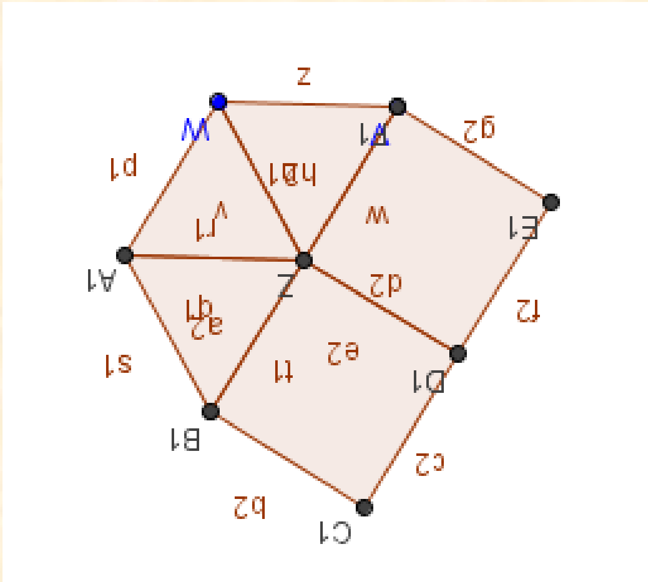

12
12
12
4
4
4

“Ví que el exágono se puede sustituir por dos triángulos.” (Alejandro)





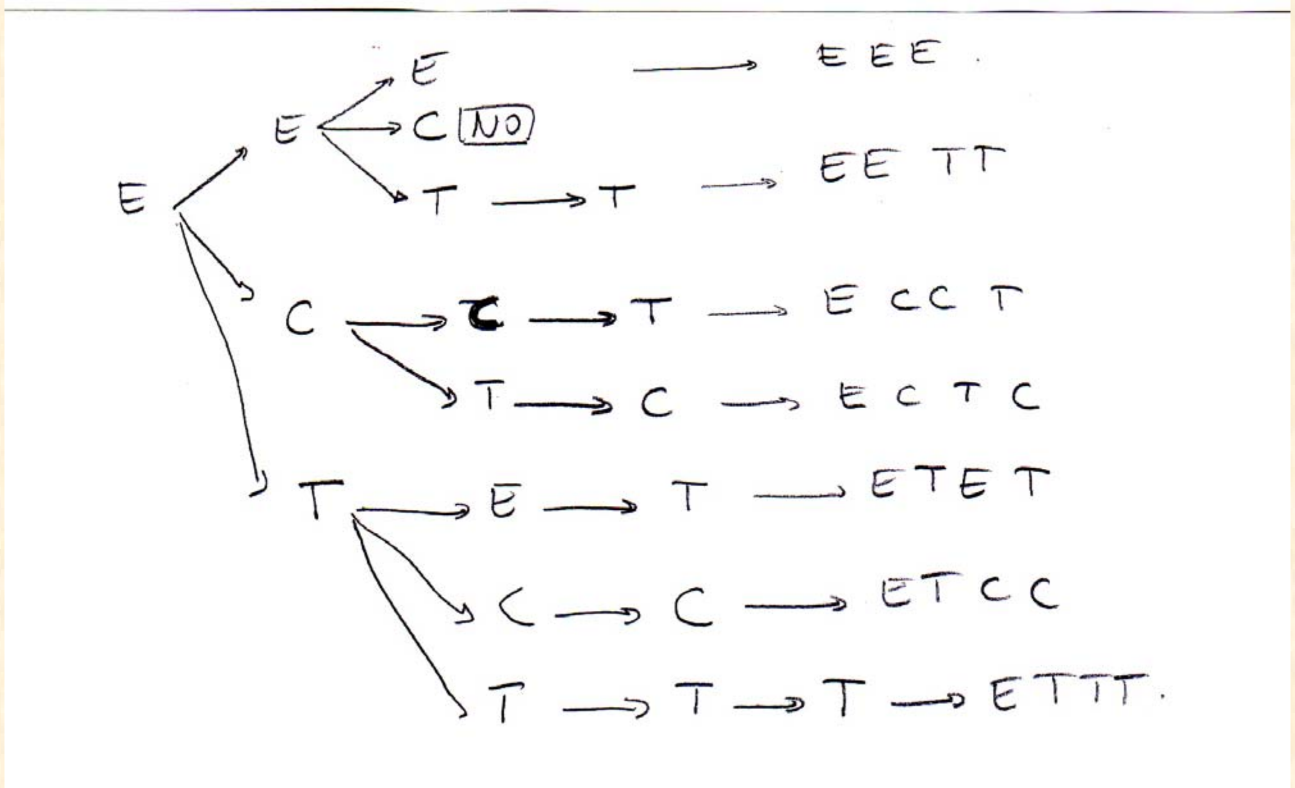


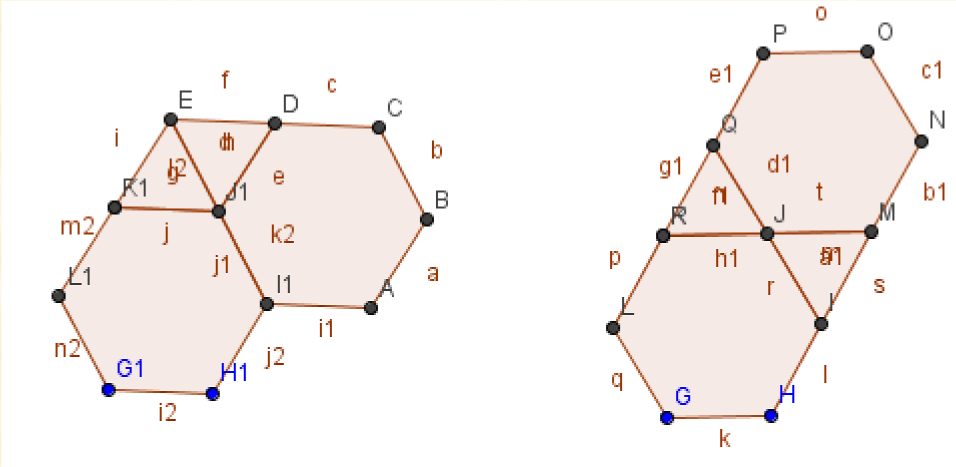


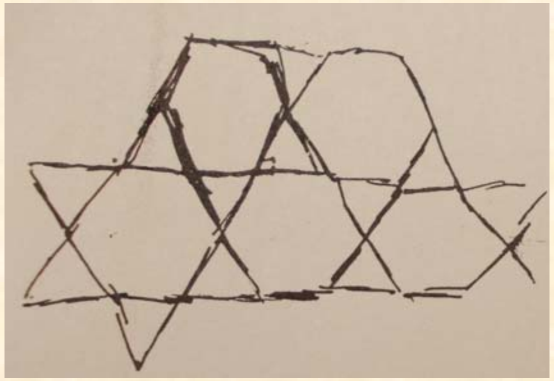
Organizando la búsqueda

“Sentí la necesidad de sistematizar de alguna manera la búsqueda y por eso recurrí a los diagramas de árbol. Comenzando por la figura con ángulo mayor que pensaba que podía tener, es decir el hexágono.”

(Alejandro)




E
f
D
c
C
i
b
R1
J1
e
B
m2
j
k2
L1
j1
I1
A
a
i1
n2
G1
H1
j2
i2
o
P
O
e1
c1
Q
N
g1
d1
t
b1
R
J
M
p
h1
r
s
L
I
q
G
H
l
k



n	Ángulo int.
3	60
4	90
5	108
6	120
8	135
9	140
10	144
12	150
15	156
18	160
20	162
24	165
30	168
36	170
40	171
45	172
60	174
72	175
90	176
120	177
180	178
360	179

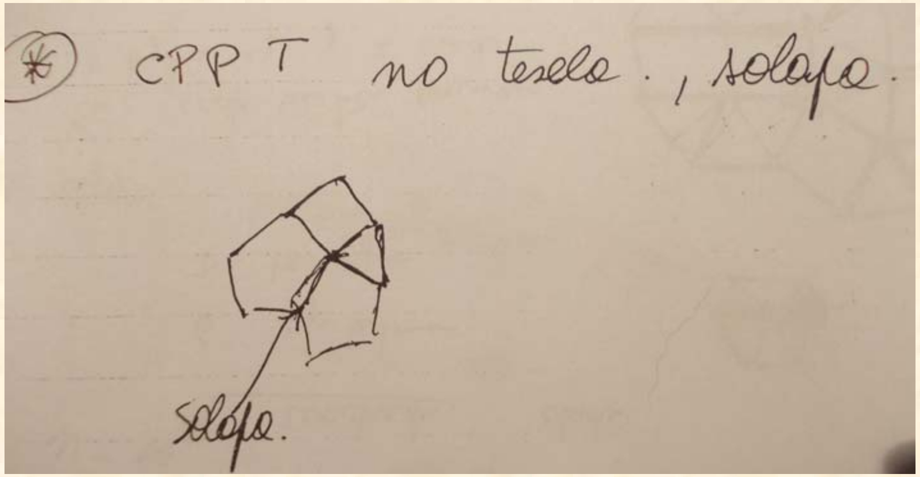
“Pensé en los valores de *n* para los cuales el ángulo del polígono $180\,(n-2)/n$ es entero.”

“Esperaba una lista de 18 números y resultaron ser 22, es decir que hay cuatro enteros más de los evidentes generados por divisores de 180.”

“Recién acá me di cuenta que podrían utilizarse polígonos con más de 6 lados!!”

(Alejandro)

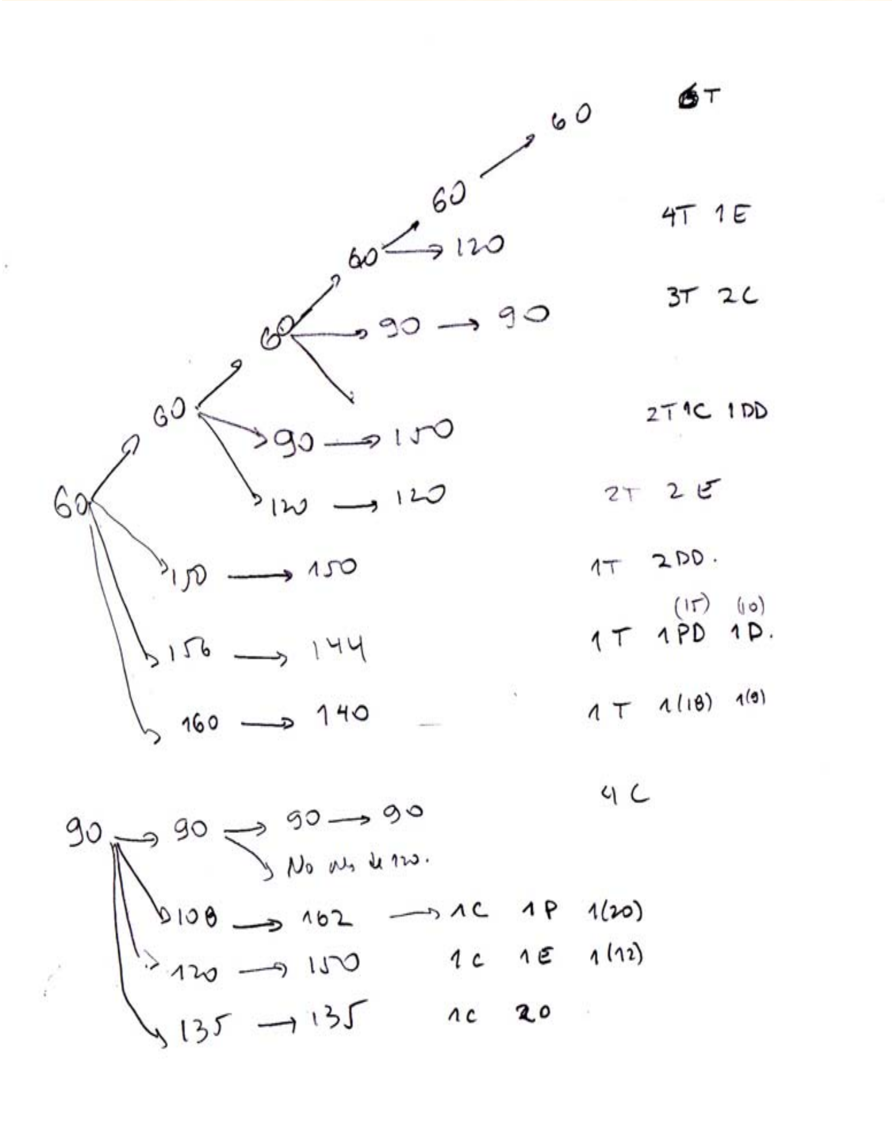
Polígono Regular	Ángulo interno	
Triángulo	60° A	13 lados → 152,3°...
cuadrado	90° B	14 lados → 154,3°...
pentágono	108°	15 lados → 156°
exágono	120° C	16 lados → 157,5°
Eptágono	128,5°...	17 lados → 158,8°...
Octógono	135°	18 lados → 160°
9 lados	140°	19 lados → 161,05...
10 lados	144°	20 lados → 162°
11 lados	147° 3°...	
12 lados	150°.	



3	60
4	90
5	108
6	120
7	128,57..
8	135
9	140
10	144
11	$147,\overline{27}$
12	150
13	152,31

"No encontramos combinaciones con pentágono o heptágonos.
Las combinaciones son con polígonos de un número par de lados, a excepción del triángulo."

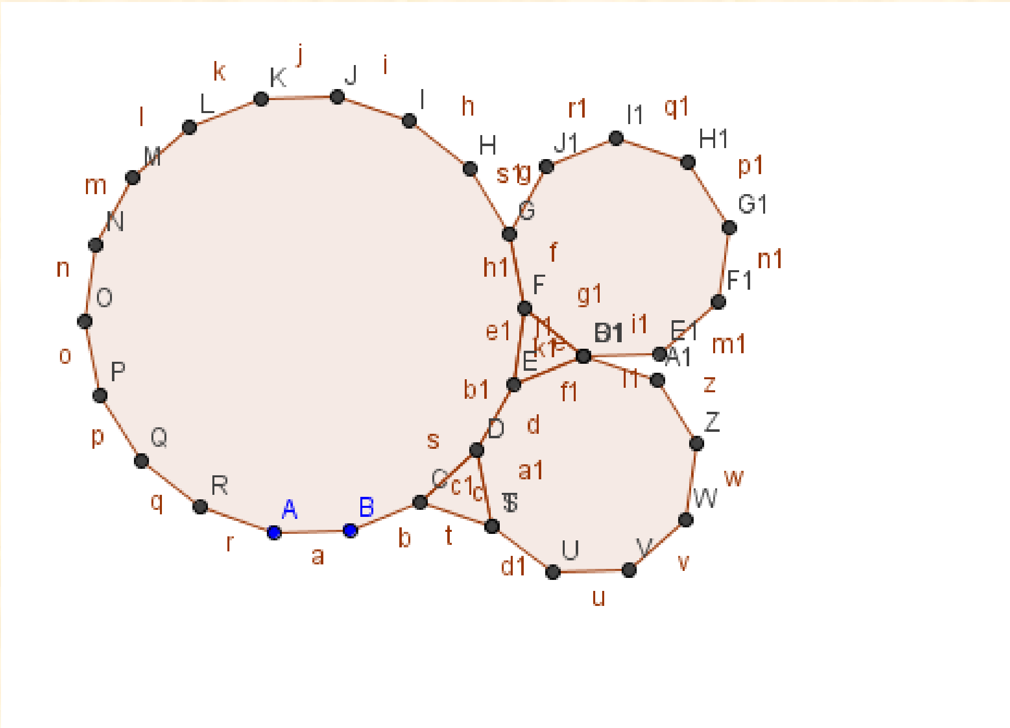
(Ángela y Carmen)



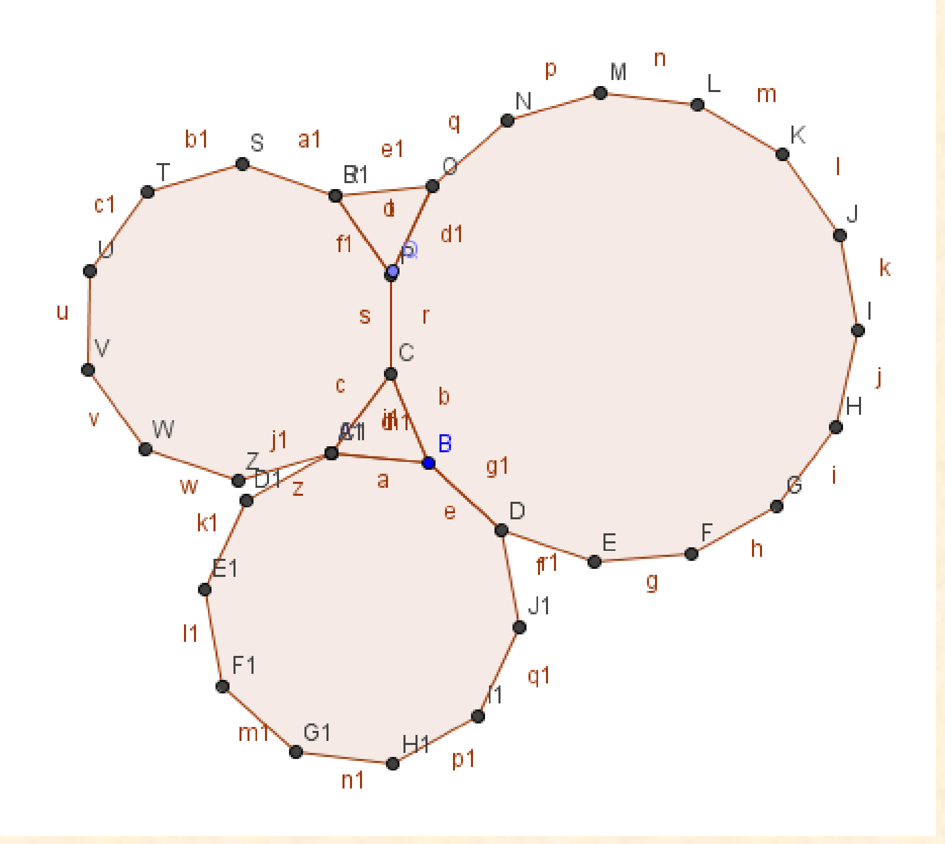
"Me di cuenta que una vez incluido un ángulo mayor que 150 ya no "había lugar" para otro igual o mayor que él."
(Alejandro)

"Nos dimos cuenta que podían sólo podían haber entre 3 (xq 2 no tienen sentido) y 6 polígonos (6 triángulos)."
(Ángela y Carmen)

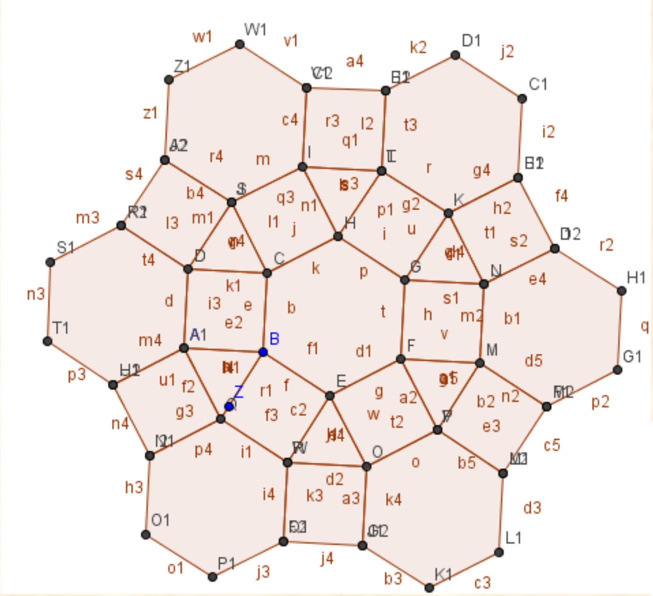
"Tenía una lista con nuevos "descubrimientos"… en realidad no fue un trabajo geométrico sino más bien aritmético… tenía la sospecha de que no todas estas posibilidades "teóricas" teselaban pero la complejidad de los dibujos hacían imposible construirlos con lápiz por lo que recurrí a Geogebra…" (Alejandro)



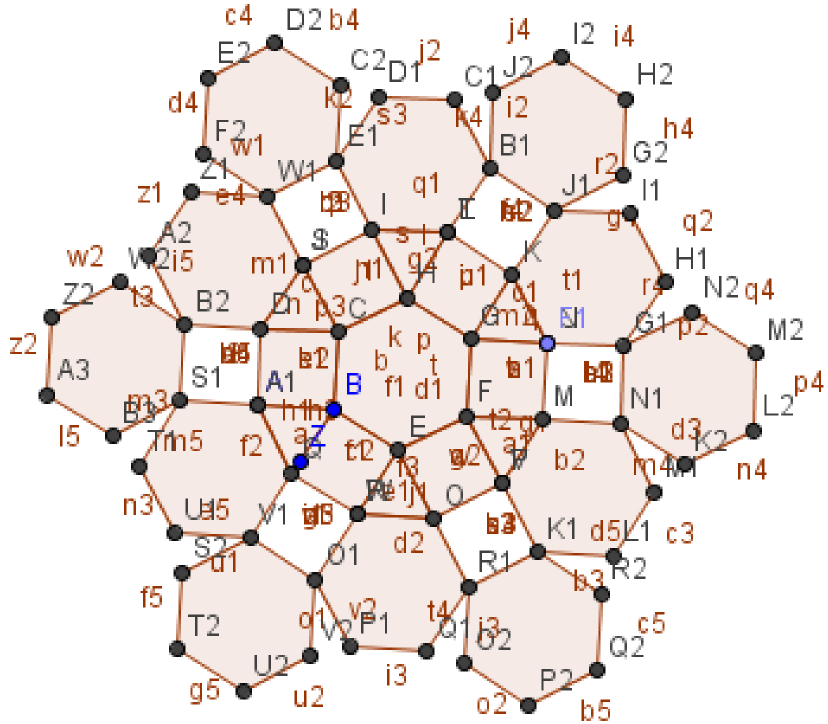
3, 9, 18


p
M
n
N
L
m
q
K
b1
S
a1
e1
B1
O
T
c1
d
J
f1
d1
U
P
k
u
s
r
I
V
C
j
c
b
H
W
B
j1
A1
g1
Z
D1
v
w
z
a
G
i
e
D
k1
E
F
h
f1
E1
g
J1
l1
F1
q1
I1
m1
G1
H1
p1
n1

3, 10, 15



3, 4, 6



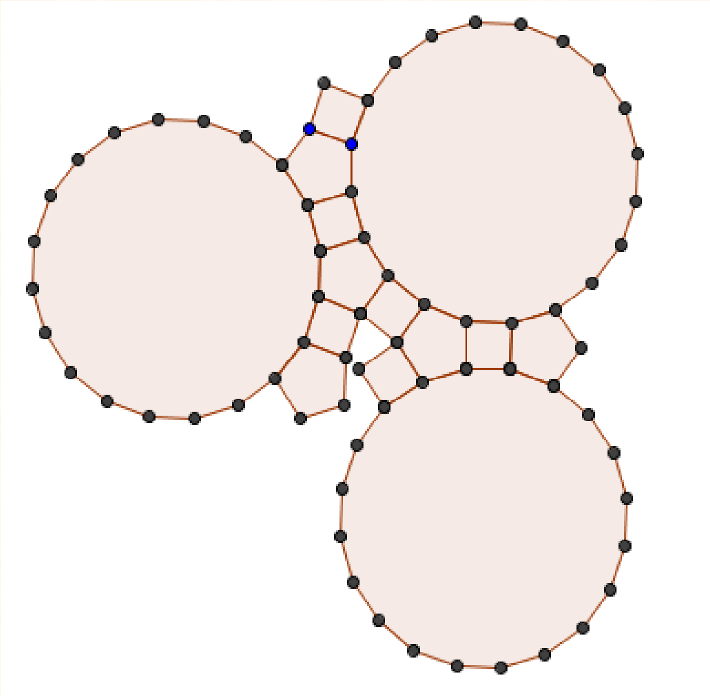
“Inicialmente llegamos a unas cuantas posibilidades además de las ya conocidas y comunes (6 equiláteros, 4 cuadrados y 3 hexágonos):
3, 10 y 15 lados;
4, 5 y 20 lados
y otras más.

Luego de “jugar” un poco con estas posibles combinaciones, empezamos a pensar en cómo obtener todos los polígonos regulares, posibles, con la medida de ángulos interiores “natural” porque luego de obtenerlos sólo teníamos que hacer las combinaciones posibles.”

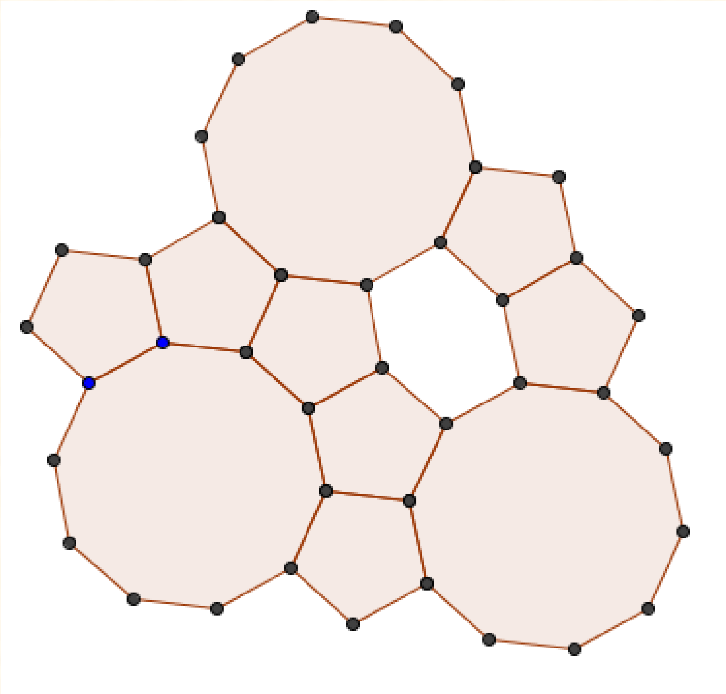
(Lauras)

A continuación hacemos todas las combinaciones:
COMBINACIONES DE A 3
1 equilátero, 1 octógono y 1 polígono de 24 lados
1 equilátero, 1 polígono de 9 lados y 1 polígono de 18 lados
1 equilátero, 1 polígono de 10 lados y 1 polígono de 15 lados
1equilátero y 2 polígonos de 12 lados
1 cuadrado, 1 pentágono y 1 polígono de 20 lados
1cuadrado, 1 hexágono y 1 polígono de 12 lados
1 cuadrado y 2 octógonos
2 pentágonos y 1 polígono de 10 lados
3 hexágonos
COMBINACIONES DE A 4
1 equilátero, 2 cuadrados y 1 hexágono
2 equiláteros, 1 cuadrado y 1 polígono de 12 lados
2 equiláteros y 2 hexágonos
4 cuadrados
COMBINACIONES DE A 5
3 equiláteros y 2 cuadrados
4 equiláteros y 1 hexágono
COMBINACIONES DE A 6
6 equiláteros

“Luego de llegar a estas combinaciones, con el programa Geogebra empezamos a tratar de teselar el plano con alguna de ellas y empezamos a observar que habían combinaciones que al tratar de repetirlas no llenaba el plano...” (Lauras)

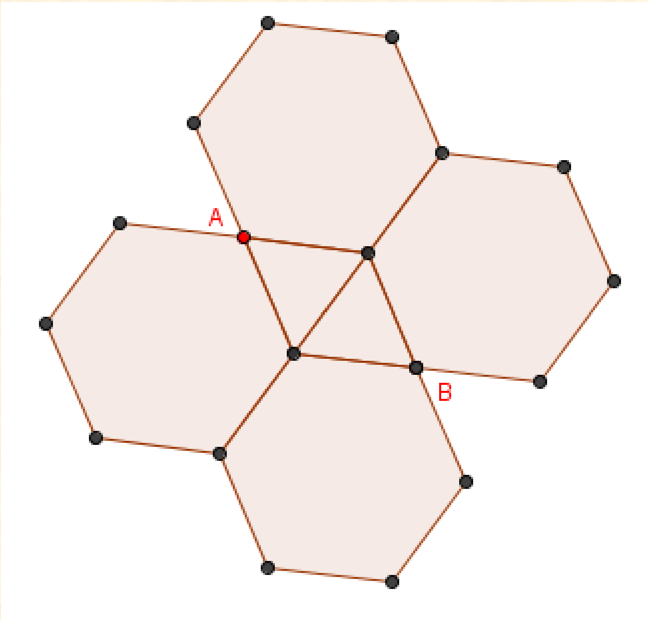


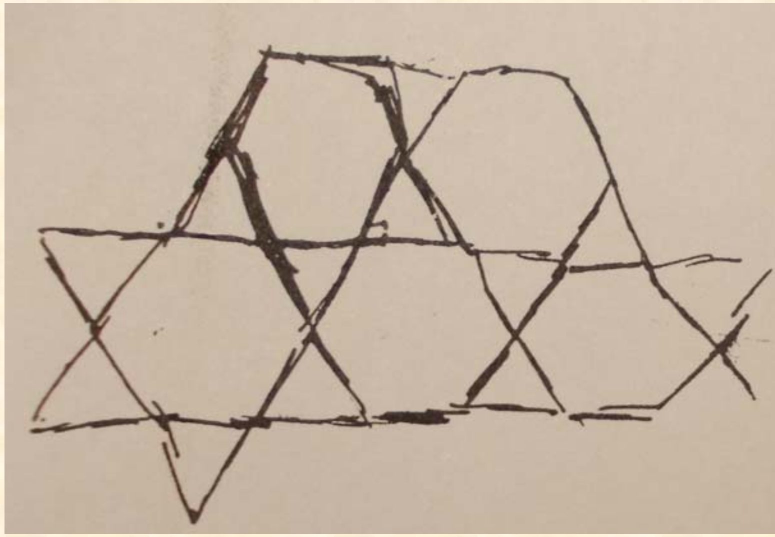
4, 5, 20



5, 5, 10

"… y que habían combinaciones que permitían obtener dos "modelos" diferentes." (Lauras)





A quién creer?

"Con estas 16 combinaciones, se pueden obtener 20 "modelos" diferentes, de los cuales, 11 llenan el plano y 9 no permiten llenarlo." (Lauras)

"Un recubrimiento del plano formado por más de un tipo de polígono regular y con
idénticos vértices de figura se dice que es un recubrimiento semirregular. Esta condición
adicional sobre los vértices de figura supone que los mismos tipos de polígonos deben
concurrir en cada vértice, y deben concurrir en el mismo orden. Se puede demostrar que existen 18 modos de formar vértices de figuras con polígonos regulares de dos o más tipos. De estas 18 formas, 8 corresponden a teselaciones semiregulares."

(Godino)

Conclusiones

Todos los participantes reconocen la no linealidad de la actividad matemática que desarrollaron.

Las formas de abordar el problema fueron variadas:

- en forma numérica
- en forma algebraica
- mediante el dibujo de polígonos regulares en lápiz y papel
- recortando polígonos regulares en cartón
- usando Geogebra
- combinando algunas de las formas anteriores

El proceso seguido

1) Prueba (empírica o deductiva) con algunos polígonos
2) Búsqueda que en un vértice los ángulos sumen 360º
3) Que además de 2) cubran el plano
4) Hacer distinción según la regularidad de los vértices
5) No se arriba a una demostración acabada del problema

Es en 3) donde Geogebra hace visible y permite abordar un problema que no había surgido trabajando con las otras herramientas, y se está trabajando en Geometría I.

Los maestros valoran el éxito de haber conseguido algunos embaldosados y de haber podido responder deductivamente algunas situaciones dudosas.
Un equipo de docentes que eran maestros plantearon el problema a sus propios estudiantes de magisterio.

Los profesores, si bien valoran el haber hallado distintos embaldosados, sienten cierta angustia frente al no tener una demostración acabada y solicitan algún libro donde leer la respuesta.
Los docentes que eran profesores de matemática dicen que no lo plantearon a sus estudiantes porque ellos mismo aún no tenían una demostración completa y eso los inhibió.

Formar es transitar hacia arriba

Geom III

Geom II

Geom I

Formar es transitar hacia arriba y hacia abajo

Geom III

Geom II

Geom I

Referencias

- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspire de Gonseth et destine a etudier lenseignement de la geometrie en formation des maitres. *Educational Studies in Mathematics*, 40 (3), 283-312.
- Houdement, C. y Kuzniak. A. (2000). Formation des maitres et paradigmes geometriques. *Recherches en didactique des mathematiques*, 2, 89-116.
- Kuzniak, A.(2006). Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en geometrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6 (2), April, 167–187.