PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

UMBERTO ALMEIDA SILVA

ANÁLISE DA ABORDAGEM DE FUNÇÃO ADOTADA EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

UMBERTO ALMEIDA SILVA

ANÁLISE DA ABORDAGEM DE FUNÇÃO ADOTADA EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini.***

São Paulo

2007

Banca Examinadora

DEDICATÓRIA

Dedico esta obra aos meus pais, que desde cedo me indicaram o caminho do bem, da verdade, do amor e da justiça, e a minha esposa e filhos, que são o meu incentivo para uma vida de luta.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini, pela competência, dedicação e incentivo, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Às professoras: Doutora Célia Carolino Pires, Doutora Irene Mauricio Cazorla e Doutora Sílvia Dias Alcântara Machado, por aceitarem participar da banca examinadora e pelas sugestões dadas no exame de qualificação.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

À minha esposa Rosana e aos meus filhos, Andrey e Alana, pela compreensão, paciência, apoio e carinho.

Aos colegas de Mestrado, Cláudio e Lea, pelo incentivo e amizade.

Aos colegas da E.E. Adonias Filho, em especial ao professor Marcelo, pela ajuda com o resumo em inglês (abstract).

À Bartira, pela revisão do abstract.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo investigar a abordagem de função adotada em livros didáticos atuais da Educação Básica, buscando verificar quais são as estratégias utilizadas pelos autores desses livros para apresentar a noção de função, se a relação discreto/contínuo fica evidente na construção de gráficos, e se a conversão entre os registros gráfico e algébrico ocorre nos dois sentidos. Para isso, realizamos uma análise qualitativa em cinco livros didáticos atuais da Educação Básica. Escolhemos o livro didático como fonte primária de dados para nossa investigação, entre os diversos registros textuais do saber, por ele ser um dos instrumentos mais importantes mobilizado no processo de ensino e aprendizagem no cenário educacional brasileiro. A pesquisa fundamentou-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, ressaltando a importância da identificação das variáveis visuais pertinentes no esboço de curvas, na conversão entre os registros gráfico e algébrico. Os resultados obtidos mostram que, a maioria dos livros analisados adota como ponto de partida para a construção do conceito de função a exploração da relação de dependência entre grandezas por meio da resolução de problemas. Outro aspecto importante que observamos nos livros analisados foi o cuidado com a contextualização e a interdisciplinaridade. Na maioria dos livros, muitas atividades são apresentadas a partir de situações significativas que valorizam as práticas sociais, as articulações internas à própria Matemática e as conexões com outras áreas do conhecimento. Por outro lado, constatamos que na maioria dos livros analisados a relação discreto/contínuo não é explicitada satisfatoriamente. Observou-se também que, na maioria dos livros, a conversão entre os registros gráfico e algébrico não ocorre nos dois sentidos, e que as variáveis visuais pertinentes geralmente não são levadas em conta, no esboço de gráficos.

Palavras-Chave: Livros Didáticos de Matemática, Função, Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

The purpose of this work is to investigate the approach of function adopted in current didactic books of the Basic Education, seeking to verify which are the strategies that the authors of these books use to present the notion of function, if the relation discrete/continuous is evident in the construction of graphs, and if the conversion between the registers graphical and algebraic occurs in both senses. In order to do this, we carried out a qualitative analysis among five current didactic books of the basic education. We chose the didactic book as the primary data source for our inquiry, among the various written registers of knowledge, because it is one of the most important instruments mobilized in the teaching and learning process in Brazilian educational scene. The research is based on the theory of the semiotic representation registers by Raymond Duval, stressing the importance of visual variables identification in the sketch of curves, in the conversion between graphical and algebraic registers. Obtained results show that most of analyzed books adopts the construction of the function concept and the exploration of the relation of dependence between largenesses by problems resolution as the starting point. Another important aspect that we observe in analyzed books is the care with the context and the interdisciplinary. In the majority of books, many activities show significant situations that value social behavior and the connections with other areas of knowledge. On the other hand, we evidence that, in the majority of analyzed books, the continuous/discrete relation is not satisfactorily explicited. It was also observed that, in the majority of books, the conversion between graphical and algebraic registers does not occur in both directions, and that pertinent visual variables are generally not taken in account, in the sketch of graphs.

Key-words: Mathematics Didactic Books, Function, Semiotics Representation Registers.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

APRESENTAÇÃO

Sou formado em Geologia pela Universidade Federal da Bahia. Em 1991, devido à dificuldade de emprego em minha área de atuação, e à carência de professores de Matemática, comecei a lecionar essa disciplina em escolas públicas de Diadema, na Grande São Paulo. Foi quando passei a me interessar pela área da Educação Matemática.

A partir daí, minha formação seguiu o seguinte percurso: primeiro fiz um curso de complementação pedagógica em Matemática e, logo em seguida, fiz o curso de especialização em Educação Matemática, ambos na Universidade Bandeirante de São Paulo. Posteriormente, em 2001, tive a oportunidade de fazer o curso de Licenciatura em Matemática, oferecido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), voltado para a formação de professores.

Buscando novas formas de atualização com o objetivo de melhorar minha formação didático-pedagógica e, consequentemente, minha prática docente, finalmente, em 2005, ingressei no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Em 2006 entrei para o Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), do qual faz parte a minha orientadora, professora Dra. Barbara Lutaif Bianchini.

O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica abrange diversos projetos que constituem ramos do projeto maior: *Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática*?

O projeto focaliza estudos relativos ao ensino e a aprendizagem da Teoria dos Números (Aritmética) e da Álgebra, nos diversos níveis de ensino, investigando, dentre outros aspectos, as articulações das noções e concepções matemáticas dos alunos e professores, e também as presentes em documentos curriculares, contemplando conteúdos como: Números, Equações, Inequações, Relações.

Este trabalho está inserido na linha de pesquisa: A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores, e faz parte do projeto *Concepções acerca de Relações*, que focaliza as concepções de professores e estudantes em temas centrais da álgebra do ensino básico, como, por exemplo, o estudo de funções, que é nosso objeto de estudo.

Várias pesquisas revelam-nos que, tradicionalmente, o ensino da Álgebra privilegia a manipulação simbólica para resolver equações e simplificar expressões. Deste modo a Álgebra tem desempenhado um papel mais mecanicista do que desenvolver, nos alunos, o seu raciocínio matemático.

Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), apesar da álgebra ocupar boa parte dos livros didáticos atuais, não tem recebido a devida atenção nos debates, estudos e reflexões referentes ao ensino e aprendizagem da Matemática. Sobre o ensino atual da álgebra os autores comentam que:

> *O modo como a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra – de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões – tal como ocorria há várias décadas, mostra que seu ensino não tem recebido a devida atenção* (p.40).

De fato, é possível que muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Álgebra resultem da maneira como ensinamos esse conteúdo, privilegiando procedimentos e regras, limitando a capacidade de abstração e generalização dos estudantes.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1998), além de possibilitar o desenvolvimento e o exercício da capacidade de abstração e generalização do aluno, o estudo da Álgebra torna possível a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. No entanto, várias pesquisas têm evidenciado que os alunos não conseguem utilizar o conhecimento algébrico, supostamente adquirido, para enfrentar situações novas, ou seja, a Álgebra até então ensinada é desprovida de significado para o aluno.

Duas questões que envolvem o ensino da Álgebra na Educação Básica hoje são fundamentais: a questão principal é sobre até que ponto deve-se exigir dos alunos a capacidade de manipulações algébricas, e a segunda questão é a do papel da idéia de função no estudo da álgebra, ou seja, da importância relativa da visão da álgebra como o estudo de relações entre quantidades (USISKIN, 1995). Nessa perspectiva, os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que:

> *É mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as 'manipulações' com expressões e equações de forma meramente mecânica* (p.116).

Um dos objetivos para que o ensino da Matemática possa resultar em uma aprendizagem real e significativa para o estudante, é levá-lo a "estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo" (BRASIL, 1999, p.254).

O uso da linguagem algébrica para representar e analisar situações matemáticas e para modelar fenômenos diversos, constitui um aspecto importante da competência matemática.

Assim, "o **estudo das funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema [...]" (BRASIL, 2002, p.121).

Ao lidar com o conceito de função em diversas situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a construir modelos para interpretação e investigação em Matemática. Os PCNEM (BRASIL, 1999) apontam o caráter integrador das funções que, além de permitir conexões internas à própria Matemática servem para modelar problemas do cotidiano e de outras áreas do conhecimento como a Física, a Geografia e a Economia, por exemplo.

Um dos aspectos importantes associado à noção de função é o contato com diferentes modos de representação desse objeto matemático. Estabelecer relações entre tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas pode ajudar os alunos a desenvolver diversos tipos de conexões e a compreender melhor o conceito de função. A compreensão da noção de função está ligada ainda à capacidade de mudar de um tipo de representação para outro. Entretanto, nossa experiência docente e pesquisas na área da Educação Matemática mostram que raramente os alunos conseguem relacionar as diferentes representações de função.

As concepções que os professores têm sobre a Matemática, particularmente sobre função, desempenham um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem. Tendo em vista a importância que o livro didático de Matemática tem para o professor, como referência ou mesmo roteiro principal no preparo e condução de suas aulas (LEE, 2003, p.168), e partindo do pressuposto que o livro didático de Matemática tem um papel fundamental sobre o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, é importante investigarmos as concepções sobre o conceito de função que vêm sendo veiculadas por ele atualmente.

Assim, o **objetivo** desta pesquisa é investigar a abordagem de função adotada em livros didáticos de Matemática da Educação Básica, buscando verificar quais são as estratégias utilizadas pelos autores desses livros para apresentar a noção de função, se a relação discreto/contínuo[1] fica evidente na

---

[1]Neste trabalho utilizamos os termos discreto e contínuo em referência, respectivamente, a grandezas que são objeto de contagem e as que são passíveis de medida, ou para nos referirmos às funções cujo domínio é formado por um conjunto de números discretos e às que possuem domínio real, respectivamente.

construção de gráficos, e se a *conversão*[2] entre as representações gráfica e algébrica ocorre nos dois sentidos.

A importância do livro didático no cenário educacional brasileiro, a complexidade na construção histórica do conceito de função, bem como as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão desse conceito nos diversos níveis de ensino, e sua importância para a Matemática e outras áreas do conhecimento **justificam** a pertinência de nossa pesquisa.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos:

No primeiro apresentamos o problema de pesquisa e algumas orientações didáticas sugeridas pelos documentos oficiais para iniciar o ensino de função.

O segundo capítulo trata da fundamentação teórica de nosso trabalho, que se baseia em alguns pressupostos da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

No terceiro capítulo, destacamos a metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa. Apresentamos também, a descrição dos livros selecionados para a coleta e análise dos dados e os critérios adotados para a análise dos mesmos.

O quarto capítulo consta da análise dos livros didáticos, baseada nos aspectos convergentes e divergentes, em relação aos critérios estabelecidos e apresentados no segundo capítulo.

---

[2]Em Matemática há uma grande diversidade de representações semióticas que Duval (2003) agrupa em quatro tipos diferentes de registros: a língua natural, os sistemas de escritas (numéricas e algébricas), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas. As *conversões* são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma função à sua representação gráfica.

Finalmente, no quinto capítulo, apresentamos os resultados e as considerações finais de nosso estudo.

CAPÍTULO 1

1.1. PROBLEMÁTICA

Em decorrência de nossa prática docente, como professor de Matemática da Educação Básica da Rede Publica Estadual de São Paulo, das discussões com outros profissionais da área e em algumas publicações a que tivemos acesso, foi possível constatar que muitos alunos apresentam dificuldades em Matemática, e particularmente na compreensão do conceito de função que é de fundamental importância para essa disciplina. O baixo desempenho nas avaliações oficiais de Matemática também evidencia as dificuldades dos estudantes da Educação Básica.

O principal instrumento de avaliação da educação básica, no Brasil, é o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), realizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP).

A cada dois anos, uma amostra representativa[1] do alunado brasileiro de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio é avaliada por meio da aplicação de testes de Português e Matemática.

Conforme resultados do SAEB (INEP, 2004, p.38), dos estudantes brasileiros da 3ª série do Ensino Médio que participaram da prova do SAEB em 2003, 62,3% foram classificados no estágio crítico e outros 6,5% no estágio muito crítico de desenvolvimento de habilidades e competências em Matemática. No total, 68,8% dos alunos têm desempenho muito abaixo do mínimo esperado.

[1]Em 2001 participaram da amostra do SAEB 287.719 alunos (72.415 da 3ª série do E.M.) de 6.935 escolas brasileiras; em 2003 participaram 218.521 alunos (52.406 da 3ª série do E.M.) de 5.898 escolas das 27 unidades da federação; em 2005 participaram do SAEB 194.822 alunos (44.540 da 3ª série do E.M.) de 5.940 escolas.

Apenas 6,9% dos alunos estão no estágio adequado para essa disciplina, sendo que os outros 24,3% estão no estágio intermediário.

Os alunos classificados no estágio *muito crítico* não desenvolveram habilidades elementares compatíveis com a 3ª série do ensino médio. São estudantes com dificuldades na construção, leitura e interpretação gráfica, por exemplo. Já os alunos situados no nível *crítico* “desenvolvem algumas habilidades elementares de interpretação de problemas, mas não conseguem transpor o que está sendo pedido no enunciado para uma linguagem matemática específica” (INEP, 2004, p.39).

Em outros termos, os estágios *muito crítico* e *crítico* são patamares de muito pouco aprendizado, ou seja, nesses níveis os estudantes desenvolveram habilidades muito elementares, tanto para a série quanto para a continuação dos estudos. São estudantes que se encontram abaixo do mínimo esperado (INEP, 2004, p.33).

Os resultados do SAEB mostram uma queda sistemática no desempenho dos estudantes brasileiros em Matemática desde 1995, conforme podemos ver na Figura 1, abaixo.

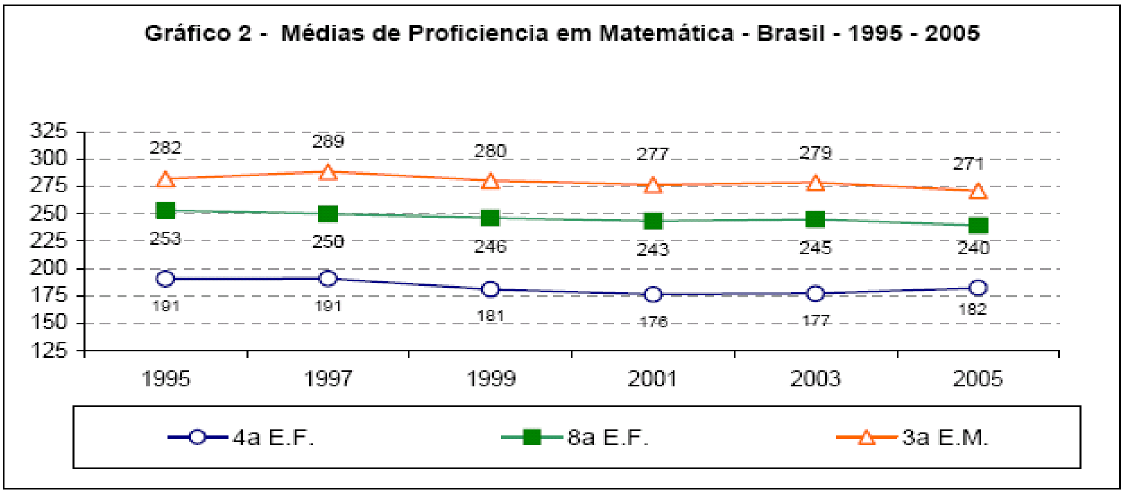


Figura 1: Gráfico das médias[2] de desempenho em Matemática no SAEB.
Fonte: INEP, 2007, p.7.

[2]As médias do SAEB são apresentadas em uma escala que varia de zero a 500.

De acordo com o gráfico da Figura 1, podemos verificar, por exemplo, que a média nacional de desempenho em Matemática, dos estudantes da 3ª série do ensino médio, apresentou em 2005 uma queda de 8 pontos (2,9%), em relação a 2003.

Com o objetivo de avaliar se os alunos da 3ª série do ensino médio haviam construído "[...] o conceito de função e a competência de comparar dados de uma tabela, traduzindo em linguagem matemática adequada a função algébrica por ela representada" (INEP, 2002, p.58), foram propostos os seguintes testes, na prova do SAEB de 2001:

Uma empresa, em processo de reestruturação, propôs a seus funcionários uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variava em função do número de anos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo Trabalhado (em anos)	Valor de Indenização (em reais)
1	450
2	950
3	1 450
4	1 950

A expressão que permite determinar o valor da indenização i para t anos trabalhados é

(A) $i = 450\,t$
(B) $i = 450 + 500\,t$
(C) $i = 450\,(t - 1)$
➢ (D) $i = 450 + 500\,(t - 1)$
(E) $i = 500\,t$

Percentual de Respostas às Alternativas					
A	B	C	D	E	Em branco e nulas
33	16	18	21	10	2

Fonte: INEP, 2002, p.59.

Qual a lei de posição P em função do tempo?

Tempo(t)	0	1	2	3	4
Posição(P)	1	3	5	7	9

➢ (A) $P(t) = 2t + 1$
(B) $P(t) = 4t - 1$
(C) $P(t) = 3t - 1$
(D) $P(t) = t^2 + 1$
(E) $P(t) = 2t^2 + 1$

Percentual de Respostas às Alternativas					
A	B	C	D	E	Em branco e nulas
35	18	16	16	11	4

Fonte: INEP, 2002, p.59.

No primeiro teste, mostrado acima, os resultados evidenciam que a maioria dos alunos não domina o conceito de função, já que apenas 21% deles acertaram a questão. Pela análise das respostas observa-se que os alunos têm dificuldade em comparar dados de uma tabela e traduzir em linguagem matemática adequada a função algébrica que ela representa, o que pode ter dificultado a solução. O fato de 33% dos estudantes optarem pelo item "A" demonstra a pouca preocupação que os alunos têm em validar suas respostas.

Já no segundo teste, os resultados mostram que apenas 35% dos alunos acertaram a questão, o que revela, mais uma vez, a grande dificuldade dos estudantes em reconhecer a expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela, ou seja, de traduzir seu pensamento matemático para uma linguagem algébrica simples.

A leitura de dissertações, teses e artigos publicados em livros e revistas especializadas na área da Educação Matemática, também nos revelaram possíveis dificuldades apresentadas pelos estudantes, no estudo de funções, nos diversos níveis de ensino.

Em uma pesquisa realizada com alunos da 2ª série do Ensino Médio, Pelho (2003) verificou que ao serem interrogados sobre o conceito de função, alguns alunos “[...] demonstraram que para eles, o objeto matemático função era apenas o seu gráfico e, que a expressão algébrica e a tabela eram apenas as ferramentas necessárias para construção do mesmo” (p.119).

Fica evidente que esses alunos não conseguem reconhecer o objeto matemático função em suas diferentes representações (expressão algébrica, tabela, gráfico), ou seja, eles confundem o objeto com sua representação.

Em outra pesquisa desenvolvida por Oliveira (1997), para investigar as concepções de alunos do 1º ano do curso de Engenharia sobre o conceito de função, a autora observou que a maior parte dos estudantes confunde função com equação; tratam uma fórmula como uma seqüência de comandos para realizar um cálculo; têm dificuldade na articulação entre os registros de representação semiótica, especialmente na conversão entre as representações gráfica e algébrica de uma função.

Essa incapacidade dos alunos na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação se constitui em um obstáculo para a compreensão do conceito de função, pois “É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o ‘enclausuramento’ de cada registro”. (DUVAL, 2003, p.22).

No trabalho de Oliveira (1997) existe também uma pesquisa envolvendo dezessete professores de Matemática que responderam um questionário. Oliveira analisou ainda o conceito de função em livros didáticos de Matemática.

A autora observou que as mudanças de registro de representação mais utilizadas pelos professores, são: da expressão algébrica para a tabela; e da tabela para o gráfico. O que segundo ela, era de se esperar, pois a maior parte dos livros didáticos propõe essa mesma situação e, de acordo com a autora, em geral, as concepções dos professores que responderam o questionário são aquelas que aparecem nos livros didáticos. Segundo Oliveira (1997) “[...] o fato de muitos livros didáticos apresentarem primeiro as funções na sua forma algébrica e depois o seu gráfico, sem fazer o caminho inverso, constitui um obstáculo didático para a resolução de problemas que partem da situação inversa”. (p. 35).

De acordo com os professores investigados por Oliveira (1997), os alunos apresentam dificuldade na abstração do conceito de função; com a noção de grandeza variável; na representação e análise gráfica; na compreensão e na articulação dos registros de representação do objeto matemático função.

Segundo Clement, Lochhead e Monk (1981, *apud* Lochhead e Mestre 1995) muitos estudantes têm dificuldades na resolução de problemas algébricos simples, particularmente quando envolvem a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. De acordo com os autores, nos problemas em que se pede para os alunos escreverem uma equação, a partir de uma sentença, relacionando duas variáveis, freqüentemente eles escrevem o contrário do que pretendem.

Esses autores propuseram o seguinte problema para alunos americanos do curso de Engenharia: “Escreva uma equação usando as variáveis A e P para representar a seguinte afirmação: Há seis vezes mais alunos do que professores nesta universidade. Use A para indicar o número de alunos e P para indicar o número de professores” (CLEMENT, LOCHHEAD e MONK, 1981 *apud* LOCHHEAD e MESTRE, 1995, p. 145).

Segundo os autores, dois terços dos alunos que responderam erradamente escolheram a resposta 6A = P, em que se verifica uma troca de variáveis. Os autores destacam que as entrevistas com mais de vinte alunos que cometeram esse tipo de erro mostraram que não houve erro de interpretação, já que nenhum dos estudantes entrevistados disse que havia mais professores que alunos. De acordo com os autores o problema está nas concepções erradas relativas à estrutura e à interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica.

Para Lochhead e Mestre (1995) é comum os alunos confundirem variáveis com rótulos. Assim, no problema acima:

> Os símbolos ‘A’ e ‘P’ muitas vezes são interpretados como rótulos para os ‘alunos’ e ‘professores’, em vez de variáveis para representar o ‘número de alunos’ e o ‘número de professores’; isso leva-os a interpretar 6A = P como ‘seis alunos para cada professor’ (p.147).

De acordo com Lochhead e Mestre (1995, p.145), as dificuldades no equacionamento de alguns problemas simples, são mais amplas do que seria de se esperar. Os autores afirmam que os estudantes apresentam enormes dificuldades em outros três tipos de problema: escrever uma equação para representar uma relação entre duas variáveis dada em forma tabular; escrever uma sentença, a partir de uma equação simples com duas variáveis; e escrever uma equação que represente a relação entre duas variáveis, a partir de sua representação gráfica.

Lins e Gimenez (2001) afirmam que, apesar do currículo da maioria das escolas serem “recheados” de conteúdos algébricos, os alunos mostram que não aprendem. Quando aprendem a manipular os símbolos algébricos consideram a álgebra enquanto parte da Matemática que substitui o número pela letra, ou ainda, a defini-la como sinônimo de equação, cuja redução pode obstruir a compreensão do conceito de variável [3] e do conceito de função.

A compreensão do conceito de função está ligada à capacidade de lidar com diversas formas de representação (língua natural, expressões algébricas, tabelas e gráficos), e em passar de um tipo de representação para outro.

---

[3]O conceito de variável é multiface, porém, neste trabalho, adotamos a concepção de variável como “símbolo que representa indistintamente os elementos de um conjunto” (USISKIN, 1995, p.11).

Por outro lado, o conceito de função deve ser associado às idéias de variação e de mudança. Os estudantes devem ser capazes de interpretar como a mudança numa variável se relaciona com a mudança noutra variável.

Além das idéias básicas de variável e dependência, é importante deixar claro para o aluno a passagem do discreto ao contínuo, na construção de gráficos.

De acordo com Moretti (2003) "o esboço de gráficos ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos estes obtidos por intermédio de substituições na expressão matemática correspondente" (p.149-150).

Este fato tem algumas implicações para a construção, leitura e interpretação gráfica. O aluno pode ser induzido a pensar, por exemplo, que toda função tem gráfico contínuo (curva traçada pela junção de um número finito de pontos marcados no plano cartesiano), ou seja, que uma função não pode ser representada graficamente por pontos isolados.

Em uma pesquisa realizada com estudantes americanos, do curso de licenciatura em Matemática, Even (1990, *apud* ROSSINI, 2006) observou que, apesar de terem estudado Cálculo Diferencial e Integral, ao construírem o gráfico de uma função cujo domínio era o conjunto dos números racionais, os alunos utilizaram uma tabela com poucos valores inteiros para a variável independente, sendo que 50% deles ligaram os pontos do gráfico por meio de uma linha contínua, sem levar em consideração o comportamento da função.

A partir de resultados obtidos em uma pesquisa com professores de Matemática do Ensino Médio sobre o ensino de funções, Zuffi e Pacca (2002) observaram que os professores não explicitavam os detalhes sobre a passagem do discreto ao contínuo:

> *Algumas funções de domínio discreto eram representadas por expressões analíticas usadas para domínios tipicamente contínuos, enquanto que os gráficos contínuos eram sempre determinados por um conjunto muito pequeno de pontos discretizados, sem se discutir o que acontecia com as imagens nos intervalos entre esses pontos.* (p.7).

De acordo com Zuffi e Pacca (2002, p.9), na construção de gráficos de funções, o professor atribui valores discretos da função em uma tabela e depois, sem deixar claro para o aluno o que acontece com os valores intermediários aos que foram previamente escolhidos, traça um gráfico contínuo.

Como este procedimento é o que mais aparece nos livros didáticos, podemos inferir que os professores são influenciados pelos mesmos, pois conforme já mencionamos anteriormente, os livros didáticos são utilizados pela maioria dos professores como roteiro principal no preparo e condução de suas aulas.

A partir dos resultados obtidos em uma pesquisa com 105 alunos do Ensino Médio da França, Duval (1988, *apud* Mariani 2006) verificou que a maioria desses alunos apresenta um “conhecimento mecânico” na construção e interpretação de gráficos, visto que relacionam pontos com par ordenado, não explorando corretamente as representações gráficas.

Ao discutir uma abordagem para o ensino e aprendizagem da Álgebra, Lins e Gimenez (2001) salientam que a maioria dos livros didáticos de Matemática disponíveis no mercado brasileiro adota “a ‘seqüência’ *técnica (algoritmo) / prática (exercícios)*” (p.105).

Segundo os autores, diversas pesquisas, no Brasil e em outros paises, já mostraram que essa pratica é ineficaz e mesmo perniciosa à aprendizagem, no entanto contínua sendo bastante utilizada pelos professores – pois de outra forma não seriam vendidos tantos livros que a adotam. Sua enorme aceitação pode ser atribuída a duas questões: a primeira, corresponde a uma certa visão que os professores têm da atividade algébrica, pois caso contrário essa prática não teria sobrevivido até hoje; e a segunda questão está relacionada ao fato “[...] de que muitos professores não estando ‘preparados’, simplesmente seguem o que os livros didáticos oferecem, e que talvez não conheçam alternativas” (LINS e GIMENEZ, 2001, p. 106).

Tradicionalmente o conceito de função é introduzido como um conjunto de pares ordenados e no estabelecimento de relações entre conjuntos, passando às representações analíticas e gráficas, e à listagem de uma série de propriedades que dizem respeito a aspectos operacionais, o que exige um elevado grau de abstração por parte dos alunos dificultando o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Pouca ênfase é dada ao uso de funções na resolução de problemas quando este deveria ser um dos aspectos fundamentais na formação matemática de nossos alunos, visto que “[...] situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função”. (BRASIL, 1998, p.118).

No Brasil, no período decorrido entre as décadas de 60 e 70, o Movimento da Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos, mantém o ensino de funções com ênfase na Teoria dos Conjuntos. Aliada à tradicional organização linear do currículo de Matemática, essa abordagem transformou o estudo de funções em algo extremamente abstrato e formal, dificultando a compreensão por parte do aluno.

Com as reformas ocorridas a partir da década de 80, no Brasil e em outros países, surgem novas tendências pedagógicas para o ensino da Matemática. O desenvolvimento de novos paradigmas educacionais sugere a resolução de problemas como um dos instrumentos essenciais para o ensino da Matemática.

Nos Estados Unidos, em 1980, o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) apresentou um conjunto de recomendações para o ensino de Matemática, chamado *Agenda para Ação.* Dentre essas recomendações destacou-se a necessidade de focar o ensino de Matemática na resolução de problemas (BRASIL, 1998).

Os PCN (BRASIL, 1998) apontam a resolução de problemas como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, destacando também a importância da participação do aluno na construção do seu conhecimento. Assim, a situação-problema deve ser o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL, 1998).

De acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002) quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas não capacitamos o aluno para utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

> *Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.* (BRASIL, 2002, p.113).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) ressaltam que o uso de problema “fechado”, em que o aluno identifica previamente o conteúdo a ser utilizado na resolução do problema, bastando operar com os números que estão presentes, de forma mecânica, sem nenhuma reflexão sobre o resultado obtido, pode mascarar a efetiva aprendizagem do estudante. A resolução de problemas, na perspectiva socioconstrutivista[4], deve levar o aluno à aquisição de procedimentos de resolução (como fazer tentativas, formular hipóteses, testar essas hipóteses e validar seus resultados). Desse

---

[4]As idéias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. (BRASIL, 2006).

modo, “O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para resolver problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de ‘provas escritas’”. (BRASIL, 2006, p.84).

Atualmente, nas escolas públicas brasileiras, o livro didático talvez seja um dos principais instrumentos utilizado pelo professor de Matemática na elaboração de suas aulas, principalmente em função da atual conjuntura, em que diferentes programas de avaliação e distribuição de livros didáticos têm se efetivado na Educação Básica. Assim, ele exerce grande influência sobre o processo de ensino e aprendizagem, na medida em que é, a partir dele, que o professor seleciona os conteúdos que vão ser ministrados e a maneira como serão abordados esses conteúdos. (VARIZO, 1999).

Diversos fatores tais como excesso de horas de trabalho, baixo salário, número excessivo de alunos em sala de aula, formação deficitária do professor, falta de uma boa política de formação continuada etc., têm contribuído para que o livro didático seja o material mais utilizado em sala de aula. Assim, o autor do livro didático passa a exercer funções até então exclusivas do professor, assumindo, de certa forma, a responsabilidade das atividades docentes, o que, aliás, os próprios professores passam a esperar dele (SOARES, 1996, p.62).

Tendo em vista os vários aspectos anteriormente apresentados, procuramos responder, em nossa pesquisa, às seguintes questões:

- Qual é a abordagem de função adotada atualmente em livros didáticos de Matemática da Educação Básica?
- Na construção de gráficos, os detalhes sobre a passagem do discreto ao contínuo são explicitados satisfatoriamente?
- Quando se trata da articulação entre os registros gráfico e algébrico, em relação à representação do objeto matemático *função*, são propostas tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão?

1.2. O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO DE ACORDO COM DOCUMENTOS OFICIAIS

Nosso objetivo aqui, é discutir algumas orientações didáticas relativas ao conceito de função, sugeridas em documentos oficiais, pois elas podem contribuir para reflexões a respeito de nossa análise. Nosso interesse em estudar esses documentos deve-se ao pressuposto de que tais diretrizes expressam uma consciência e uma intencionalidade didática de uma comunidade de pesquisadores, representativa de um dado momento evolutivo da área de Educação Matemática.

A Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática – 2º Grau, da SEE/SP (1992), defende a participação do aluno na elaboração de seu conhecimento como um dos pontos fundamentais da concepção atual de aprendizagem. “Assim, a proposta de desenvolvimento de um tema, com os alunos, pode ter como ponto de partida a colocação de um problema, a partir do qual se iniciará a discussão das idéias centrais do tema em questão”. (p.10). Em relação ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de função o documento destaca que “utilizar situações significativas para o aluno, bem como usar linguagens informais para descrever a dependência entre duas variáveis é uma excelente estratégia no início do trato do conceito de função.” (p.22).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCN (BRASIL, 1998) apontam a *resolução de problemas* como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, a fim de que se atinjam os objetivos educacionais propostos. A concepção de resolução de problemas assumida firma-se em alguns princípios, tais como:

- A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

- [...] só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada.
- A resolução de problema não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1998, p.40)

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p.118), a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno perceba uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico. Além disso, situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função no terceiro e quarto ciclos. Os alunos podem, por exemplo, estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado, em função da medida de seu lado; determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 1999), enfatizam a relevância do conceito de função, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como a sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência:

> *Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando*

> *seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.* (p. 255).

Com o intuito de encaminhar um ensino compatível com as novas pretensões educativas e ampliar as orientações contidas nos PCNEM, fazendo avançar elementos que não estavam ainda explicitados, os PCN+ Ensino Médio (BRASIL, 2002) oferecem elementos úteis na definição de conteúdos e na adoção de opções metodológicas.

A resolução de problemas, segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p.113), é peça central para o ensino de matemática:

> *Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, em fim, perseverar na busca da solução. E por isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.*

Com relação às funções, o documento enfatiza que os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções:

> *Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a noção de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas de conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.* (BRASIL, 2002, p.121).

Visando à contribuição sobre a escolha e a forma de trabalhar os conteúdos, as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) dão ênfase ao ensino e a aprendizagem que valorizam o raciocínio matemático e desaconselham a simples aplicação de regras e fórmulas à lista respectiva de exercícios, frequentemente presente em boa parte dos livros didáticos.

Segundo as Orientações Curriculares (BRASIL, 2006):

> *O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações.* (p.72).

O documento destaca também a importância da conversão do registro algébrico para o registro da língua natural:

> *É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da idéia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física.* (p.72).

O Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM (BRASIL, 2005), ao apresentar alguns aspectos metodológicos para a seleção, distribuição e articulação dos conteúdos nos livros didáticos, destaca a importância da proposição de situações-problema representadas por meio de tabelas, gráficos etc. De acordo com o documento o conceito de função permeia os diversos campos da matemática, por exemplo, "[...] a representação no plano cartesiano permite ligar as propriedades de uma função com as de seu gráfico e a geometria analítica pode aparecer, então, como um campo de confluência de vários conceitos: função, equação, figura geométrica, etc.". (p.39). Em relação ao ensino desse conteúdo "é bastante desaconselhável, tanto do ponto de vista matemático como didático, o uso da linguagem da teoria dos conjuntos para a definição de função com base no conceito de produto cartesiano de dois conjuntos." (BRASIL, 2005, p.41).

Concordamos com os PCN, os PCN+ Ensino Médio e com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, ao afirmarem que, tradicionalmente, o ensino da Matemática baseia-se na mera transmissão e recepção de conhecimentos, onde a introdução de um novo conceito é feita de forma direta partindo-se de definições, exemplos e procedimentos mecânicos que, posteriormente, passam a ser utilizados como modelos para a resolução dos exercícios propostos.

Os problemas são utilizados apenas para verificar se o aluno consegue aplicar as técnicas que aprendeu. Assim, quando os alunos têm um problema para resolver é muito comum que procurem os números contidos no enunciado e façam operações matemáticas para encontrar uma resposta, sem formular hipóteses, nem validar seus procedimentos. Essa metodologia de ensino supõe que o aluno aprende por imitação.

Já os documentos oficiais supracitados, preconizam o caminho inverso da concepção formal, ou seja, partem do princípio de que a aprendizagem de um novo conceito matemático se dá pela apresentação de situações-problema que desafiam e geram interesse, ficando a formalização do conceito para a última etapa do processo de ensino e aprendizagem. Nesse enfoque, o aluno é colocado permanentemente diante de situações novas, que o leva a formular hipóteses, discutir suas próprias idéias, refletir criticamente, enfim, o aluno é responsável pela construção do seu próprio conhecimento, cabendo ao professor o papel de mediador, ficando este responsável pela criação de situações que propiciam ao aluno o desenvolvimento de sua aprendizagem, e pela sistematização do novo conhecimento.

Com relação ao conceito de função, de modo geral, os documentos oficiais que analisamos, orientam que o seu estudo deve ser iniciado diretamente pela exploração de situações-problema para descrever situações de dependência entre duas grandezas, e desaconselham o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações como pré-requisito para o ensino desse conceito.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAL TEÓRICO

Este trabalho está fundamentado em alguns pressupostos da teoria dos *Registros de Representação Semiótica* de Raymond Duval, que trata principalmente do funcionamento cognitivo envolvido na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem.

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Considerando a importância da articulação entre os registros em relação à representação de um objeto matemático, particularmente a conversão entre os registros gráfico e algébrico de uma função (que é o objeto de estudo desta investigação), presumimos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval possa nos ajudar a responder algumas de nossas questões de pesquisa, visando uma maior compreensão dos objetos matemáticos e do processo de ensino e aprendizagem.

Na perspectiva de Duval, ensinar matemática é antes de tudo possibilitar o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. Segundo Duval, uma das características importantes da atividade matemática é a diversidade dos registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente. No entanto, essa diversidade raramente é levada em conta no ensino.

A compreensão das funções cognitivas que as diversas formas de representações semióticas preenchem, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Segundo Duval (1999, *apud* Flores e Moretti, 2006, p.29), as representações semióticas podem preencher quatro funções cognitivas: função de comunicação, função de tratamento, função de objetivação e função de identificação. A primeira função é responsável pela transmissão de uma mensagem ou de uma informação entre indivíduos. A segunda é a função que transforma uma representação em outra. A terceira função corresponde ao uso particular de um registro de representação. Finalmente, a identificação é a função cognitiva que permite encontrar um dado ou uma informação dentre muitas outras. Toda vez que precisamos ler ou analisar dados de um problema, esta função é solicitada.

As representações gráficas preenchem as quatro funções cognitivas do pensamento. Constantemente as pessoas são expostas a informações (nos meios de comunicação, livros didáticos etc.) que, para serem entendidas e levadas em conta de modo crítico, exigem a leitura de gráficos, tabelas, diagramas etc. Destaca-se a representação gráfica por preencher não só o papel de comunicação, mas também de objetivação, tratamento e identificação, ou seja, não é suficiente saber "ler" um gráfico, é necessário também saber interpretar as informações contidas nessa forma de representação.

Para designar as diversas formas de representações semióticas utilizadas em matemática, Duval (2003, p.14) as classifica em quatro diferentes tipos de registro: língua natural, sistemas de escritas (numéricas, algébricas, simbólicas), figuras geométricas e gráficos cartesianos. Segundo o autor, a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação ao mesmo tempo. Na resolução de um problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro.

De acordo com Duval (2003, p.15), existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são muito diferentes***:*** os *tratamentos* e as *conversões.*

- Os *tratamentos* são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, resolver uma equação.

- As *conversões* são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma função à sua representação gráfica.

Para Duval (2003) a utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos normalmente trabalhados pelos professores. Assim, quando o aluno é capaz de articular essas representações dentro de um determinado registro ou entre os registros, a aprendizagem torna-se mais significativa. Entretanto, de acordo com o autor, se quisermos analisar as dificuldades de aprendizagem dos alunos em Matemática, *devemos* estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos.

Segundo Duval (2003, p.21), a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registros. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Os objetos matemáticos não são acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente, por isso o acesso a esses objetos passa necessariamente por suas representações semióticas. Daí a compreensão em matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado.

Duval (2003, p.20) afirma que geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido.

Acreditamos que esse seja o caso da abordagem do conceito de função nos livros didáticos e em sala de aula, onde geralmente se prioriza um único sentido de conversão nas seqüências de exercícios apresentadas.

> *A constituição das seqüências depende da natureza dos fenômenos que se deseja estudar. Quando se trata da articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático, duas condições dever ser efetivamente respeitadas: primeiramente, a seqüência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não-congruência.* (DUVAL, 2003, p.27).

Para analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. Quando a representação de chegada está evidente na representação de saída diz-se que há uma *congruência.* Quando a representação no registro de chegada não transparece claramente na representação de saída diz-se que há uma *não-congruência.*

As representações gráficas possibilitam três tipos de tratamento, isto é, de operações internas aos gráficos, e dois tipos de conversão com o registro simbólico conforme é mostrado no esquema abaixo, apresentado por Duval (2003, p.18):

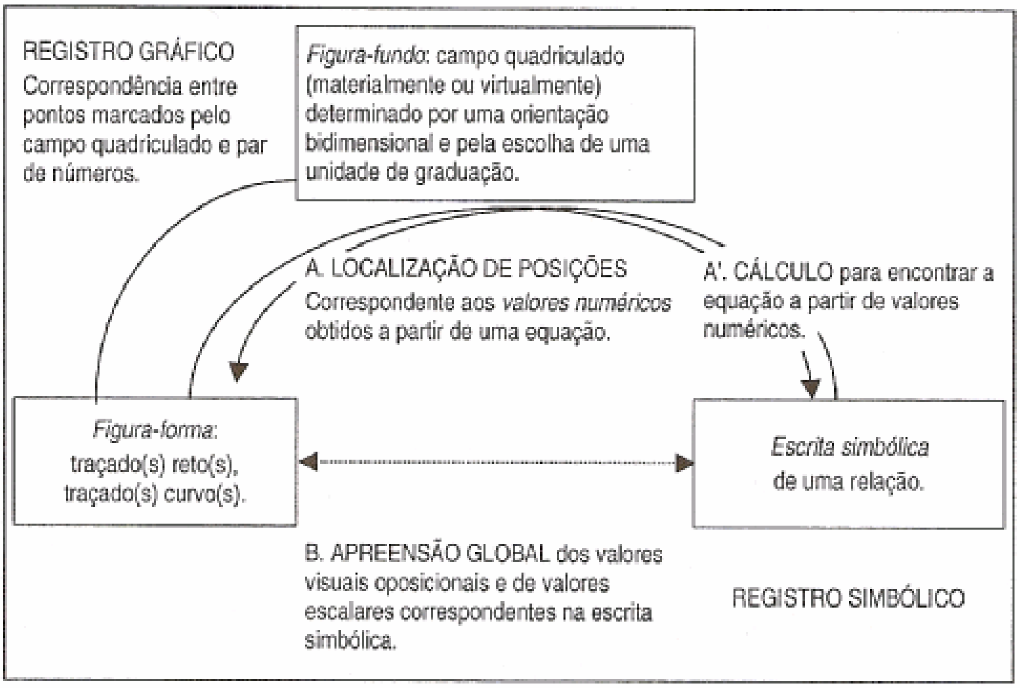


Figura 2: Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas.

No esquema mostrado na Figura 2, observamos dois tipos de conversão cognitivamente diferentes: A e A', que permitem somente uma leitura pontual dos gráficos; e B que permite uma apreensão global e qualitativa.

Na conversão A (escrita simbólica → figura-forma), pontos obtidos por substituição de números na expressão algébrica são transferidos para a figura-fundo (sistema de eixos graduados), para que em seguida o gráfico (figura-forma) possa ser traçado por meio da união desses pontos. Já na conversão A', que ocorre no sentido contrário, a expressão algébrica é obtida a partir de cálculos efetuados com valores numéricos (coordenadas de pontos pertencentes ao gráfico), lidos na figura-fundo (sistema de eixos).

A conversão B, tanto no sentido gráfico → expressão algébrica, como no sentido contrário, leva em conta, de um lado, as variáveis visuais própria dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc.), sem passar pela figura-fundo. Duval (2003, p.17) afirma que "[...] é essa apreensão global e qualitativa que é necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionado aos tratamentos algébricos".

Segundo Duval (1988, *apud* Mariani, 2006), existem três tipos distintos de procedimentos para a construção de gráficos:

1) O procedimento por pontos: que enfatiza a representação de um ponto com base em um par ordenado e a identificação do par ordenado a partir do ponto;

2) O procedimento de extensão do traçado: que promove a união de pontos por traços, desenhando o gráfico;

3) O procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma: que permite a percepção de que a modificação da escrita algébrica implica a

mudança da representação gráfica, por meio da associação variável visual da representação ↔ unidade significativa da escrita algébrica.

Nos procedimentos 1 e 2, não há relação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente, mas apenas a associação entre um par ordenado e sua representação cartesiana. Já os gráficos construídos utilizando-se o procedimento 3, permitem a visualização da relação entre as modificações nas expressões algébricas das funções e as modificações nos respectivos gráficos e vice-versa. O uso de um *software* para a construção de gráficos de funções pode facilitar essa visualização.

Na conversão entre equações e gráficos o procedimento por pontos é o que mais aparece nos livros didáticos (MORETTI, 2003). Para passar de uma equação à sua representação gráfica, pontos obtidos por substituição de valores (geralmente inteiros) na expressão algébrica da função são localizados no sistema cartesiano, em seguida o gráfico é traçado por meio da junção desses pontos. Duval (2003) adverte que esse procedimento não permite uma apreensão global e qualitativa necessária, por exemplo, para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos. Segundo o autor, essa regra permite apenas uma leitura pontual das representações gráficas.

> *Na realidade, a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc.).* (DUVAL, 2003, p.17).

Ao contrário do procedimento por pontos, o procedimento de interpretação global das propriedades figurais (DUVAL, 1988b, *apud* MORETTI, 2003), em que o conjunto traçado/eixo forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica, permite que sejam identificadas, ao mesmo tempo, as modificações possíveis no gráfico e na expressão algébrica. “Nesse tipo de tratamento não estamos em presença da associação *um ponto* ↔

um par de números, mas na associação *variável visual de representação* ↔ *unidade significativa da escrita algébrica*". (DUVAL, 1988b, *apud* MORETTI, 2003, p.151).

O quadro 1, apresentado por Duval (1988b, *apud* Moretti, 2003, p.152), mostra um exemplo do *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma* para esboço de gráficos, no caso das funções do 1º grau:

Quadro 1: Procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma para o esboço de gráficos de funções do 1º grau.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 ausência do símbolo – coeficiente < 0 presença do símbolo –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor (45º) ângulo maior (45º)	coef. var. = 1 não tem coef. escrito coef. var. < 1 coef. var. > 1
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acrescenta-se uma constante sinal + subtrai-se uma constante sinal – não tem correção aditiva

Observamos neste quadro que o coeficiente angular está relacionado com o ângulo que a reta forma com os eixos (1ª e 2ª linhas da tabela); o coeficiente linear por sua vez está relacionado com a posição em que a reta intercepta o eixo das ordenadas (3ª linha da tabela). Assim, percebe-se a relação entre as modificações nas expressões algébricas e as modificações no gráfico e vice-versa.

Portanto, as representações gráficas, possuem regras, códigos instituídos para a sua composição e requerem um tratamento específico no sistema de representação semiótica. Assim, para uma apreensão global das representações gráficas, é necessário uma certa desenvoltura visual e um empenho cognitivo por parte do aluno, pois "Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros” (DUVAL, 2003, p.17).

A ilustração abaixo, feita com base no apresentado por Duval (1988, p.244), refere-se a uma atividade proposta a 105 alunos franceses, com idade entre 15 e 16 anos, em que foi pedido aos estudantes que associassem as expressões algébricas (E1, E2,..., E10) aos gráficos (G1, G2,..., G5) correspondentes.

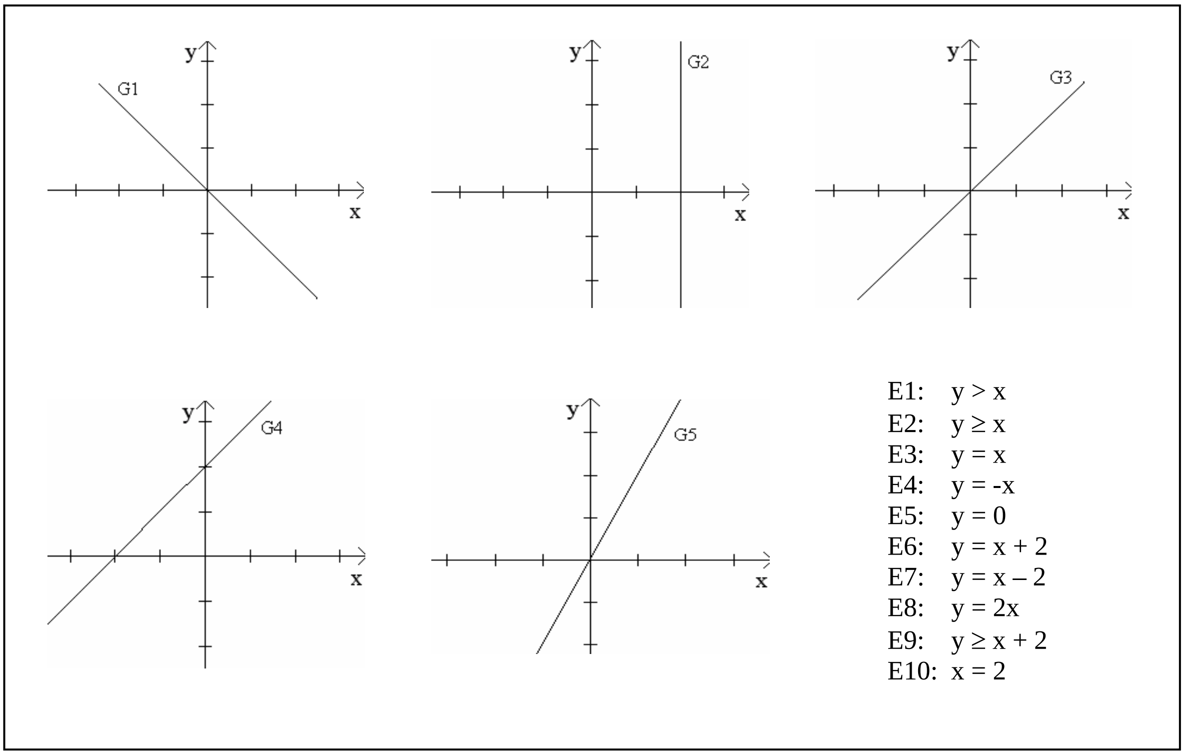


Figura 3: Ilustração da atividade proposta por Duval a alunos franceses.

O autor fez essa investigação com o objetivo de elucidar as variáveis visuais envolvidas na conversão entre os registros gráfico e algébrico. A partir dos resultados obtidos, Duval (1988, *apud* Mariani, 2006, p.42-43) fez um levantamento dos erros dominantes, e observou que:

- 21 alunos associaram a expressão y = x ao gráfico G1. Isto indica, segundo o autor, que esses estudantes não associaram o sentido descendente da inclinação da reta com o coeficiente negativo da expressão algébrica;

- 23 alunos associaram a expressão y = -x ao gráfico G4. O que significa, segundo Duval, que esse grupo de estudantes não conseguiu identificar a propriedade da figura que relaciona a intersecção da reta com o eixo *x* e a expressão algébrica;

- 14 alunos associaram a representação algébrica y ≥ x ao gráfico G5. De acordo com o autor, esses 14 alunos forçaram a interpretação de que, no primeiro quadrante cada valor de *y* é maior que o valor de *x*.

Duval reaplicou essa atividade a outros 60 alunos, que também estudavam no Ensino Médio francês, obtendo resultados semelhantes aos da pesquisa anterior. Considerando as duas populações de alunos estudadas (num total de165 alunos), o autor conclui que:

> *Nessas duas populações, apenas ¼ dos alunos distingue y = x + 2 de y = 2x e menos de 20% dos alunos acertaram todos os cinco itens. Mas o resultado mais espetacular é que dos 165 alunos somente 99, isto é, 60%, vêem uma diferença de sentido da inclinação da reta associada à diferença entre y = x e y = -x.* (DUVAL, 1988, *apud* MARIANI, 2006, p.43)

Os resultados da pesquisa de Duval mostram que os procedimentos de construção de gráficos por pontos e por extensão de um traçado efetuado - em que valores, geralmente inteiros, são substituídos na expressão algébrica da função para a obtenção de pares ordenados que, posteriormente, são localizados no plano cartesiano para que em seguida o gráfico possa ser traçado por meio da junção desses pontos - não possibilitam uma apreensão global e qualitativa, por parte dos alunos, na interpretação das representações gráficas de funções, pois não permite a ligação entre as propriedades da figura e a expressão algébrica da função, permitindo somente uma leitura pontual das representações gráficas.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo destacamos a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho, fundamentada em uma análise documental de caráter qualitativo.

3.1. ANÁLISE DOCUMENTAL

A análise documental é uma técnica de abordagem de dados qualitativos, "realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos [...]. Documento é toda base de conhecimento fixado materialmente e suscetível de ser utilizado para consulta, estudo ou prova [...]" (PÁDUA, 2005, p.68-69).

De acordo com Guba e Lincoln (1981, *apud* Lüdke e André, 1986, p.39), uma das vantagens para o uso de documentos na pesquisa é o fato de que os documentos constituem uma fonte estável e rica, podendo ser consultados várias vezes. Representam ainda uma fonte "natural" de informação contextualizada. Outra vantagem dos documentos é o seu baixo custo. Seu uso requer apenas investimento de tempo e atenção por parte do pesquisador para selecionar e analisar os mais relevantes.

3.2. A ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Escolhemos o livro didático como fonte primária de dados para nossa investigação, entre os diversos registros textuais do saber, por ele ser um dos instrumentos mais importante mobilizado no processo de ensino e aprendizagem no momento, especialmente nas escolas públicas, pois são distribuídos gratuitamente aos alunos da Educação Básica pelo Ministério da Educação.

Desde 1985, o Ministério da Educação distribui livros didáticos aos alunos matriculados no Ensino Fundamental da rede pública. Em sua proposta inicial, o Programa Nacional do Livro Didático/PNLD previa, apenas, a escolha dos livros pelo professor, com a conseqüente distribuição pelo MEC. A partir de 1995, os professores passaram a escolher seus livros com base em análises elaboradas por especialistas nas diversas áreas do conhecimento.

Finalmente, em 2005, o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio/PNLEM começou a ser implantado gradativamente, com a distribuição dos livros de Língua Portuguesa e de Matemática.

Os dados de nossa pesquisa foram obtidos de cinco livros didáticos, sendo dois da 8ª série do Ensino Fundamental e três da 1ª série do Ensino Médio:

Quadro 2: Livros didáticos de Matemática analisados nesta pesquisa.

DESIGNAÇÃO	TÍTULO – SÉRIE / AUTOR / EDITORA – ANO
LD-1	▪ Matemática: Uma aventura do pensamento – 8ª série – EF ▪ Oscar Guelli ▪ Ática – 2005
LD-2	▪ Educação Matemática – 8ª série – EF ▪ Célia Carolino, Edda Curi e Ruy Pietropaolo ▪ Atual – 2002
LD-3	▪ Matemática – 1ª série – EM ▪ Edwaldo Bianchini e Herval Paccola ▪ Moderna – 2004
LD-4	▪ Matemática – 1ª série – EM ▪ Luiz Roberto Dante ▪ Ática – 2005
LD-5	▪ Matemática Ensino Médio – 1ª série – EM ▪ Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz ▪ Saraiva – 2004

Para a seleção dos livros relacionados no Quadro 2, adotamos os seguintes critérios:

- Primeiro fizemos uma leitura, no Guia do Livro Didático, das resenhas das 23 coleções de Matemática aprovadas pelo PNLD (2005) para o ensino fundamental, e das 11 coleções aprovadas pelo PNLEM (2005) para o ensino médio.

- Depois fizemos uma pesquisa na biblioteca da escola em que trabalhamos, para verificarmos se havia algumas dessas obras disponíveis para consulta. Encontramos 15 coleções (livro do professor), sendo 8 do Ensino Fundamental e 7 do Ensino Médio.

- Finalmente, com base numa pré-análise comparativa das abordagens de função adotadas nessas 15 coleções, nas resenhas do Guia do Livro Didático, e no fato de alguns desses livros terem sido adotados por professores (da região em que trabalhamos) com quem conversamos informalmente, escolhemos os cinco livros relacionados no Quadro 2, para nossa análise.

3.3. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA DOS LIVROS SELECIONADOS

O livro didático (LD-1), da 8ª série do Ensino Fundamental, faz parte da Coleção *Matemática Uma Aventura do Pensamento* – 2ª edição, 2005 – do autor Oscar Guelli, publicada pela Editora Ática e aprovada pelo PNLD/2005. O livro está organizado em unidades, estruturadas em itens, nos quais se expõem os conteúdos e se propõem exercícios. No final do volume, há um pequeno dicionário informal de Matemática e de sua história, uma bibliografia e as respostas dos exercícios propostos. No manual do professor consta, além do livro do aluno, a resolução de todos os exercícios propostos e um suplemento pedagógico.

O suplemento pedagógico é composto de seções em que se discutem alguns aspectos metodológicos, a construção do conhecimento, o uso da calculadora, a resolução de problemas etc. Porém o autor não explicita os pressupostos teóricos que orientaram a elaboração do livro. Por exemplo, na seção em que o autor trata da resolução de problemas, ele apresenta apenas uma técnica, com quatro passos, para a resolução de problemas, sem enfatizar a importância que esse recurso tem para a construção do conhecimento do aluno.

O livro didático (LD-2), da 8ª série do Ensino Fundamental, faz parte da Coleção *Educação Matemática* – 1ª edição, 2002 – dos Autores Célia Carolino, Edda Curi e Ruy Pietropaolo, publicada pela Atual Editora e aprovada pelo PNLD/2005. No inicio do livro há uma apresentação destinada ao aluno, que descreve a estruturação da obra. O livro está dividido em módulos, e cada módulo é composto por cinco seções: a seção *Resolvendo problemas* apresenta questões introdutórias em cada módulo; na seção *É preciso saber* são fornecidas explicações ligadas ao tema e às situações-problema introdutórias, para sistematização do conteúdo; a seção *É preciso saber fazer* apresenta exercícios de aplicação referentes à seção anterior; a seção *Para saber mais*, aborda curiosidades, aspectos históricos e atualidades relacionadas ao tema do módulo bem como aplicações em outras áreas do conhecimento; finalmente a seção *Mostre que você sabe* apresenta exercícios adicionais relativos ao conteúdo abordado. No final do volume são apresentados projetos temáticos, um banco de imagens, testes de múltipla escolha para cada módulo, e as respostas dos exercícios. O manual do professor é composto do livro do aluno acrescido das respostas dos problemas propostos e de um suplemento pedagógico.

No suplemento pedagógico os autores apontam a resolução de problemas como ponto de partida para a construção de conceitos, procedimentos e atitudes, e apresentam os vários aspectos envolvidos nesta concepção de ensino e aprendizagem da Matemática. Recomendam o uso do computador e da calculadora como ferramentas para auxiliar no processo de construção do conhecimento matemático. Enfatizam a computação gráfica como um recurso bastante estimulador para compreensão e análise do comportamento de gráficos de funções. Estimulam o trabalho com projetos. Abordam temas relevantes para a atualização dos professores, e indicam uma bibliografia e endereços de instituições e grupos de pesquisa voltados para a Educação Matemática.

O livro didático (LD-3), da 1ª série do Ensino Médio, faz parte da Coleção *Matemática* – 1ª edição, 2004 – dos autores Edwaldo Bianchini e Herval Paccola, publicada pela Editora Moderna e aprovada pelo PNLEM/2005. O livro está dividido em capítulos e estes em itens, cujos temas são indicados em seus respectivos títulos. Ao final de cada capítulo, são apresentadas as seções *exercícios complementares, revisão de conceitos, testes de vestibular e questões para pensar.*

O manual pedagógico do livro do professor contém sugestões para avaliação, e leitura complementar de livros revistas e sites, para o aluno e o professor. Na segunda parte, o manual expõe os objetivos específicos do volume, sugestões para o desenvolvimento teórico e a resolução dos exercícios do livro do aluno. No entanto, não explícita os pressupostos teóricos que nortearam a elaboração do livro, além de oferecer poucas orientações metodológicas ao professor.

O livro didático (LD-4), da 1ª série do Ensino Médio, faz parte da Coleção *Matemática* – 1ª edição, 2005 – do autor Luiz Roberto Dante, publicada pela Editora Ática e aprovada pelo PNLEM/2005. Cada capítulo do livro se divide em itens e se inicia, geralmente, com uma introdução que problematiza o tema em foco. Os demais itens apresentam os conteúdos, abordados em textos explanatórios, seguidos sempre de exercícios propostos e muitas vezes de exercícios resolvidos. O livro do professor contém o livro do aluno, um suplemento pedagógico e as resoluções de todos os exercícios propostos.

No suplemento pedagógico o autor deixa claro os pressupostos teóricos que orientaram a elaboração do livro, destacando a contextualização, a interdisciplinaridade e a resolução de problemas como princípios norteadores da obra. Para o autor a resolução de problemas é fundamental para auxiliar o aluno na apreensão dos significados. Na concepção do autor, para o aluno aprender Matemática de forma significativa, é fundamental trabalhar as idéias matemáticas antes da simbologia e da linguagem matemática. Por exemplo, antes de ser apresentada em linguagem matemática, a idéia de função deve ser trabalhada de forma intuitiva com o aluno.

O autor ressalta também o uso da calculadora e do computador, entre outros, como recursos didáticos auxiliares de que o professor deve lançar mão para seu trabalho pedagógico em sala de aula, além de discutir a importância da formação continuada do professor, indicando, inclusive, alguns endereços de grupos de pesquisa na área da Educação Matemática.

O livro didático (LD-5), da 1ª série do Ensino Médio, faz parte da Coleção *Matemática Ensino Médio* – 4ª edição, 2004 – das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, publicada pela Editora Saraiva e aprovada pelo PNLEM/2005. O livro é organizado em unidades temáticas que se dividem em itens. Nesses itens, o conteúdo é introduzido por meio de situações do cotidiano, textos sobre a História da Matemática ou questões internas à Matemática. No capítulo destinado à introdução do conceito de função as atividades são desenvolvidas de modo a favorecer a interação entre representações, como: língua natural, linguagem simbólica, gráficos e tabelas. O livro do professor é constituído por uma cópia do livro do aluno, por um suplemento pedagógico e pela resolução de alguns exercícios propostos.

O suplemento pedagógico apresenta com clareza, os fundamentos teóricos utilizados para a elaboração da obra, destacando a contextualização e a resolução de problemas como os principais pressupostos metodológicos. Para as autoras, a resolução de problemas oferece ao aluno a oportunidade de desenvolver autonomia de raciocínio, construir estratégias de resolução e argumentação, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim persistir na busca da solução.

As autoras enfatizam também que o trabalho com funções deve partir diretamente de sua concepção central, baseada em relações entre grandezas, e sugerem a utilização dos *softwares Graphmatica, Winplot e Modellus*, dentre outros, como recursos auxiliares para o estudo de funções.

3.4. CRITÉRIOS PARA ANÁLISE DOS LIVROS

Com o intuito de nortear nossas questões de pesquisa descreveremos, a seguir, os critérios adotados para a análise da abordagem de função adotada nos livros selecionados, bem como as justificativas para a adoção desses critérios.

Com o objetivo de identificar as estratégias utilizadas pelos autores dos livros didáticos para desenvolver a noção de função, elaboramos os critérios **1, 2** e **3,** inspirados no modelo apresentado por Rossini (2006).

Para verificar os procedimentos usados no esboço de gráficos, bem como as articulações entre os registros de representação gráfico e algébrico, elaboramos os critérios **4, 5** e **6**, a partir das idéias de Duval (2003) e Moretti (2003).

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

Parece-nos claro que a resolução de problemas deve ser vista como fundamental, e não como algo que se faz, eventualmente, no final de alguns capítulos como aplicação dos assuntos matemáticos que até então foram ensinados.

Assim, “a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem”. (BRASIL, 1998, p.40-41).

Tradicionalmente os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino e aprendizagem da matemática. Freqüentemente, nos livros didáticos, e em sala de aula, a resolução de problemas se reduz à aplicação mecânica de técnicas e cálculos, sem a necessária mobilização de conhecimentos, o que não garante uma aprendizagem significativa para o aluno.

> *A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.* (BRASIL, 2002, p.112).

O conceito de função como modelo matemático para o estudo da variação de uma grandeza associada à variação de outra grandeza, tem sido pouco explorado nos livros didáticos.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p.118), “[...] situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função [...]”. Os PCN+ (BRASIL, 2002) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) também recomendam a introdução do conceito de função por meio da exploração qualitativa das relações de dependência entre duas grandezas.

Durante o período da chamada Matemática Moderna (décadas de 60 e 70), foi dada uma ênfase acentuada na utilização da linguagem dos conjuntos e numa apresentação excessivamente formal da Matemática. Desse modo, a definição de função como um conjunto de pares ordenados e como caso particular das relações persiste até hoje na maioria dos livros didáticos. No entanto, presumimos que o estudo de funções por meio da resolução de problemas pode alterar essa situação, pois irá possibilitar a construção das idéias de variável e da relação de dependência entre grandezas.

> Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações [...]. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas [...]. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado [...]. (BRASIL, 2002, p. 121).

Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos?

A noção de função pode emergir da exploração de padrões numéricos e geométricos e da sua subseqüente generalização por meio do uso de expressões com variáveis. O estudo de padrões e regularidades pode ajudar o estudante a descobrir relações e fazer generalizações, servindo como base para a compreensão do conceito de função.

Para Trindade e Moretti (2000), a identificação de regularidades, em situações como seqüências numéricas ou padrões geométricos, é uma habilidade essencial à construção do conceito de função. Assim, “E interessante propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-las simbolicamente” (BRASIL, 1998, p.117).

De acordo com os PCNEM (BRASIL, 1999), para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento, é importante estimular a busca de regularidades e a generalização de padrões.

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

De acordo com os PCNEM (BRASIL, 1999, p.257) situações-problema de matemática e de outras áreas, permite ao estudante flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas, adaptando seus conhecimentos para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. Assim, a exploração das relações funcionais entre duas grandezas em diferentes situações, ”[...] permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, [...] permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática” (BRASIL, 2002, p.121).

De acordo com o PNLEM (BRASIL, 2005) “o estudo das funções numéricas como modelos matemáticos para o estudo da variação de uma grandeza associada à variação de outra grandeza assume um papel unificador importante” (p.71).

Ao apresentar alguns aspectos metodológicos sobre a seleção, distribuição e articulação dos conteúdos, o PNLEM (BRASIL, 2005) destaca que “a representação no plano cartesiano permite ligar as propriedades de uma função com as de seu gráfico e a geometria analítica pode aparecer, então, como um campo de confluência de vários conceitos — função, equação, figura geométrica, etc.” (p.71).

Assim, o caráter de articulações e inter-relacionamentos proveniente do conceito de funções pode, por meio das observações, chegar à constatação de regularidades matemáticas, generalizações e formação de uma linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos ligados à matemática e a outras áreas do conhecimento.

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o *procedimento global das propriedades da figura-forma*, ou somente os *procedimentos por pontos* e *por extensão do traçado efetuado*?

Conforme já mencionamos no capítulo anterior, Duval (1988, *apud* MARIANI, 2006) distingue três tipos de procedimentos relacionados à construção de gráficos de funções: os procedimentos *por pontos* e *por extensão de um traçado efetuado* (que permitem apenas uma leitura pontual dos gráficos); e o procedimento *de interpretação global das propriedades da figura-forma* (que possibilita à representação gráfica o poder intuitivo e heurístico, essencialmente qualitativo).

Segundo Moretti (2003, p.151), a construção de gráficos utilizando os *procedimentos por pontos* e *por extensão de um traçado* é a que mais aparece nos livros didáticos. Pontos obtidos pela substituição de valores numéricos, normalmente inteiros (..., -2, -1, 0, 1, 2,...), na expressão algébrica da função, são localizados no plano cartesiano, para que em seguida o gráfico possa ser traçado por meio da junção desses pontos.

> *Nesse modo, não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir dessa forma de proceder, pelo fato de que* ***se há congruência semântica entre um par ordenado e sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente****.* (MORETTI, 2003, p.151, grifos do autor).

De acordo com Duval (2003, p.17) o *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma*, deve levar em conta, na conversão entre a expressão algébrica e o gráfico de uma função, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.), e os valores escalares (coeficientes positivos ou negativos, maior menor ou igual a 1 etc.) das expressões algébricas.

Esse procedimento permite que o aluno perceba a relação entre as modificações nas expressões algébricas e as modificações na figura e vice-versa, pois “neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação *um ponto* ↔ *um par de números*, mas na associação *variável visual da representação* ↔ *unidade significativa da escrita algébrica*” (DUVAL, 1988, *apud* MORETTI, 2003, p.151).

Assim, a articulação entre as variáveis visuais do gráfico e as correspondências sistemáticas estabelecidas entre os valores destas variáveis e seu significado na expressão algébrica da função é necessária para que se possa utilizar corretamente as representações gráficas cartesianas (DUVAL, 1988, p.243 *apud* MARIANI, 2006, p.42).

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação *discreto/contínuo* é explicitada satisfatoriamente?

Tradicionalmente, nos livros didáticos, a passagem do discreto ao contínuo é confusa. Os gráficos contínuos são, muitas vezes, determinados por um conjunto muito pequeno de pontos discretizados, e não se explicita os detalhes do que ocorre com as imagens nos intervalos entre esses pontos. Por outro lado, funções de domínio discreto são representadas por expressões analíticas tipicamente contínuas, sem o devido esclarecimento. Como o livro didático é um dos principais recursos utilizados pelo professor e pelos alunos, possivelmente essas dificuldades acabam se refletindo em sala de aula.

Pesquisas na área da Educação Matemática mostram que estudantes, e até mesmo professores de Matemática, muitas vezes utilizam, equivocadamente, os procedimentos por pontos e por extensão de um traçado, para esboçar gráficos de funções cujos domínios são conjuntos de números discretos.

Conforme já mencionamos anteriormente, em uma pesquisa realizada com estudantes americanos, do curso de licenciatura em Matemática, Even

(1990, *apud* ROSSINI, 2006) observou que, apesar de terem estudado Cálculo Diferencial e Integral, ao construírem o gráfico de uma função cujo domínio era o conjunto dos números racionais, os alunos utilizaram uma tabela com poucos valores inteiros para a variável independente, sendo que 50% deles ligaram os pontos do gráfico por meio de uma linha contínua, sem levar em consideração o comportamento da função.

A partir de resultados obtidos em uma pesquisa com professores do Ensino Médio, ao analisar a questão da passagem do discreto ao contínuo, no esboço de gráficos, Zuffi e Pacca (2002) concluíram que “o professor atribui valores discretizados da função numa tabela, depois traça um gráfico contínuo, sem maiores aprofundamentos sobre o que acontece com os valores intermediários aos que foram previamente escolhidos” (p.9).

Critério 6 – Quando se trata da articulação entre os registros de representação gráfico e algébrico, são propostas atividades constituídas por tarefas que tratam *dos dois sentidos da conversão?*

Um aspecto importante no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função é o contato com diferentes modos de representar esse objeto matemático. Assim, estabelecer relações entre tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas ajuda os alunos a desenvolver diversos tipos de conexões e a compreender o conceito de função.

De acordo com Duval (2003), a articulação entre os diversos registros de representação semiótica é fundamental para processo de ensino e aprendizagem, pois dependendo da situação-problema, um determinado registro pode tornar-se mais eficiente do que outro. Segundo o autor “Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido” (p.20).

Para Oliveira (1997), no estudo do conceito de função, quando se trata dos registros de representação gráfico e algébrico, é comum nos livros didáticos, adotar-se um único sentido de conversão (expressão algébrica $\rightarrow$ gráfico).

Isso pode limitar a compreensão do aluno, e pode fazer com que ele confunda o objeto *função* com sua representação.

Como vimos anteriormente, as representações gráficas preenchem as quatro funções cognitivas do pensamento. Além disso, através do gráfico e da expressão algébrica de uma função podemos obter informações importantes a respeito das propriedades da função representada (crescimento, decrescimento, valores máximos e mínimos, comportamento para valores muito grandes de *x*, etc.). Assim, a observação ora da lei y = f(x), ora do gráfico nos levará à descoberta das informações desejadas. No entanto para que haja uma apreensão global das representações gráfica e algébrica de uma função, é necessário que a *conversão* entre esses dois registros de representação ocorra nos dois sentidos, observando-se, de um lado, as variáveis visuais do gráfico e, de outro, os coeficientes da expressão algébrica. Nessa perspectiva, quando se trata, da articulação entre os registros gráfico e algébrico, as atividades propostas aos alunos, devem ser constituídas de uma série de tarefas que tratem dos *dois sentidos da conversão.*

A conversão entre os registros gráfico e algébrico é considerada qualitativa, quando são interpretadas as implicações dos valores visuais das representações gráficas (inclinação, intersecção com os eixos etc.) nas expressões algébricas, bem como dos valores escalares da expressão algébrica (coeficientes) nas representações gráficas, ou seja, quando são identificadas as variáveis visuais pertinentes (inclinação da reta com o sinal do coeficiente angular, ponto em que o gráfico intercepta o eixo *y* com o termo independente da expressão algébrica etc.). Daí a importância destas variáveis para o processo de ensino e aprendizagem das representações gráficas. (DUVAL, 2003).

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, descreveremos os aspectos convergentes e divergentes das estratégias adotadas nos livros didáticos para a abordagem de função, em relação aos critérios adotados para a análise dos mesmos.

4.1. Livro Didático 1 (LD-1) - Matemática: Uma aventura do pensamento. 8ª série do Ensino Fundamental. Guelli (2005).

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

O autor do LD-1 inicia o capítulo sobre funções pela seção "A vida e a Matemática", salientando que: "as funções são a linguagem do movimento na Matemática, na Física e em outras ciências" (p.147) e, em seguida, faz os seguintes comentários sobre aos gráficos mostrados na Figura 4, abaixo: "O gráfico 1 mostra como varia, aproximadamente, a velocidade de um atleta que corre 100m em cerca de 10s. O gráfico 2 não poderia representar o movimento de um atleta, pois no instante t = 4s ele teria diferentes velocidades ao mesmo tempo" (p.147).

Apesar do autor do livro mencionar, em seu comentário, que o gráfico 1 mostra a variação da velocidade de um atleta, ele não esclarece que a velocidade varia em função do tempo, ou seja, não fica claro que se trata de uma relação de dependência entre duas grandezas (velocidade e tempo).

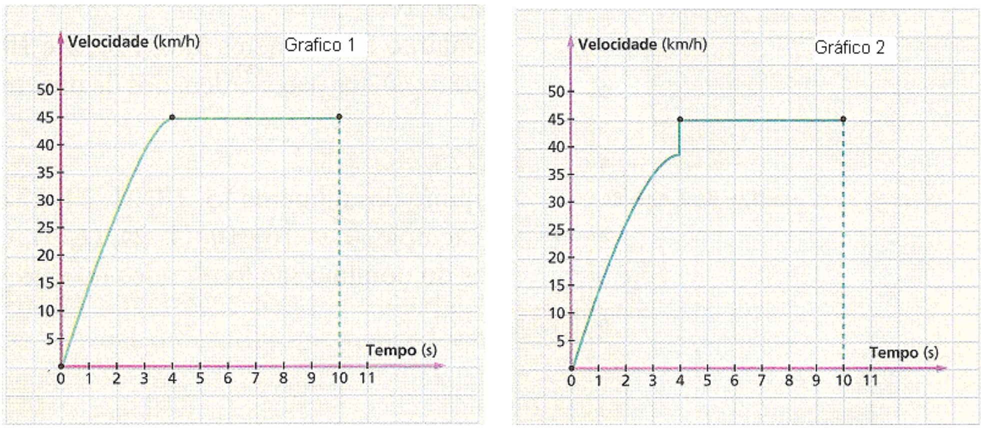


Figura 4: gráfico da variação da velocidade de um atleta.

Logo em seguida, esta apresentação, que se bem mais explorada poderia levar ao conceito de função como correspondência ou dependência entre grandezas, é abandonada repentinamente em favor da formalização do conceito de função como uma relação particular.

O autor apresenta a seguinte situação de dependência entre duas grandezas, para introduzir o conceito de função como um conjunto de pares ordenados: “Uma pessoa recebe R$ 3,00 por objeto que fabrica. Ela consegue produzir de 5 a 10 objetos por dia. O seu salário diário será determinado pelo número n de objetos que faz” (p.148). Uma tabela com os valores de *n* e do respectivo salário é apresentada e, em seguida, após afirmar que se trata de um conjunto de pares ordenados, ou seja, de uma *relação*, o autor apresenta o conjunto dos pares ordenados que constam da tabela. Segue a explicação de que os primeiros números (abscissas) dos pares ordenados representam o domínio da relação e os segundos números (ordenadas) a imagem.

Em nenhum momento, as palavras variação ou dependência são mencionadas. Na seqüência, após a representação gráfica de três conjuntos finitos de pares ordenados (relações), formados por números inteiros, o autor apresenta três exemplos de relações representadas por diagramas de flechas, conforme podemos ver na Figura 5, extraída do LD-1 (p.149):

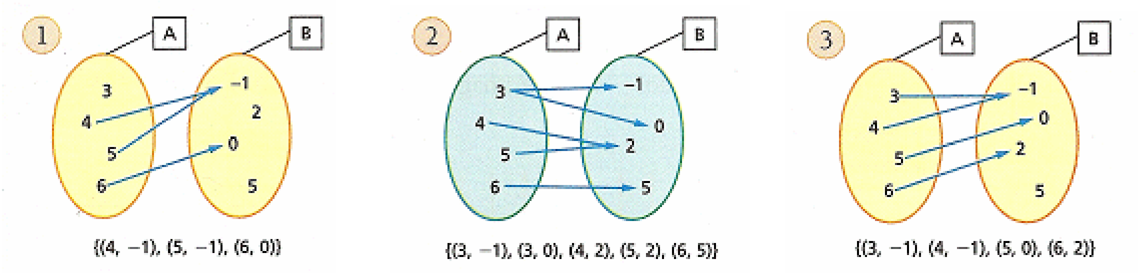


Figura 5: Relações representadas por diagramas de flechas.

Após explicar que as relações 1 e 2 não representam funções, porque na relação 1, o número 3 não é o primeiro número de nenhum par ordenado e, na relação 2, o número 3 é o primeiro número de dois pares ordenados, o autor afirma que a relação 3 é uma função de **A** em **B**, e apresenta a seguinte definição: "Uma função de **A** em **B** é uma relação que associa a todo elemento de **A** um único elemento de **B**" (p.150).

Em seguida é dado um contra-exemplo de função por meio do gráfico de uma circunferência de centro C(0, 0) e raio 4, no qual é aplicado o teste da reta vertical para justificar que a relação determinada pelos pontos da circunferência não é uma função.

Para mostrar que uma função pode ser descrita por meio de uma regra, o autor apresenta o seguinte exemplo: f = {(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)}. Em seguida, observa que "para cada elemento da função f, a ordenada é o dobro da abscissa. Descrevemos a função mediante a equação y = 2x, chamada formula" (p. 151).

Mais adiante o autor introduz, de forma automática, a notação f(x), e na seção "Construindo a Matemática" conta que esta notação foi utilizada pela primeira vez na história da matemática pelo matemático suíço Leonhard Euler.

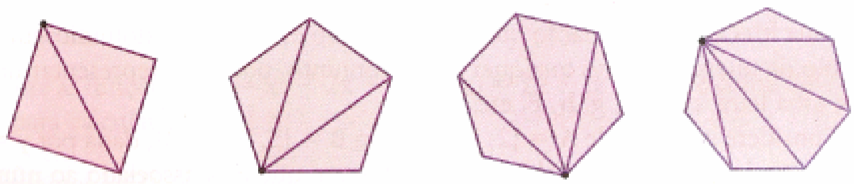
Portanto, embora o LD-1 apresente algumas situações de dependência entre grandezas, nos exemplos e exercícios, o autor não utiliza essas situações para desenvolver o conceito de função como uma relação de dependência entre duas grandezas variáveis, ao contrário, opta por uma abordagem mais formal, que utiliza a Teoria dos Conjuntos, para definir função como uma relação particular.

Em nossa opinião, essa maneira formal de definir função é inconveniente, pois além de estática não transmite a idéia intuitiva de função como uma relação de dependência.

Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos?

O autor do LD-1 não utiliza situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos para introduzir o conceito de função, no entanto esse tipo de tarefa é apresentada, de forma direta, em um dos exercícios propostos:

6 Estabeleça uma fórmula que dê o número de triângulos **t** formados quando se traçam as diagonais de um polígono de **n** lados a partir de um vértice. Qual é o domínio e a imagem da função?



Fonte: GUELLI, 2005, p.153.

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

No inicio do capítulo sobre funções, há a afirmação de que “as funções são a linguagem do movimento na Matemática, na Física e em outras ciências” (p.147). Há ainda a representação gráfica de um problema de cinemática. No entanto, não são exploradas situações de dependência entre grandezas que evidenciem o papel que o conceito de função desempenha na articulação entre campos matemáticos ou na conexão com outras áreas do conhecimento.

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o *procedimento global das propriedades da figura-forma*, ou somente os *procedimentos por pontos* e *por extensão do traçado efetuado*?

No capítulo referente à introdução do conceito de função, o autor do livro LD-1 utiliza somente o *procedimento por pontos* para a representação gráfica de três relações, a partir de conjuntos finitos de pares ordenados de números inteiros. No único exercício em que o autor propõe a construção do gráfico de duas funções (uma do 1º grau e outra do 2º grau), ele restringe o domínio dessas funções ao conjunto {-2, -1, 0, 1, 2}, o que impossibilita a utilização do *procedimento por extensão de um traçado efetuado*. Observamos ainda que o *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma* não é utilizado pelo autor do LD-1 nem mesmo no capítulo seguinte, referente ao estudo das funções do 1º grau.

Entendemos que a construção, interpretação e análise de gráficos de funções são fundamentais para a formação geral do aluno (atualmente, a mídia e outras áreas do conhecimento são permeadas por representações gráficas para descrever fenômenos de dependência entre grandezas) e para a compreensão da idéia de função, não obstante, o autor do LD-1 praticamente não utiliza esse recurso no capítulo relativo ao conceito de função.

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação *discreto/contínuo* é explicitada satisfatoriamente?

O autor do LD-1 não apresenta nenhum exemplo como também não propõe nenhum exercício que possibilite a construção de gráficos formados por linhas contínuas. Isso porque, no desenvolvimento do conceito de função, o autor utiliza nos exemplos apenas relações representadas por conjuntos de pares ordenados de números inteiros e, nos exercícios em que é dada a expressão algébrica para que se construa o gráfico correspondente, o autor utiliza sempre domínios formados por conjuntos de números discretos. Logo, não existe nenhuma relação, ou mesmo referência, da passagem do discreto ao contínuo. É importante observar que, mesmo no capítulo seguinte relativo ao estudo das funções do 1º grau, o autor não faz nenhum comentário a respeito desse assunto.

Critério 6 – Quando se trata da articulação entre os registros de representação gráfico e algébrico, são propostas atividades constituídas por tarefas que tratam *dos dois sentidos da conversão*?

No capítulo destinado à introdução do conceito de função, do LD-1, as conversões efetuadas nos exemplos, e as solicitadas nos exercícios obedecem sempre o seguinte padrão: Língua natural $\rightarrow$ expressão algébrica; tabela $\rightarrow$ expressão algébrica; diagrama de flechas $\rightarrow$ expressão algébrica; expressão algébrica $\rightarrow$ gráfico.

Nos exemplos, os gráficos que aparecem são construídos a partir de conjuntos de pares ordenados. Entretanto, em dois exercícios propostos, pede-se para construir o gráfico de funções representadas por fórmulas, para domínios formados por conjuntos com quatro ou cinco números inteiros.

Conforme podemos observar, não são propostas atividades que possibilitem a conversão entre as representações gráfica e algébrica, nos dois sentidos, ou seja, a conversão é requerida apenas no sentido expressão algébrica $\rightarrow$ gráfico, o que pode ser um obstáculo para a compreensão do conceito de função, uma vez que o aluno pode confundir o objeto com sua representação.

Além disso, nos exercícios propostos predominam os tratamentos de registros sobre as conversões (cerca de 60% dos exercícios propostos, não apresentam nenhum tipo de tarefa que solicite a conversão entre registros). No entanto o que garante a compreensão em Matemática é a coordenação entre os diferentes registros e não o “enclausuramento” em cada registro. (DUVAL, 2003).

4.2. Livro Didático 2 (LD-2) - Educação Matemática. 8ª série do Ensino Fundamental. Pires et al (2002).

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

Os autores do LD-2 procuram priorizar a resolução de problemas do cotidiano, de uma forma contextualizada, para descrever situações de dependência entre duas grandezas, procurando oferecer ao aluno a oportunidade de compreender e interpretar situações, argumentar, tirar conclusões próprias, generalizar etc.

Sob o título *Variação de grandezas: problemas do cotidiano*, os autores do LD-2 iniciam o capítulo sobre funções com um texto que faz referência a dois grandes educadores matemáticos: os professores Ubiratan D'Ambrosio e Bento de Jesus Caraça, para enfatizar a relação da Matemática com os problemas da vida social, ou seja, com o cotidiano das pessoas. Em seguida, na seção *Resolvendo problemas*, são apresentadas três situações-problema para descrever situações de dependência entre duas grandezas.

O primeiro problema refere-se ao gráfico mostrado na Figura 6, que foi extraída do LD-2 (p.112), e começa com o seguinte texto: "O gráfico abaixo mostra o crescimento de uma planta ao longo de 10 dias. Observe que a altura da planta em centímetros (h) varia de acordo com o tempo em dias (t)" (p.112).

Em seguida pede-se para: montar uma tabela com os dados do gráfico e descrever a relação existente entre a altura (h) e o tempo (t), por meio de uma igualdade. Além destas tarefas, são feitas algumas perguntas relacionadas ao gráfico, como a seguinte: "Faz sentido unir os pontos desse gráfico"? (p.112).

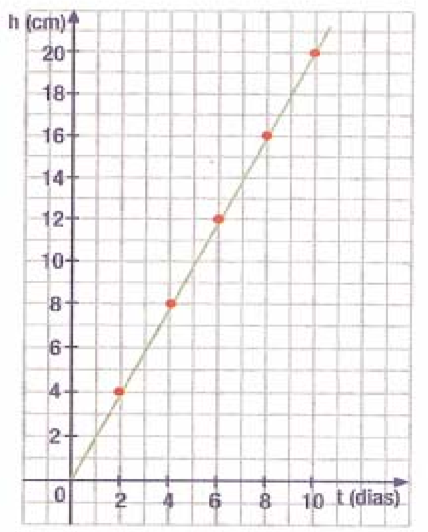


Figura 6: Representação gráfica do crescimento de uma planta.

O segundo problema relaciona o custo total de produção de certa máquina com a quantidade de máquinas fabricadas. A partir do enunciado, pede-se para que o aluno complete uma tabela com o custo total de produção, a partir de valores fornecidos para o número de máquinas produzidas. A seguir, pede-se para o aluno: construir um gráfico; relacionar o custo de produção com a quantidade de máquinas fabricadas, por meio de uma igualdade; verificar se os pontos do gráfico estão alinhados e se faz sentido unir esses pontos.

O terceiro problema apresenta uma situação contextualizada de interdependência entre a massa de pequenas amostras de ferro e seus respectivos volumes. Uma tabela com valores da massa em gramas e dos respectivos volumes em centímetros cúbicos é apresentada, e pede-se para que o aluno: calcule a densidade do ferro; construa o gráfico correspondente a essa situação; descreva, por meio de uma igualdade, a relação existente entre as duas grandezas; verifique se os pontos do gráfico estão alinhados e se faz sentido uni-los.

Nas seções *É preciso saber fazer* e *Mostre que você sabe* são apresentadas varias situações do cotidiano, bem como situações relacionadas à Física e à Geometria, que mostram relações de interdependência entre grandezas.

Com o objetivo de definir função como uma relação entre os elementos de dois conjuntos de números, o LD-2 apresenta três frases no início da seção *é preciso saber*, dentre elas a seguinte: “O pagamento dos operários vai ser calculado em função das horas de trabalho” (p.113). Em seguida é dada a seguinte definição para função: “Uma função numérica é uma relação particular que estabelecemos entre os elementos de dois conjuntos numéricos, os quais expressam grandezas que se relacionam por uma determinada lei” (113). A seguir, ao lado do diagrama de flechas mostrado na Figura 7, extraída do LD-2 (p.113), aparecem os seguintes comentários:

> *No caso dos operários da frase acima, podemos pensar em um conjunto A, correspondente às horas trabalhadas, e em um conjunto B, correspondente ao valor a ser pago em função das horas trabalhadas. Essa situação está representada ao lado por meio de um diagrama de flechas. Observe que a cada quantidade de horas trabalhadas corresponde um e apenas um valor de pagamento a ser feito*.
> *No problema 1 da seção anterior, a função em questão relacionava a altura da planta em centímetros e o tempo em dias que ela leva para atingir determinada altura. Nesse caso, a lei que expressa essa relação é y = 2x, sendo y a altura da planta em centímetros e x o tempo em dias. Dizemos que y varia em função de x.* (PIRES et al, 2002, p.113).

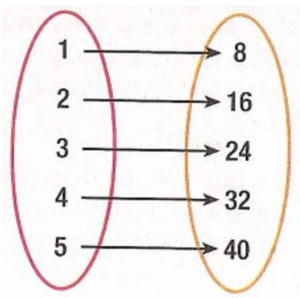


Figura 7: Diagrama de flechas.

Porém, é importante salientar que esta é a única referência feita à teoria dos conjuntos, para formalizar o conceito de função. Em nenhuma outra parte do capítulo referente à introdução desse conceito, faz-se menção à teoria dos conjuntos ou utilizam-se, o conceito de relação, ou os diagramas de flechas, para explorar o conceito de função, ou seja, o desenvolvimento da idéia de função se dá com ênfase na relação dependência entre duas grandezas variáveis.

Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos?

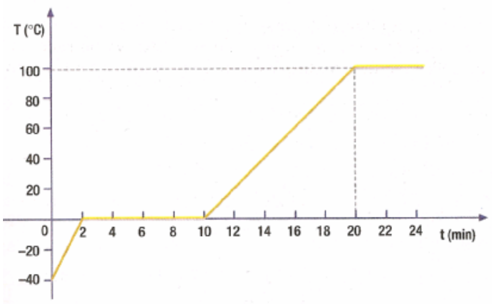
No LD-2, são propostas situações que incentivam o aluno a procurar padrões e regularidades e formular generalizações em situações diversas, em contextos numéricos e geométricos, como por exemplo, podemos ver nas atividades 9 e 10, propostas na seção *É preciso saber fazer*, em que são apresentadas duas situações abrangendo a generalização de regularidades, uma envolvendo uma seqüência numérica (PA) e outra envolvendo padrões geométricos:

> *9. O primeiro termo de uma seqüência de números é 2, o segundo é 5, o terceiro é 8, o quarto é 11, e assim por diante, indique a relação entre um número dessa seqüência e sua posição nessa seqüência. Explique por que essa relação é uma função.*
> *10. Considere a relação entre a soma dos ângulos internos (y) de um polígono e o número de lados (x) desse polígono. Qual é essa relação e o que você pode concluir sobre ela?* (PIRES et al, 2002, p.117).

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

Além de diversos problemas do cotidiano, apresentados em contextos significativos para o aluno, o LD-2 propõe situações que possuem ligação com outras áreas do conhecimento bem como com outros campos da matemática, nomeadamente com a Física e com a Geometria Analítica, conforme podemos ver nas atividades 2 e 3 da seção *Mostre que você sabe*:

> *2. Uma panela contendo uma barra de gelo a -40°C é colocada sobre a chama de um fogão. O gráfico abaixo mostra a evolução da temperatura da água em função do tempo. Responda:*



a) Qual é a lei que descreve essa evolução nos 2 primeiros minutos? E nos 8 minutos seguintes?
b) Que significam as diferentes inclinações dos segmentos que compõem o gráfico?

3. Considere a relação entre o comprimento de uma circunferência (y) e a medida de seu raio (x). Faça um gráfico para representar essa relação. (PIRES et al, 2002, p.121).

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o *procedimento global das propriedades da figura-forma*, ou somente os *procedimentos por pontos* e *por extensão do traçado efetuado*?

Em praticamente todas as seções do LD-2 são apresentadas diversas situações-problema, nas quais, freqüentemente, pede-se para construir o gráfico da situação correspondente. Em algumas situações o problema é apresentado por meio de uma tabela, dentro de um contexto. Nesse caso, o aluno deve utilizar a tabela fornecida para construir o gráfico por meio dos *procedimentos por pontos* e por *extensão de um traçado efetuado*, ou somente *por pontos*, de acordo com o domínio da função. Quando o problema é apresentado em língua natural, geralmente pede-se para que o aluno complete ou construa uma tabela que represente o comportamento da função em questão, para em seguida construir o gráfico.

Na seção *Para saber mais*, o *procedimento global das propriedades da figura-forma* fica evidente em diversas representações gráficas de funções do 1° grau, em que são propostas tarefas que estimulam o aluno a levar em conta as variáveis visuais dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.), e os coeficientes das expressões algébricas correspondentes, permitindo que se identifiquem as modificações ocorridas conjuntamente nas imagens e nas expressões algébricas das funções.

A seguinte atividade, referente aos gráficos da Figura 8, mostra um exemplo desse tipo de tarefa: “analise os gráficos e responda às perguntas abaixo” (PIRES et al, 2002, p.119).

a) “Que semelhança (s) e diferença (s) você observa nos gráficos” **I, III** e **VI**?
b) “Que semelhança (s) e diferença (s) você observa nos gráficos” **II, IV** e **V**?

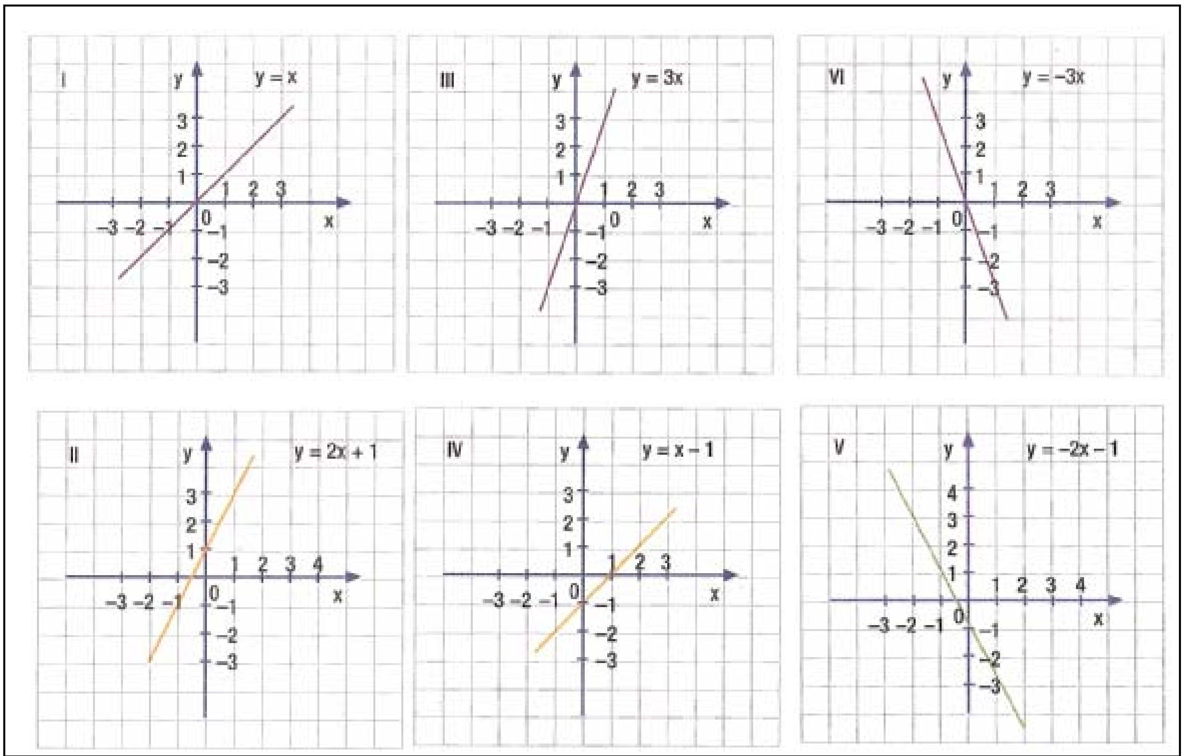
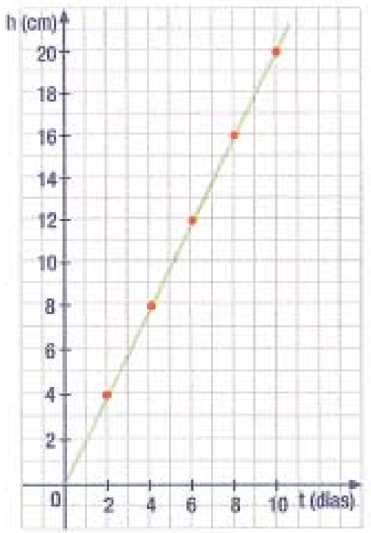
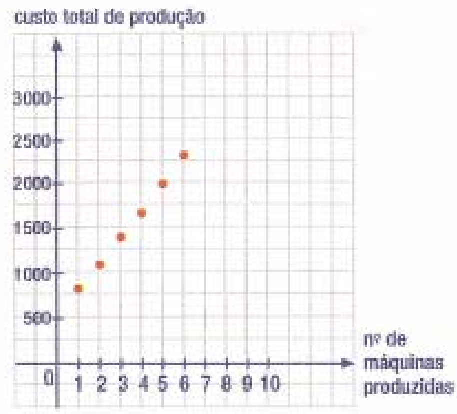


Figura 8: Representações gráficas de funções do 1º grau.

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação *discreto/contínuo* é explicitada satisfatoriamente?

Na seção *É preciso saber*, após apresentarem os gráficos referentes aos problemas 1 e 2, da seção *Resolvendo problemas*, supracitados no critério 1, os autores explicam o fato de se unir ou não os pontos de um gráfico, utilizando uma linguagem adequada para estudantes da 8ª série do Ensino Fundamental, conforme podemos ver a seguir:





Com relação ao fato de unirmos ou não os pontos do gráfico, é importante comentar que no caso do gráfico do crescimento da planta, por exemplo, os pontos do gráfico foram unidos porque a planta cresce continuamente nos diferentes intervalos de tempo considerados. Assim, podemos saber qual é a sua altura após um dia e meio, por exemplo. Já no caso do custo das máquinas, os pontos do gráfico não foram unidos porque ninguém compra uma máquina e meia ou três quartos de máquina. Mesmo sem unirmos os pontos é possível verificar que todos eles estão alinhados (pertencem a uma mesma reta).

Fonte: PIRES et al, 2002, p.114.

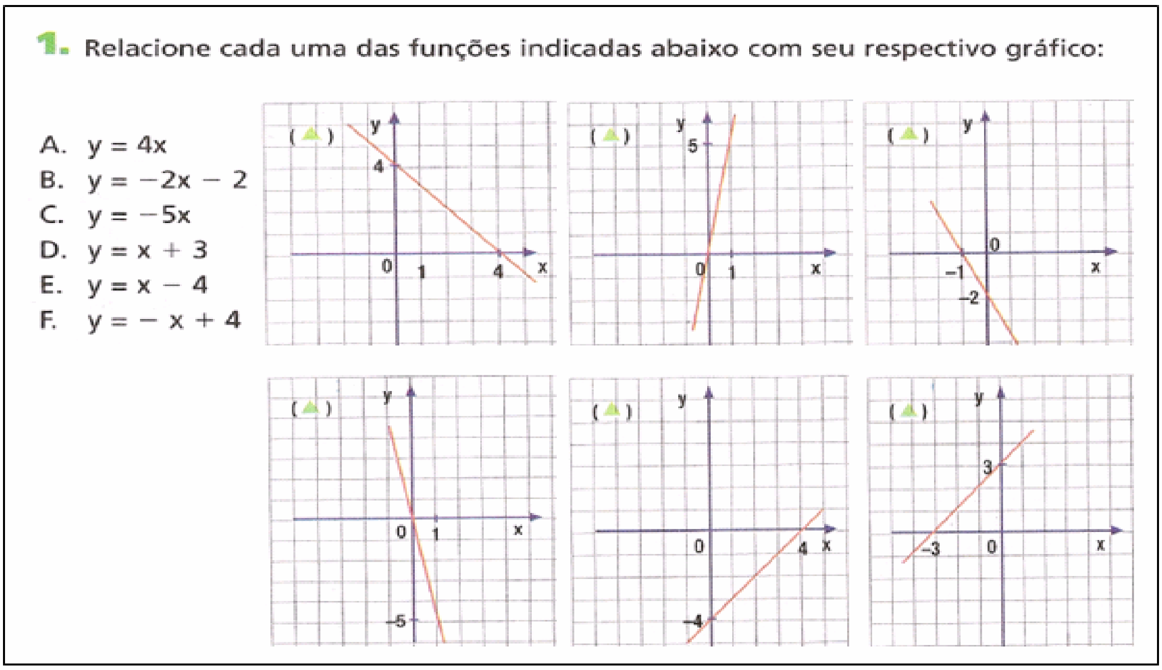
É importante salientar que antes de apresentar a explicação acima, para justificar a união ou não dos pontos utilizados para a construção do gráfico de uma função, são propostas diversas situações-problema, com tarefas envolvendo a construção de gráficos, em que após pedir para o aluno descrever a disposição dos pontos, verificando se eles estão ou não alinhados, os autores fazem a seguinte pergunta: “Faz sentido unir os pontos desse gráfico”?

Em nossa opinião, esse tipo de tarefa pode ajudar o aluno a perceber em que situações ele pode ou não unir os pontos do gráfico, ou seja, pode facilitar o entendimento da passagem de uma situação discreta (pontos isolados) para uma situação contínua (traçado: reta, curva).

Critério 6 – Quando se trata da articulação entre os registros de representação gráfico e algébrico, são propostas atividades constituídas por tarefas que tratam *dos dois sentidos da conversão*?

No capítulo dedicado ao conceito de função, do livro LD-2, são propostas várias atividades que permitem ao aluno transitar pelos diversos registros de representação semiótica do objeto matemático *função*. Embora alguns sentidos de conversão sejam privilegiados, priorizam-se as conversões e não os tratamentos. Em cerca de 80% dos exercícios propostos existem tarefas em que são solicitadas conversões entre os diversos registros de representação semiótica.

No livro LD-2, são apresentadas diversas atividades nas quais o aluno é solicitado a passar da representação algébrica de uma função para sua representação gráfica e, em algumas situações, pede-se para que o aluno encontre a expressão algébrica da função a partir do seu gráfico, ou seja, a conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico é requerida nos dois sentidos, como, por exemplo, no exercício abaixo, extraído do LD-2 (p.120 e 121):



Fonte: PIRES et al, 2002, p.120 e 121.

O exercício que acabamos de apresentar é semelhante à atividade que Duval (1988, p.244) propôs em uma de suas pesquisas, para um grupo de alunos franceses, com idade entre 15 e 16 anos, cujo objetivo era elucidar as variáveis visuais envolvidas na conversão entre os registros gráfico e algébrico, conforme mostramos no capítulo 2 desta pesquisa. Esse tipo de atividade permite que o aluno perceba conjuntamente modificações no gráfico e na expressão algébrica da função, por meio das variáveis visuais pertinentes (sentido da inclinação da reta com o coeficiente angular; ponto em que a reta intercepta o eixo y com o coeficiente linear etc.). Daí a importância da utilização do *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma* no processo de ensino e aprendizagem das representações gráficas.

4.3. Livro Didático 3 (LD-3) - Matemática. 1ª série do Ensino Médio. Bianchini e Paccola (2004).

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

No início do capítulo que trata do conceito de função, os autores do LD-3 apresentam um pequeno texto sobre o desenvolvimento do conceito de função, enfatizando a relação desse conceito com outras áreas, desde o seu surgimento, especialmente nas situações envolvendo movimento. Em seguida, os autores utilizam o seguinte exemplo, para definir função como uma relação entre duas grandezas: "Dados um tanque com 1.200ℓ de capacidade e uma torneira que despeja nele 30ℓ de água por minuto, o volume de água despejada dependerá do tempo que a torneira ficar aberta" (p.61). Na seqüência são mostrados os cálculos para a obtenção do volume de água no tanque, para alguns valores inteiros do tempo em minutos. Uma tabela, com alguns valores inteiros do tempo indicado por (t) e do volume indicado por (v) é construída e, em seguida são feitas as seguintes observações:

> *Observe que as **variáveis** t e v se relacionam pela igualdade* $v = 30 \cdot t$*, com* $0 \leq t \leq 40$*. Observe ainda que, a cada valor atribuído à variável t, obtemos um único valor para a variável v. Essa situação constitui um exemplo de **função**. Nela, dizemos que v é função de t. A relação* $v = 30 \cdot t$ *é chamada de **lei de associação** ou **lei de formação** da função.* (BIANCHINI e PACCOLA, 2004 p.61, grifos dos autores).

Após apresentarem outras situações para exemplificar funções, os autores ressaltam que o conceito de função “surge toda vez que se consegue estabelecer uma relação entre duas grandezas variáveis” (p.61), e definem função da seguinte maneira: “**Função** é uma relação entre duas grandezas tal que a cada valor da primeira corresponde **um único** valor da segunda” (p.61, grifos dos autores).

Como podemos ver, existe uma preocupação inicial dos autores em caracterizar uma função como uma relação de dependência entre duas grandezas, em diferentes situações.

Após definir função como uma relação entre duas grandezas, os autores do LD-3 apresentam outra definição para função como uma relação entre os elementos de dois conjuntos. Dentre os exemplos citados pelos autores para mostrar a relação entre os elementos de dois conjuntos encontramos o seguinte: “Quando associamos a cada número natural o seu oposto, há uma função do conjunto N = {0, 1, 2, 3,...} no conjunto Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2,...}. Cada número natural tem um único oposto que pertence ao conjunto dos números inteiros” (p.62). Na seqüência os autores apresentam a seguinte definição: “Dados dois conjuntos A e B não vazios, toda relação que associa cada elemento de A a um, e somente um, elemento de B é uma **função de A em B**” (p.62, grifos dos autores).

Mais adiante, sob o titulo *A linguagem das funções*, os autores destacam algumas das formas representacionais das funções, conforme podemos ver a seguir:

Uma função pode ser definida por uma tabela, por uma lei de formação ou graficamente.
Como exemplo, dados os conjuntos $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{1, 3, 4, 6\}$, vamos estabelecer uma função de A em B definida por:

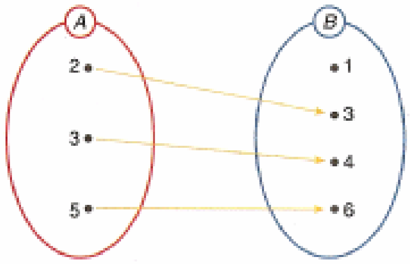
uma tabela

x	2	3	5
y	3	4	6

uma lei de formação

$y = x + 1$

um diagrama de flechas



Observe que, nos três casos, para cada x de A existe em correspondência um único y de B. Por isso, temos uma função de A em B.

Fonte: BIANCHINI e PACCOLA, 2004, p.62.

É importante observar que os autores, embora se referindo à representação gráfica, apresentam um diagrama de flechas, em vez de um gráfico cartesiano.

Na seqüência, os autores do LD-3 mostram que essa correspondência pode ser indicada por meio dos pares ordenados (2, 3), (3, 4), (5, 6), e apresentam, em seguida, uma nova definição: ”Dados dois conjuntos não vazios A e B, e uma lei f que associa **a cada elemento x de A um único elemento y de B**, temos uma função f de A em B” (p.63, grifos dos autores). Em seguida são apresentados os conceitos de *domínio*, *contradomínio* e *conjunto imagem* de uma função.

Conforme podemos ver, apesar de iniciar o capítulo sobre funções falando a respeito da aplicação desse conceito nas mais diversas áreas e dando exemplos práticos da relação de dependência entre duas grandezas, os autores acabam definindo função como um conjunto de pares ordenados. Não é à-toa que o capítulo antecedente ao destinado à introdução do conceito de função trata justamente da teoria dos conjuntos. A preocupação com o formal é denotada também, nos exemplos e exercícios propostos, em que o uso de relações representadas por conjuntos de pares ordenados, os diagramas de flechas e outras questões estanques, que exigem do aluno apenas a aplicação de técnicas envolvendo operações com números reais, predominam.

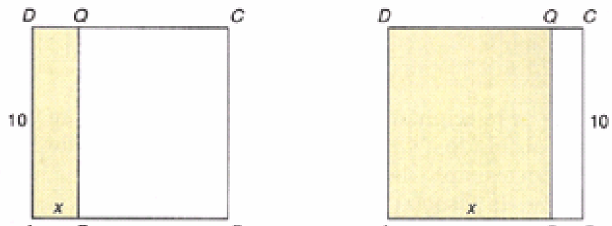
Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos?

No capítulo referente à introdução do conceito de função, os autores do LD-3 não apresentam nenhuma tarefa envolvendo a generalização de regularidades em contextos numéricos ou geométricos.

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

No início do capítulo que trata do conceito de função, os autores do LD-3 ressaltam as aplicações desse conceito em outras áreas do conhecimento, especialmente nas questões envolvendo movimento. Entretanto, somente no final do capítulo, nos exercícios complementares, aparece um único exercício no qual é apresentado um gráfico que representa a variação da velocidade de um carro em função do tempo e algumas questões relacionadas a esse gráfico. A articulação com outros campos da Matemática também é pouco explorada, já que o LD-3 apresenta somente um exercício (p.62) em que o conceito de função é utilizado para descrever situações de dependência entre duas grandezas, em conexão com a geometria plana:

1. As figuras abaixo mostram um quadrado *ABCD* e um segmento $\overline{PQ}$ que se desloca horizontalmente sempre perpendicular ao lado $\overline{AB}$. Para cada posição do segmento $\overline{PQ}$, obtém-se um retângulo *APQD* cujos lados medem 10 cm e *x* cm. A área *A*(*x*) desse retângulo, em cm², depende do valor de *x*.



a) Atribua a *x* os valores 2, 3, 5, 7 e 8,5 e determine os valores correspondentes de *A*(*x*). Em seguida, construa uma tabela e coloque nela esses dados.
b) Represente a área *A*(*x*) como função de *x*.
c) Suponha que *P*(*x*) represente o perímetro, em cm, do retângulo *APQD*. Atribua a *x* os mesmos valores do item **a** e determine os valores correspondentes de *P*(*x*). Construa uma tabela e coloque néla esses dados.
d) Represente o perímetro *P*(*x*) como função de *x*.
e) Qual é o maior valor que *x* pode assumir?

Fonte: BIANCHINI e PACCOLA, 2004, p.62.

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o *procedimento global das propriedades da figura-forma*, ou somente os *procedimentos por pontos* e *por extensão do traçado efetuado*?

Sob o titulo *Gráfico de uma função*, os autores do LD-3 começam explorando o sistema cartesiano ortogonal, os quadrantes, as coordenadas de um ponto etc., e finalmente apresentam uma definição para gráfico de uma função: “Dada uma função f real de variável real, quando representamos no plano cartesiano todos os pares ordenados (x, y), com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$, obtemos um conjunto de pontos que é o **gráfico de f**” (p.67, grifos dos autores). Em seguida são dados exemplos de gráficos de funções, nos quais são utilizados os *procedimentos por pontos* e *por extensão de um traçado efetuado*.

Os autores do LD-3 mostram ainda como reconhecer quando um gráfico representa uma função e como identificar o domínio e a imagem de uma função por meio de sua representação gráfica, o que é muito importante, em nossa opinião, no estudo de funções. Entretanto eles não utilizam o procedimento *de interpretação global das propriedades da figura-forma* na construção de gráficos de funções, no capítulo destinado à introdução do conceito de função. Nem mesmo no capítulo seguinte, que trata das funções polinomiais do 1º grau, esse procedimento é adotado no livro LD-3. Vale lembrar que é o *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma* que permite uma apreensão global e qualitativa das representações gráficas. (DUVAL, 2003).

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação *discreto/contínuo* é explicitada satisfatoriamente?

Na seção, *Gráfico de uma função*, o livro LD-3 apresenta os gráficos de duas funções (uma do 1º grau e outra do 2º grau) para três domínios diferentes nos dois casos.

A Figura 9, extraída do LD-3 (p.68), mostra o gráfico da função $y = x^2 - 1$ para os casos em que o domínio é representado, respectivamente, por um conjunto finito de números inteiros, por um subconjunto dos números reais e pelo conjunto dos números reais.

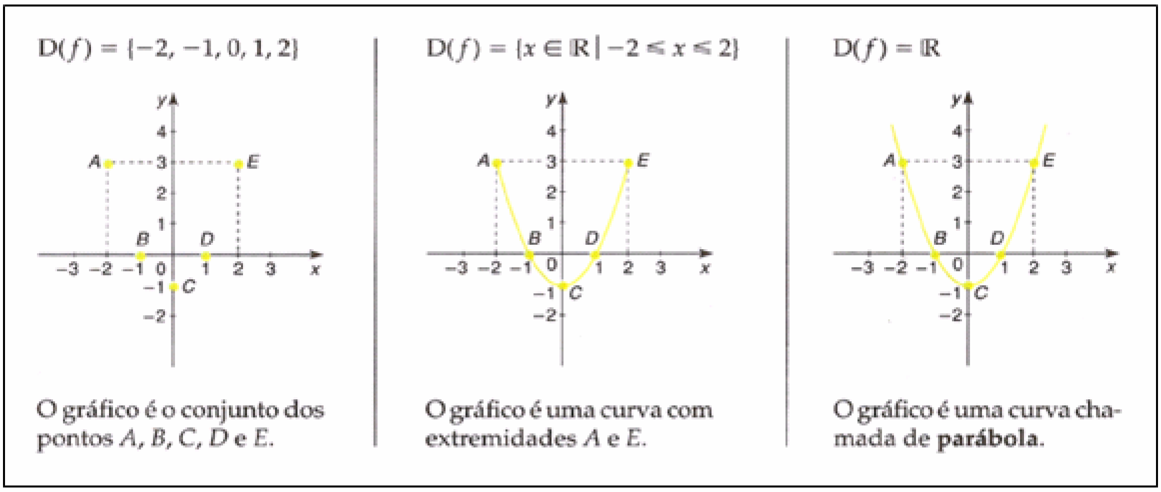


Figura 9: Gráfico da função $y = x^2 - 1$ para diferentes domínios.

No entanto, essa passagem automática do discreto ao contínuo, pode ser confusa para o aluno, já que os autores não explicitam o que acontece com os valores intermediários aos que foram marcados no plano cartesiano, nos casos em que os gráficos são representados por uma curva contínua, conforme podemos ver na Figura 9.

Na seqüência são propostos alguns exercícios em que se pede para construir gráficos de funções com domínio formado por um subconjunto de Z, contendo cinco ou seis elementos, bem como gráficos de funções cujo domínio é o conjunto dos números reais (R) ou um subconjunto de R.

Critério 6 – Quando se trata da articulação entre os registros de representação gráfico e algébrico, são propostas atividades constituídas por tarefas que tratam *dos dois sentidos da conversão*?

No capítulo destinado à introdução do conceito de função, as conversões executadas nos exemplos e as solicitadas nos exercícios propostos no LD-3 obedecem ao seguinte padrão: (língua natural → tabela → expressão algébrica; expressão algébrica → tabela → gráfico; expressão algébrica → língua natural). Observamos que quando se trata da conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico, um único sentido de conversão é privilegiado (expressão algébrica → gráfico). Somente no capítulo subseqüente, que trata do estudo das funções do 1º grau, a conversão no sentido contrário (gráfico → expressão algébrica) é requerida em alguns exercícios propostos.

De acordo com Duval (2003) a compreensão em Matemática está ligada à capacidade de mudar de registro, portanto no ensino da Matemática devem-se priorizar as conversões e não os tratamentos. Entretanto no capítulo dedicado à idéia de função do LD-3 ocorre o contrário, ou seja, nos exercícios propostos prevalecem os tratamentos (cerca de 70%) sobre as conversões (cerca de 30%).

4.4. Livro Didático 4 (LD-4) - Matemática. 1ª série do Ensino Médio. Dante (2005).

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

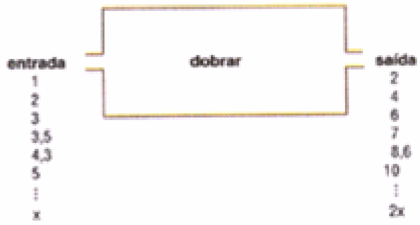
Sob o título *A noção intuitiva de função*, o autor do LD-4 ressalta a importância do conceito de função para a Matemática, e afirma que “ele está presente sempre que relacionamos duas grandezas variáveis” (p.44). Em seguida são apresentados quatro exemplos - envolvendo situações da Física, do cotidiano e da geometria - que mostram a dependência entre duas grandezas variáveis, sendo que em três deles a relação entre as grandezas é mostrada por meio de tabelas, e em outro exemplo, o autor utiliza a *metáfora* de *função como uma máquina*. Em seguida são propostos exercícios, envolvendo situações que trabalham essas idéias. Vejamos, a seguir, dois exemplos, extraídos do LD-4 (p.45):

5) *A máquina de dobrar*

Observe o desenho imaginário de uma máquina de dobrar um número.

Veja que os números que saem são dados *em função* dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem *dependem* dos números que entram. Assim, a *variável dependente* é o número de saída e a *variável independente* é o número de entrada.

Nesse caso temos:



número de saída (**n**) é igual a duas vezes o número de entrada (**x**)

ou

$n = 2x$ → *regra da função* ou *lei da função* ou, ainda, *fórmula matemática da função*

4) Numa rodovia, um carro mantém uma velocidade constante de 90 km/h. Veja a tabela que relaciona o tempo t (em horas) e a distância **d** (em quilômetros):

Tempo (h)	0,5	1	1,5	2	3	4	t
Distância (km)	45	90	135	180	270	360	90t

Observe que a distância percorrida é dada *em função* do tempo, isto é, a distância percorrida *depende* do intervalo de tempo. A cada intervalo de tempo considerado corresponde um único valor para a distância percorrida. Dizemos, então, que a distância percorrida é *função* do tempo e escrevemos:

distância = 90 · tempo

$d = 90t$

variável independente

variável dependente

Fonte: DANTE, 2005, p.45.

Conceituar função como uma máquina, ou seja, imaginar que uma função y = f(x) é uma *máquina* em que os elementos *x* são transformados nas imagens correspondentes *f(x)*, pode ser interessante, pois apresenta uma idéia dinâmica do conceito de função. Essa idéia aparece em alguns livros americanos de Cálculo Diferencial e Integral, utilizados em Universidades brasileiras. Podemos citar como exemplo os livros de Stewart (2002) e Edwards e Penney (1997).

No entanto, vale ressaltar, que a metáfora de função como sendo uma máquina não está presente nos Parâmetros Curriculares e nem nas Orientações Curriculares. É importante observar também, que embora o autor considere função como uma relação entre duas grandezas, nos exemplos e exercícios em que a função aparece como uma máquina, ele não explora a idéia de grandeza variável, trabalha somente com valores numéricos.

Após ter desenvolvido a idéia de função como uma relação de dependência entre duas grandezas variáveis, o autor apresenta “A noção de função via conjuntos” (p.47). Para isso, são dados quatro exemplos de relações entre dois conjuntos numéricos discretos, A e B, todas elas representadas por meio de diagramas de flechas e pelas respectivas “fórmulas”.

Nos dois exemplos em que as relações são funções de A em B, o autor adverte que: “todos os elementos de A têm correspondente em B; a cada elemento de A corresponde um único elemento de B” (p. 47 e 48). Após justificar em cada exemplo o fato da relação ser ou não uma função de A em B, o autor apresenta a seguinte definição: “Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in$ A a um único elemento $y \in$ B” (p.48).

Em seguida, são propostos exercícios com tarefas onde se pede para o aluno identificar quais os diagramas de flechas representam uma função de A em B, ou para que ele represente, por meio de diagramas de flechas, funções dadas por dois conjuntos A e B e por uma lei de correspondência. Segue as definições de domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função.

Mais adiante, o autor do LD-4 define função injetora, sobrejetora, bijetora e composta. É importante observar também, que os capítulos que antecedem o estudo de funções tratam de conjuntos e suas operações e de números reais. De acordo com os PCN+ (2002), toda essa linguagem excessivamente formal que cerca o conceito de função, juntamente com os conceitos citados acima, deveria ser deixada de lado.

Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos?

No fim do capítulo que trata do conceito de função, sob o título *Função e seqüências*, encontramos a seguinte afirmação no LD-4: “Uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto N^*, conjunto dos números naturais excetuandose o zero: f: $N^* \to R$ [...]” (p.71). Em seguida é apresentado o seguinte exemplo: ”[...] a função de N^* em R dada por f(x) = 3x determina a seqüência (3, 6, 9, 12,...) dos múltiplos positivos de 3” (p.71). O autor faz também alguns comentários sobre progressões aritmética e geométrica, e logo depois são propostos alguns exercícios sobre os temas abordados nessa seção, sendo que apenas um deles tem ligação com o conceito de função.

Portanto, além de não propor nenhuma tarefa envolvendo a generalização de regularidades em padrões geométricos, no capítulo referente ao conceito de função, as generalizações de regularidades em seqüências numéricas são pouco exploradas pelo LD-4.

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

No livro LD-4 são apresentadas situações ligadas ao cotidiano e à geometria que oferecem contextos interessantes para introduzir o conceito de função como uma relação de dependência entre duas grandezas variáveis. Além disso, na seção *Análise de gráficos*, são propostas situações nas quais o conceito de função está relacionado à Física, à Geografia e à Economia, por meio de representações gráficas. Na seção *Gráfico de uma função*, os autores apresentam dois tópicos de geometria analítica: distância entre dois pontos e equação de uma circunferência, porém sem nenhuma ligação com o conceito de função.

Vale ressaltar que, no capítulo seguinte, que trata do estudo das funções do 1º grau, existem duas seções que relacionam, respectivamente, a função afim com a geometria analítica e com a Física (movimento uniforme).

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o *procedimento global das propriedades da figura-forma*, ou somente os *procedimentos por pontos* e *por extensão do traçado efetuado*?

Sob o título *Construção de gráficos de funções*, o autor do LD-4 começa definindo gráfico de uma função como um conjunto de pares ordenados (x, f(x)), e em seguida explica as técnicas para esboçar o gráfico de uma função:

> *Para construir o gráfico de uma função dada por y = f(x), com x ∈ D(f), no plano artesiano, devemos: construir uma tabela com valores de x escolhidos convenientemente no domínio D e com valores correspondentes para y = f(x); a cada par ordenado (x, y) da tabela associar um ponto do plano cartesiano; marcar um número suficiente de pontos até que seja possível esboçar o gráfico da função.* (DANTE, 2005, p.56).

A técnica descrita acima é o que Duval (1988, *apud* MARIANI, 2006) chama de procedimentos *por pontos e por extensão de um traçado efetuado*, isto é, pontos obtidos em uma tabela por substituição na expressão algébrica da função, de valores arbitrários, normalmente inteiros, são marcados no plano cartesiano para que em seguida o gráfico possa ser traçado por meio da união desses pontos. Segundo o autor, nesse modo de construção de gráficos o aluno não consegue relacionar o gráfico e a expressão algébrica correspondente, pois não há congruência semântica entre um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente.

É importante mencionar também que, na seção sobre a construção de gráficos, o autor mostra como podemos determinar o domínio e o conjunto imagem de uma função a partir do seu gráfico, e ainda como reconhecer se um gráfico cartesiano representa ou não uma função.

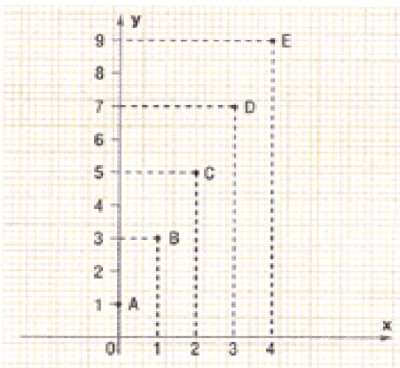
No capítulo destinado à introdução do conceito de função, o procedimento *global das propriedades da figura-forma* não é adotado no LD-4. Porém, no capítulo seguinte, que trata do estudo das funções do 1º grau, esse critério está presente. É importante salientar, que esse tipo de procedimento para o esboço de curvas, supõe que o aluno deve levar em conta a variáveis visuais dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.) e os coeficientes da expressão algébrica correspondente. Assim ele será capaz de perceber, que mudanças nos coeficientes da expressão algébrica implicam em mudanças no gráfico da função e vice-versa. Por isso é importante que a *conversão* ocorra nos dois sentidos, pois o treinamento efetuado somente no sentido expressão algébrica → gráfico, por meio da associação de pares de números a pontos correspondentes no plano cartesiano, não permite uma apreensão global e qualitativa por parte do aluno (DUVAL, 2003).

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação *discreto/contínuo* é explicitada satisfatoriamente?

Após explicar as técnicas para a construção de gráficos por pontos e por extensão de um traçado efetuado, o autor apresenta exemplos de gráficos de funções representados por pontos isolados e por linhas contínuas, conforme podemos ver nos exemplos 1 e 2, a seguir, extraídos do LD-4:

1) Vamos construir o gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 1$, sendo o domínio $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

x	y = f(x) = 2x + 1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

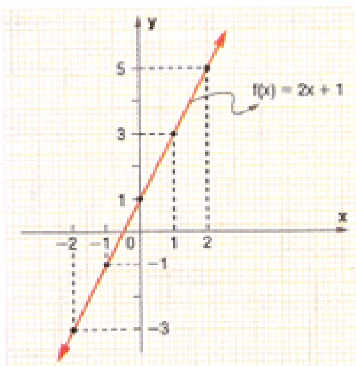


Nesse caso, o gráfico da função é o conjunto dos pontos A, B, C, D e E.

2) Vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$.
Como, neste caso, $D = \mathbb{R}$, vamos escolher alguns valores arbitrários de **x**:

x	y = f(x) = 2x + 1
−2	−3
−1	−1
0	1
1	3
2	5

Agora, o gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y), com **x** real e $y = 2x + 1$, resultando na reta da figura ao lado.



Para Refletir

Os matemáticos já provaram que, quando temos y igual a um polinômio do 1º grau da forma ax + b, o gráfico é sempre uma reta. Como dois pontos determinam uma reta, basta marcar apenas dois pontos para traçá-la. Veremos isso no próximo capítulo.

Fonte: DANTE, 2005, p.56-57.

Entendemos que, as explicações dadas pelo autor do LD-4 nos exemplos mostrados acima, não são suficientes para esclarecer a passagem do discreto ao contínuo, ou seja, no caso do segundo exemplo, os pares ordenados (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3) e (2, 5) são marcados no plano cartesiano e, em seguida, são conectados por uma linha contínua, sem uma justificativa adequada sobre a representatividade do gráfico nos trechos em que os pontos não foram de fato calculados. Ao contrário, na nota ao lado do gráfico do exemplo 2, acima, o autor comenta que os matemáticos já provaram que o gráfico de uma função do tipo y = ax +b é uma reta.

Além disso, não é apresentado nenhum exemplo envolvendo a relação entre grandezas discretas e contínuas, na construção de gráficos, para que o aluno possa perceber o que ocorre nos dois casos, de forma intuitiva.

Critério 6 – Quando se trata da articulação entre os registros de representação gráfico e algébrico, são propostas atividades constituídas por tarefas que tratam *dos dois sentidos da conversão*?

No capítulo que trata do conceito de função, as conversões efetuadas nos exemplos e as solicitadas nos exercícios propostos no LD-4 seguem o seguinte padrão: tabela → expressão algébrica; língua natural → expressão algébrica; língua natural → tabela → expressão algébrica; expressão algébrica → gráfico. Com relação à conversão entre as representações gráfica e algébrica, o LD-4 apresenta um único exercício em que se pede para representar algebricamente uma função a partir de sua representação gráfica, o que é muito pouco, dada a importância que a articulação entre esses dois registros de representação semiótica tem para o estudo de funções. Entretanto, no capítulo seguinte, destinado ao estudo de funções do 1º grau, são propostas tarefas em que a conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico é solicitada nos dois sentidos.

Observamos ainda que nos exercícios propostos, relativos ao conceito de função, priorizam-se os tratamentos e não nas conversões (cerca de 60% dos exercícios não solicitam nenhum tipo de conversão). É importante destacar que, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica, as conversões das representações devem ter prioridade porque são elas que garantem a apreensão dos objetos matemáticos, e não os tratamentos.

4.5. Livro Didático 5 (LD-5) - Matemática. 1ª série do Ensino Médio. Smole e Diniz (2004).

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

Sob o título *Relações entre grandezas: funções*, as autoras do LD-5 iniciam o capítulo que trata do conceito de função pela seção *como se localizar*.

Utilizando situações do dia-a-dia, como por exemplo, guia para localização de ruas, as autoras fazem referência à História da Matemática, citando Apolônio de Perga e René Descartes, para em seguida definir o *sistema cartesiano ortogonal.*

Mais adiante elas apresentam o gráfico mostrado na Figura 10, extraído do jornal Folha de São Paulo, que mostra a participação do carro a álcool no mercado nacional, no período de 1983 a 2001, para, em seguida introduzir o conceito de função como uma relação entre duas grandezas:

> *"O gráfico acima representa uma função que relaciona a participação do carro a álcool no mercado brasileiro em um certo intervalo de tempo.*
> *A **função** é um modo especial de relacionar grandezas. Nesse tipo de relação, duas grandezas, **x** e **y**, se relacionam de tal forma que:*
> - ***x** pode assumir qualquer valor em um conjunto **A** dado;*
> - *a cada valor de **x** corresponde um único valor de **y** em um dado conjunto **B**;*
> - *os valores que **y** assume dependem dos valores assumidos por **x**.* (SMOLE e DINIZ, 2004, p.81, grifos das autoras).

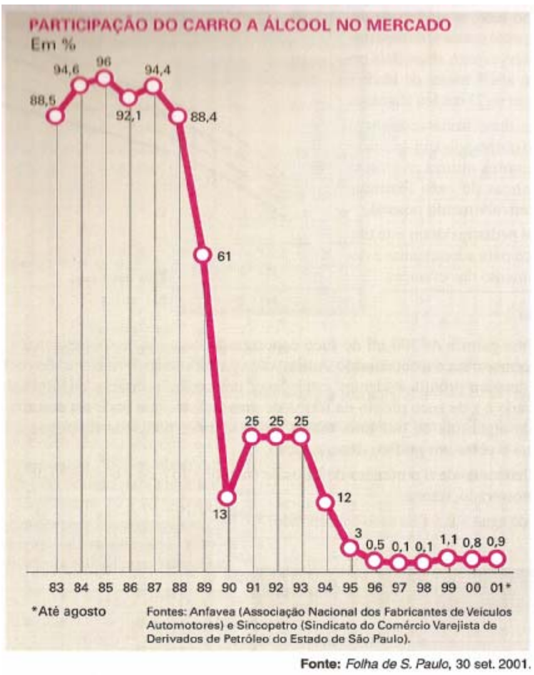
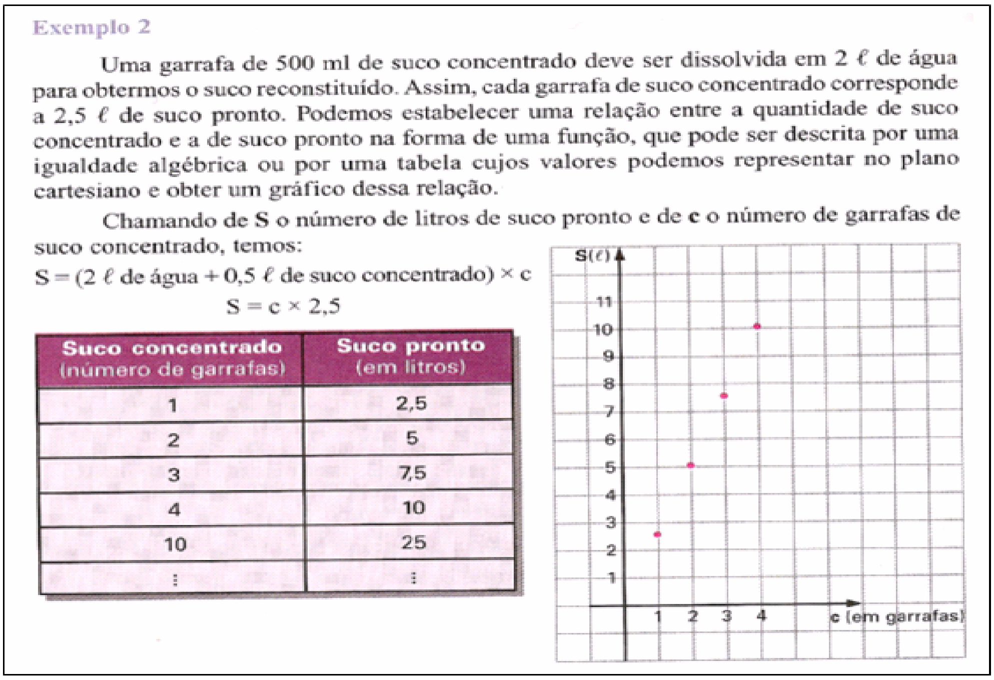


Figura 10: Gráfico da participação do carro a álcool no mercado brasileiro. **Fonte:** SMOLE e DINIZ, 2004, p.81.

Em seguida, são apresentados quatro exemplos, envolvendo situações do cotidiano, nas quais o conceito de função está ligado à relação de dependência entre duas grandezas, conforme podemos ver no exemplo a seguir, extraído do LD-5 (p.82):



Exemplo 2

Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 2 ℓ de água para obtermos o suco reconstituído. Assim, cada garrafa de suco concentrado corresponde a 2,5 ℓ de suco pronto. Podemos estabelecer uma relação entre a quantidade de suco concentrado e a de suco pronto na forma de uma função, que pode ser descrita por uma igualdade algébrica ou por uma tabela cujos valores podemos representar no plano cartesiano e obter um gráfico dessa relação.

Chamando de **S** o número de litros de suco pronto e de **c** o número de garrafas de suco concentrado, temos:

$S = (2\ \ell \text{ de água} + 0{,}5\ \ell \text{ de suco concentrado}) \times c$

$S = c \times 2{,}5$

Suco concentrado (número de garrafas)	Suco pronto (em litros)
1	2,5
2	5
3	7,5
4	10
10	25
⋮	⋮

Fonte: SMOLE e DINIZ, 2004, p.82.

Conforme podemos ver no exemplo anterior, ao contrário da abordagem tradicional, a introdução do conceito de função é feita a partir de situações-problema, contextualizadas, envolvendo a relações de dependência entre duas grandezas.

As autoras mostram também um contra-exemplo de função, para advertir que nem sempre uma relação entre duas grandezas é uma função, e definem domínio, contradomínio e imagem de uma função.

Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos?

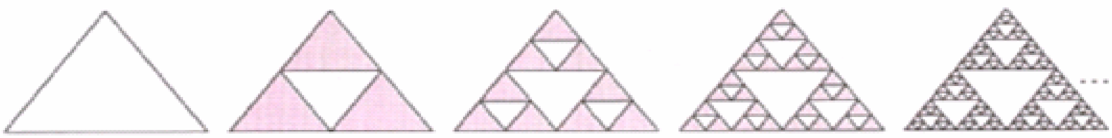
Além dos exemplos envolvendo situações do cotidiano para mostrar a relação de dependências entre grandezas variáveis, as autoras do LD-5 apresentam o seguinte exemplo, para mostrar que alguns padrões geométricos também podem estar relacionados com o conceito de função:

Exemplo 5

Alguns padrões geométricos também podem estar relacionados com funções. O que vamos descrever é conhecido como **tapete de Sierpinski** e é construído a partir de uma regra que se repete indefinidamente.

Tudo começa com um triângulo eqüilátero, dividido em 4 triângulos eqüiláteros congruentes, cujo triângulo do centro é desconsiderado, restando dessa forma apenas 3 triângulos eqüiláteros.

Repete-se a divisão de cada triângulo restante em 4 triângulos eqüiláteros congruentes, como mostra o desenho, desconsiderando sempre o triângulo do centro.



O número de triângulos que compõem o tapete em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção?

Etapa	1	2	3	4	...
Número de triângulos	1	3	9	27	...

Quantos triângulos haverá na décima etapa da construção do tapete?
É possível desenhar tantos triângulos?

Fonte: SMOLE e DINIZ, 2004, p.84.

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

No LD-5 são propostas diversos problemas ligados ao cotidiano, à Física, à Geografia, à Economia e à geometria, permeados de formas gráficas, em contextos importantes para o trabalho com a variação e dependência de grandezas.

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o *procedimento global das propriedades da figura-forma*, ou somente os *procedimentos por pontos* e *por extensão do traçado efetuado*?

Na seção *Gráfico de função*, as autoras do LD-5 definem o gráfico de uma função como “o conjunto dos pontos (x, f(x)) de um plano cartesiano” (p.90). Em seguida após a apresentação e análise de um gráfico, elas fazem o seguinte comentário:

> *Conforme já vimos, também podemos representar uma função por meio de uma tabela de valores ou, em alguns casos, de uma fórmula do tipo y = f(x), mas, na maior parte dos casos, o gráfico permite uma análise mais detalhada da função representada e revela informações que seriam menos perceptíveis em uma fórmula ou tabela.* (SMOLE e DINIZ, 2004, p.90).

Na seqüência, os procedimentos para a construção de gráficos de funções são apresentados nos seguintes termos:

> *Estudamos anteriormente como localizar pontos e construir gráficos num* ***referencial cartesiano****. Esse será o tipo de gráfico que mais usaremos para estudar funções.*
> *Para representar graficamente uma função, devemos: fixar um referencial cartesiano; fazer uma tabela de dupla entrada, com números que satisfaçam à equação y = f(x), onde x $\in$ D(f); localizar no referencial os pontos associados aos pares ordenados.* (SMOLE e DINIZ, 2004, p.91).

Em seguida, são dados exemplos, para mostrar os procedimentos explicados anteriormente. Assim, podemos notar que os procedimentos adotados no LD-5 para a construção de gráficos, correspondem aos que Duval (1988, *apud* MARIANI, 2006) chama de *procedimentos por pontos e por extensão de um traçado efetuado*, conforme já mencionamos anteriormente. As autoras apresentam também exercícios resolvidos em que o teste da reta vertical é aplicado para identificar gráficos de funções.

Embora o *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma* não tenha sido adotado no LD-5, no capítulo destinado à introdução do conceito de função, é importante salientar que no capítulo seguinte, que trata do estudo das funções polinomiais do 1º grau, as autoras não só utilizam como também explicitam esse tipo de procedimento, mostrando que modificações nos coeficientes da expressão algébrica de uma função, provocam mudanças visuais em sua representação gráfica.

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação *discreto/contínuo* é explicitada satisfatoriamente?

Tanto nos exemplos utilizados para introduzir o conceito de função, quanto na seção destinada à construção de gráficos de funções, as autoras procuram deixar claro o fato de se unir ou não os pontos do gráfico, conforme pode ser visto nos exemplos abaixo, extraídos do LD-5:

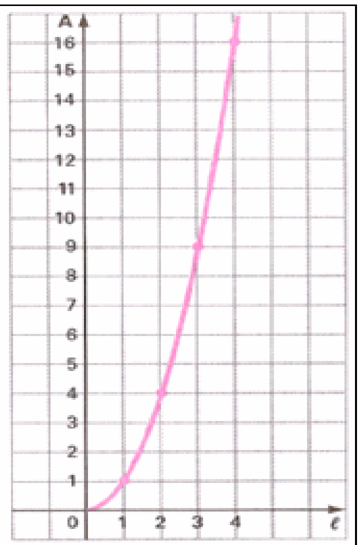
Exemplo 3

A área de um quadrado depende da medida de seu lado. Se o lado mede 1, a área é 1; se o lado mede 5, a área é 25; se o lado mede ℓ, então a área é $A = \ell^2$.

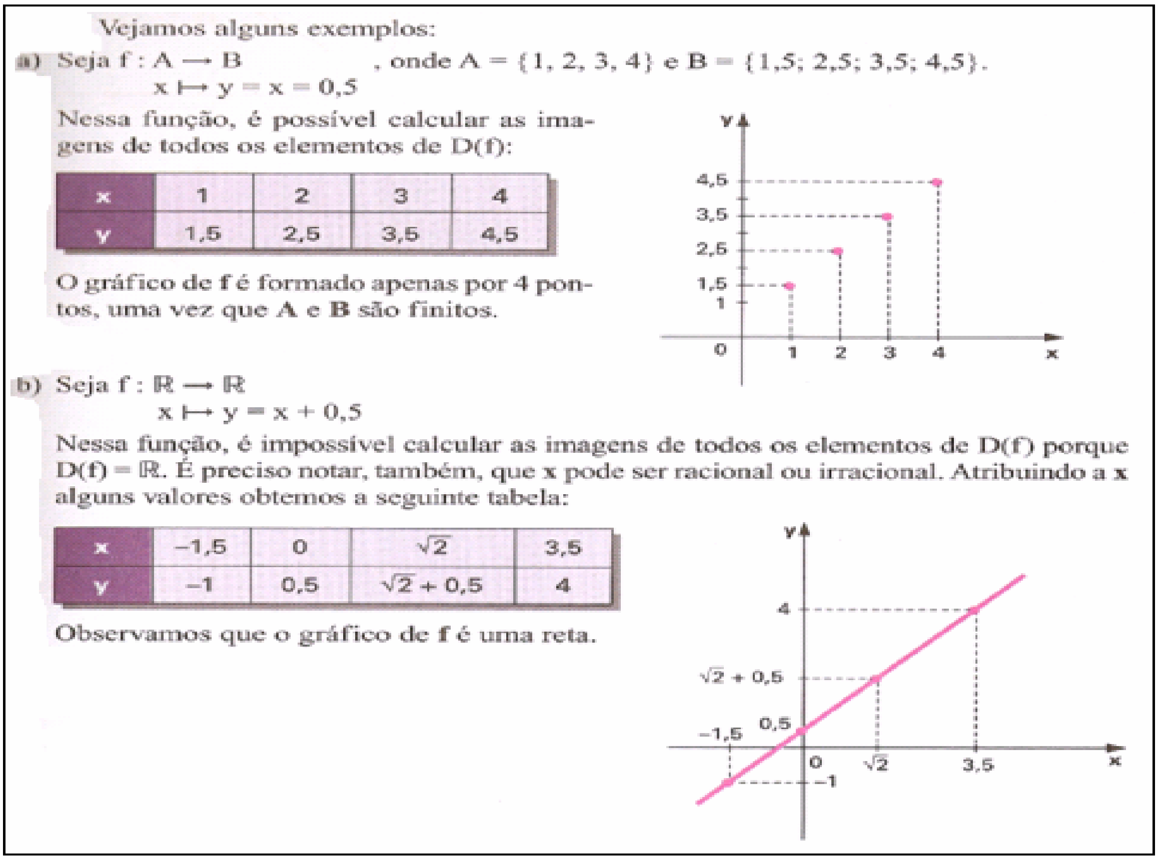
Neste caso, podemos também esboçar um gráfico usando o plano cartesiano, onde vamos marcar no eixo horizontal os valores de ℓ e no vertical os valores correspondentes da área A.

Observe que a tabela pode ser construída atribuindo-se para ℓ qualquer valor real positivo e a partir dela ser traçado o gráfico como uma linha contínua. O mesmo não pode ser feito no exemplo anterior, pois o número de garrafas só pode ser um número natural.

ℓ	A
1	1
2	4
3	9
4	16
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3,48	12,1104
4,2	17,64
5	25
⋮	⋮



Fonte: SMOLE e DINIZ, 2004, p.83.



Vejamos alguns exemplos:

a) Seja $f : A \longrightarrow B$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1{,}5; 2{,}5; 3{,}5; 4{,}5\}$.
$x \longmapsto y = x = 0{,}5$

Nessa função, é possível calcular as imagens de todos os elementos de D(f):

x	1	2	3	4
y	1,5	2,5	3,5	4,5

O gráfico de f é formado apenas por 4 pontos, uma vez que A e B são finitos.

b) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto y = x + 0{,}5$

Nessa função, é impossível calcular as imagens de todos os elementos de D(f) porque $D(f) = \mathbb{R}$. É preciso notar, também, que x pode ser racional ou irracional. Atribuindo a x alguns valores obtemos a seguinte tabela:

x	−1,5	0	$\sqrt{2}$	3,5
y	−1	0,5	$\sqrt{2} + 0{,}5$	4

Observamos que o gráfico de f é uma reta.

Fonte: SMOLE e DINIZ, 2004, p.91.

Critério 6 – Quando se trata da articulação entre os registros de representação gráfico e algébrico, são propostas atividades constituídas por tarefas que tratam *dos dois sentidos da conversão*?

As seguintes conversões são efetuadas nos exemplos ou solicitadas em exercícios propostos no LD-5, no capítulo que introduz o conceito de função: Língua natural → expressão algébrica; tabela → expressão algébrica; expressão algébrica → gráfico. No que diz respeito à conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico, o sentido expressão algébrica → gráfico é privilegiado, ou seja, não são propostas tarefas envolvendo os dois sentidos da conversão – somente no capítulo seguinte, sobre funções do 1º grau, são propostas algumas tarefas em que a conversão no sentido gráfico → expressão algébrica é solicitada. Outro aspecto negativo que observamos no livro LD-5 é que os tratamentos predominam sobre as conversões (em cerca de 60% dos exercícios propostos não é pedido nenhum tipo de conversão).

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo investigar a abordagem de função adotada em alguns livros didáticos atuais da Educação Básica, buscando verificar quais são as estratégias utilizadas pelos autores desses livros para apresentar a noção de função.

Utilizando a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, como referencial teórico, analisamos os procedimentos utilizados na construção de gráficos de funções, como é feita a passagem do discreto ao contínuo, e a articulação dos registros, particularmente a conversão entre os registros gráfico e algébrico.

Inicialmente faremos uma análise comparativa dos resultados, com o objetivo de identificar aspectos convergentes e divergentes nas estratégias adotadas nos livros didáticos, em relação às nossas questões de pesquisa, e, em seguida, apresentaremos as considerações finais de nosso trabalho.

Análise comparativa dos resultados

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

Com exceção do livro didático LD-1, a noção de função é desenvolvida a partir de situações-problema sobre variação e dependência de grandezas.

O LD-1 inicia o capítulo sobre funções com uma apresentação intuitiva do conceito de função que se resume ao exemplo de como a velocidade de um atleta varia em função do tempo. No entanto, em vez de explorar essa situação, que poderia levar ao conceito de função como correspondência ou dependência entre grandezas, o autor subitamente opta por trabalhar com o conceito de relação, gráficos de relações representadas por conjuntos finitos de pares ordenados, diagramas de flechas, para depois definir função como um caso particular de relação. Neste capítulo, somente três dos 18 exercícios apresentados no LD-1, abordam o conceito de função como uma dependência entre grandezas. A maioria dos exercícios limita-se à aplicação de regras, e as situações-problemas são pouco presentes na obra.

Em nossa opinião, além de formalista, a idéia de função como um conjunto particular de pares ordenados tem um caráter estático que se opõe à idéia intuitiva de função como dependência, variação ou resultado de movimento (como ocorre na Física).

Os autores dos livros didáticos LD-3 e LD-4 começam o capítulo sobre funções apresentando a noção de correspondência entre duas variáveis por meio de situações-problema contextualizadas, no entanto, já na 2ª seção de ambos os livros, este tratamento é substituído por uma abordagem mais formal, via conjuntos, com vários exercícios de manipulações, como, por exemplo, os que pedem para calcular o valor numérico de funções, para determinar o domínio de funções definidas por expressões algébricas, que se identifiquem os diagramas de flechas que representam funções, que se construam diagramas de flechas para decidir se uma relação é uma função.

Embora os autores não tenham exagerado no formalismo, entendemos que o desenvolvimento da idéia de função por este caminho constitui um tratamento artificial que pode, inclusive, não fazer nenhum sentido para o aluno. Assim, em nossa opinião, essa parte poderia ser suprimida, sem prejuízo para o entendimento do aluno.

Nos livros didáticos LD-2 e LD-5, a idéia de função é apresentada por meio de vários exemplos para expressar a relação de dependência entre duas grandezas variáveis, do modo como ocorre na Matemática, nas ciências em geral e no cotidiano, sem apelar para o formalismo da teoria dos conjuntos.

Esta forma de apresentar a idéia de função, que inclusive é recomendada por todos os documentos oficiais que consultamos, tem como premissa que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando é colocado em situação de resolução de problemas.

Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou em padrões geométricos?

O livro didático LD-3 é o único que não propõe nenhuma tarefa envolvendo a generalização de regularidades em contextos numéricos ou geométricos, no capítulo sobre funções.

O livro LD-1 apresenta um único exercício em que se pede para escrever uma fórmula a partir da observação de regularidades em um padrão geométrico. No livro didático LD-2 são propostas situações que incentivam o aluno a formular generalizações em contextos numéricos e geométricos. Embora o livro didático LD-4 não apresente nenhuma tarefa envolvendo a generalização de regularidades em padrões geométricos, na seção *funções e seqüências* o autor destaca que algumas seqüências numéricas podem estar relacionadas com função, e apresenta um exemplo e um exercício ligados ao assunto. Já o livro LD-5 apresenta um exemplo para mostrar que alguns padrões geométricos também podem estar relacionados com funções.

Em nossa opinião, a investigação de padrões em contextos numéricos e geométricos, o reconhecimento de regularidades, e a generalização por meio de regras que os próprios alunos podem formular, permitem que a aprendizagem da álgebra, e em particular do conceito de função, se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração, que é essencial para a compreensão do conceito de função. Entretanto, constatamos que pouca ênfase foi dada a esse recurso nos livros didáticos que analisamos.

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

A articulação entre os campos matemáticos e as conexões com outras áreas do conhecimento, são pouco exploradas nos livros didáticos LD-1 e LD-3. No LD-1, a articulação entre os campos matemáticos não está presente em nenhuma parte do capítulo destinado à introdução do conceito de função. Por outro lado, as conexões com outras áreas do conhecimento se restringem ao seguinte comentário do autor: “as funções são a linguagem do movimento na Matemática, na Física e em outras ciências”, e à representação gráfica da velocidade de um atleta em função do tempo, que aparecem no início do capítulo. Já no LD-3, as conexões com outras áreas estão presentes somente em um exercício, e em alguns testes de vestibular. Em relação às articulações internas à própria Matemática, o LD-3 propõe apenas um exercício, em que o conceito de função é utilizado para descrever situações de dependência entre duas grandezas, em conexão com a geometria plana.

Nos livros didáticos LD-2, LD-4 e LD-5, no capítulo que trata da introdução ao conceito de função, a articulação entre os campos matemáticos manifesta-se em diversas atividades em que se observam conexões bem feitas entre funções e geometria plana, funções e geometria analítica, funções e progressões, etc.. São freqüentes, também, ao longo do capítulo que trata do conceito de função, nas três obras, as conexões deste conceito com outras áreas do conhecimento, em atividades muitas vezes permeadas por representações gráficas que relacionam a Matemática com a Física, a Economia, a Geográfica, a Biologia e a Química.

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o *procedimento global das propriedades da figura-forma*, ou somente os *procedimentos por pontos* e *por extensão do traçado efetuado*?

Os livros LD-1 e LD-3 não utilizam o *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma* no capítulo destinado à introdução do conceito de função, e nem no capítulo seguinte que trata do estudo de funções do 1º grau.

Após comentar que uma relação pode ser representada graficamente, localizando-se os elementos do domínio no eixo *x* e os da imagem, no eixo *y*, o autor do livro LD-1 simplesmente apresenta os gráficos de três relações representadas por conjuntos de pares ordenados de números inteiros, ou seja, além da pouca ênfase dada às representações gráficas, que são de fundamental importância para o estudo de funções, o autor utiliza somente o *procedimento por pontos* na construção de gráficos.

Já no livro LD-3 os autores utilizam os procedimentos de construção de gráficos *por pontos* e por *extensão de um traçado efetuado*, isto é, utilizam uma tabela em que alguns valores inteiros são atribuídos à variável independente, e por intermédio da substituição desses valores na expressão algébrica da função são obtidos pontos, que posteriormente são localizados no plano cartesiano para a construção do gráfico por meio da junção desses pontos. Para uma nova função, mesmo pertencendo à mesma família de curvas, todo esse processo é repetido, sem que se estabeleça qualquer relação com algum outro gráfico. Esse procedimento, de esboçar individualmente cada gráfico, impossibilita que o aluno perceba que modificações na expressão algébrica provocam modificações no gráfico. Por isso, nas atividades com gráficos, é importante que se utilize também o *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma*.

Nos livros LD-2, LD-4 e LD-5, ao longo do capítulo que trata do conceito de função, são apresentadas diversas situações em que se pede para o aluno construir o gráfico da função correspondente utilizando os *procedimentos* *por pontos e por extensão de um traçado efetuado*. Inclusive os autores dos livros LD-4 e LD-5 explicam, passo a passo, como construir o gráfico de uma função utilizando esses dois procedimentos, conforme já mencionamos anteriormente. Entretanto, nesses três livros, as atividades que envolvem gráficos de funções não se limitam apenas aos *procedimentos por pontos e por extensão de um traçado efetuado*. No livro LD-2, por exemplo, são propostas tarefas que possibilitam a percepção, por parte do aluno, que modificações nos coeficientes da expressão algébrica da função são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa. Acreditamos que essa percepção além de uma grande economia na atividade de esboço de curvas, pode promover uma aprendizagem mais significativa das representações gráficas.

Embora os livros LD-4 e LD-5 não utilizem, no capítulo referente ao conceito de função, o *procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma*, no capítulo seguinte, sobre função afim, são apresentadas explicações e atividades que promovem a necessária associação entre as variáveis visuais das representações gráficas e os coeficientes das expressões algébricas, que é fundamental para uma apreensão global e qualitativa das representações gráficas.

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação *discreto/contínuo* é explicitada satisfatoriamente?

No LD-1, no capítulo dedicado ao conceito de função, os gráficos formados por um traçado contínuo estão ausentes, já que as poucas representações gráficas apresentadas se referem a conjuntos finitos de pares ordenados (relações) ou a funções cujos domínios são conjuntos de números inteiros contendo, no máximo, seis elementos. Mesmo no capítulo seguinte, que trata do estudo das funções de 1º grau, não existe nenhum comentário sobre o fato de se unir ou não os pontos marcados em um plano cartesiano para representar o gráfico de uma função.

Já os livros LD-3 e LD-4 apresentam exemplos de gráficos de funções nos casos em que o domínio é formado por um conjunto finito de números inteiros ou por subconjuntos dos números reais, ou seja, gráficos formados por pontos isolados, no plano cartesiano, e gráficos em que os pontos são ligados formando um traçado contínuo. No entanto, a passagem do discreto ao contínuo, além de ser feita de maneira bastante automática – consideram-se alguns pares (x, y) de números inteiros em uma tabela em que y = f(x), sua localização no plano cartesiano e a construção de uma curva contínua ligando esses pontos – não há uma explicação satisfatória sobre o que acontece com os valores intermediários aos que foram previamente escolhidos. Além disso, não são propostas situações-problema envolvendo grandezas discretas e contínuas, que possibilitem ao aluno perceber, de forma intuitiva, quando o gráfico de uma função é representado por pontos isolados ou uma curva contínua.

Nos livros LD-2 e LD-5 são apresentadas situações reais, envolvendo grandezas discretas e grandezas contínuas, em que são construídos os respectivos gráficos (por pontos e por extensão de um traçado efetuado), acompanhados de explicações para justificar o fato de se unir ou não os pontos marcados no plano cartesiano, ou seja, sobre a representatividade do gráfico nos intervalos em que os pontos não foram calculados. Dessa forma, acreditamos que o aluno possa, intuitivamente, refletir sobre as ações de calcular, marcar e ligar pontos, interiorizando estas ações num processo cognitivo de considerar todos os pontos (x, f(x)) (no caso do domínio da função ser representado por uma grandeza contínua) para desenhar a curva que represente esse conjunto de pontos.

Critério 6 – Quando se trata da articulação entre os registros de representação gráfico e algébrico, são propostas atividades constituídas por tarefas que tratam *dos dois sentidos da conversão*?

Nos cinco livros analisados, as conversões entre registros de representação solicitadas na maior parte dos exercícios seguem o seguinte padrão: língua natural $\rightarrow$ tabela $\rightarrow$ expressão algébrica; expressão algébrica $\rightarrow$ tabela $\rightarrow$ gráfico.

Nos exemplos e nos exercícios propostos nos livros didáticos LD-1, LD-3, LD-4 e LD-5, no capítulo destinado ao conceito de função, as conversões entre os registros de representação gráfico e algébrico são efetuadas (nos exemplos) ou solicitadas (nos exercícios) sempre no mesmo sentido (expressão algébrica $\rightarrow$ gráfico), com exceção de um único exercício proposto no LD-4, em que se pede para representar algebricamente uma função a partir de seu gráfico. Além disso, os autores desses livros utilizam sempre os procedimentos por pontos e por extensão de um traçado para passar da expressão algébrica de uma função à sua representação gráfica, ou seja, consideram alguns pares (x, y) de números, geralmente inteiros, em uma tabela em que y = f(x), sua localização no plano cartesiano e a construção do gráfico por meio da união desses pontos.

Quando um estudante está limitado a executar este tipo de procedimento ao ser solicitado a esboçar o gráfico de uma função a partir de sua representação algébrica, ele pode considerar um gráfico como sendo uma "receita de construção" e pode reconhecer somente os pontos que ele marcou a partir de uma tabela de valores como pertencente ao gráfico, ou seja, essa regra não permite uma apreensão global e qualitativa das representações gráficas, permite somente uma leitura pontual. (DUVAL, 2003). Por outro lado, o fato da conversão ocorrer sempre no mesmo sentido pode levar o aluno a confundir o objeto matemático *função* com sua representação.

É importante ressaltar também que nos exercícios propostos, nesses quatro livros, as tarefas envolvendo somente tratamentos (cerca de 60%) predominam sobre as tarefas que solicitam algum tipo de conversão (cerca de 40%). No entanto, do ponto de vista cognitivo, é a articulação dos registros que conduz à compreensão em matemática, e não somente os tratamentos necessários em cada representação, por isso, "é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos". (DUVAL, 2003).

Já no livro didático LD-2 priorizam-se as conversões e não os tratamentos (em cerca de 80% dos exercícios propostos pede-se para o aluno realizar algum tipo de conversão). Com relação à conversão entre os registros gráfico e algébrico, são apresentadas atividades em que o aluno é solicitado a mudar do registro algébrico de uma função para o registro gráfico e vice-versa, ou seja, a conversão é requerida nos dois sentidos. Além disso, algumas situações propostas no LD-2 permitem que o aluno perceba que modificações na expressão algébrica da função provocam mudanças no gráfico e vice-versa. Dessa forma o estudante pode gerar uma imagem metal das variáveis visuais da representação gráfica e das unidades significativas da escrita algébrica para situar uma dada função no contexto de uma família de funções e esboçar o seu gráfico a partir do gráfico de um membro típico da mesma, de forma mais econômica. Por exemplo, o aluno pode entender que o gráfico da função representada pela expressão algébrica $y = x^2 + 3$ pode ser construído a partir do gráfico de $y = x^2$ realizando uma translação vertical de 3 unidades.

Considerações finais

Com base nas analises dos livros didáticos, destacamos a seguir, os principais resultados de nossa pesquisa.

Em relação à primeira questão de pesquisa: Qual é a abordagem de função adotada atualmente em livros didáticos de Matemática da Educação Básica?

Constatamos que a maioria dos livros analisados adota como ponto de partida para a construção do conceito de função a exploração da relação de dependência entre grandezas por meio da resolução de problemas. No entanto, percebemos que ainda existe uma certa preocupação de alguns autores com o conceito formal de função como um caso particular de relação.

Ressaltamos que, nem a abordagem puramente mecanicista nem a perspectiva tipicamente estruturalista da Matemática Moderna são consideradas opções adequadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática hoje em dia.

Por outro lado, a resolução de problemas contrapõe-se e vai além do modelo tradicional (definição $\rightarrow$ exemplos $\rightarrow$ exercícios de aplicação), na medida em que oferece ao aluno a possibilidade de formular hipóteses, construir estratégias de resolução e argumentação, relacionar diferentes conhecimentos e validar seus procedimentos. Entretanto, embora os exercícios do tipo: “calcule...”, “resolva...” etc., não sejam suficientes para uma aprendizagem significativa, isto não quer dizer que eles devam ser eliminados, pois são importantes para o aprendizado de técnicas e propriedades.

Outro aspecto importante que observamos nos livros analisados foi o cuidado com a contextualização e a interdisciplinaridade. Na maioria dos livros, muitas atividades são apresentadas a partir de situações significativas que valorizam as práticas sociais, as articulações internas à própria Matemática e as conexões com outras áreas do conhecimento. Porém, pouca ênfase é dada ao trabalho com padrões generalizáveis, que pode ajudar a desenvolver a idéia de relação funcional e a capacidade de abstração do aluno.

Diante das considerações anteriormente levantadas podemos concluir que a abordagem adotada pela maioria dos livros didáticos analisados está de acordo com as orientações didáticas sugeridas nos PCN (BRASIL, 1998), nos PCNEM (BRASIL, 1999), nos PCN+ (BRASIL, 2002) e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006).

Segundo esses documentos a aprendizagem de um novo conceito matemático deve começar pela apresentação de situações-problema que façam sentido para o aluno e que permitam conexões dentro e fora da Matemática, ou seja, o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade. Não se trata aqui, de analisar as tendências do ensino da Matemática com base em tais orientações, mas, sobretudo, caracterizar o que existe em comum nos livros analisados e nesses documentos.

Em relação à nossa segunda questão de pesquisa: Na construção de gráficos, os detalhes sobre a passagem do discreto ao contínuo são explicitados satisfatoriamente?

Observamos que a passagem do discreto ao contínuo, no tratamento de gráficos de funções, é feita de maneira bastante automática e insuficiente na maioria dos livros didáticos que analisamos. A idéia de que é suficiente obter alguns pares (x, y) de números inteiros, em uma tabela, em que y = f(x), sua localização no plano cartesiano e o desenho de um traçado contínuo ligando esses pontos, sem se discutir a representatividade do gráfico nos intervalos em que os pontos não foram calculados, aparece com bastante freqüência.

No entanto, é importante destacar que nos livros LD-2 e LD-5 são apresentadas situações, em contextos familiares para o aluno, em que a relação discreto/contínuo pode ser percebida de forma intuitiva, ou seja, os autores destes livros apresentam uma situação de dependência entre duas grandezas variáveis, em que a variável independente é discreta e, em seguida, apresentam outra situação em que a variável independente é contínua, para mostrar que o gráfico de uma função pode ser representado por pontos isolados ou por extensão de um traçado ligando esses pontos.

Algumas dificuldades com relação a esse assunto são previsíveis, como, por exemplo, o entendimento da densidade do conjunto dos números reais. No entanto, acreditamos que para amenizar esta dificuldade, além do procedimento utilizado na construção de gráficos de funções, é preciso considerar o contexto do problema, ou seja, se a situação é familiar ou abstrata para os alunos. Assim, problemas de Física envolvendo as idéias de posição e velocidade instantânea, e da continuidade do movimento podem ajudar na compreensão da linearidade dos gráficos.

Em relação a terceira e última questão de pesquisa: Quando se trata da articulação entre os registros gráfico e algébrico, em relação à representação do objeto matemático *função*, são propostas tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão?

De acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, para que a aprendizagem de um objeto Matemática se realize é necessário que o sujeito utilize diferentes registros de representação desse objeto. Entretanto, segundo o autor, a diversidade de registros por si só, não garante a compreensão em Matemática. Do ponto de vista cognitivo é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão em Matemática.

Assim, a compreensão da noção de função está ligada á capacidade de identificar a mesma função em representações distintas, de forma que o indivíduo não confunda o objeto *função* com sua representação. Esta capacidade implica que os alunos sejam capazes de se mover de uma representação para outra, usando língua natural, tabelas, gráficos ou expressões algébricas.

Entretanto, as análises dos livros didáticos revelaram uma ênfase desproporcional em relação às questões que envolvem os tratamentos e as conversões. Com exceção do livro LD-2, os exercícios propostos envolvendo tratamentos predominam sobre os que solicitam algum tipo de conversão, por outro lado um sentido de conversão é privilegiado.

Constatamos que somente no livro LD-2 a conversão entre os registros gráfico e algébrico é requerida nos dois sentidos, no capítulo destinado à introdução do conceito de função. Os demais livros privilegiam um único sentido de conversão (expressão algébrica $\rightarrow$ gráfico). Este fato corrobora o pressuposto de Duval (2003), de que “no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente trinando a conversão no outro sentido”. Além disso, a forma como esta questão é apresentada, focalizando-se apenas os procedimentos por pontos e por extensão de um traçado, pode levar o aluno a ter uma concepção de gráfico como sendo uma “receita de construção”.

Tal enfoque pode limitar a compreensão do aluno. Por exemplo, quando solicitado a ler um valor f(a) em um gráfico ele pode ler somente se o ponto (a, f(a)) foi um dos pontos que ele marcou, em parte porque a curva ligando esses pontos, apesar de obrigatória pela “receita de construção” pode ser percebida apenas como “decorativa”.

Percebemos que, os livros analisados (com exceção do LD-2) não enfatizam as questões relacionadas especificamente à representação gráfica de funções do ponto de vista de sua construção cognitiva, ou seja, na conversão entre os registros gráfico e algébrico as variáveis visuais pertinentes não são levadas em consideração. O esboço de gráficos é tratado exclusivamente por meio da junção de alguns pontos marcados no plano cartesiano, obtidos por meio da substituição de valores inteiros de *x* na expressão y = f(x) da função. Na interpretação de gráficos, sem expressão algébrica subjacente, um aluno com tal concepção não consegue fazer uma leitura global do gráfico, mas apenas uma leitura pontual.

De acordo com Duval, esse tipo de tratamento não permite que o aluno perceba que modificações na expressão algébrica da função são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa. Do ponto de vista de Duval, um procedimento que permita uma apreensão global e qualitativa das representações gráficas deve levar em conta a associação entre a variável visual da representação e a unidade significativa da escrita algébrica, ou seja, o sujeito deve perceber que alterações nos coeficientes da expressão algébrica provocam modificações nas variáveis visuais do gráfico (inclinação, intersecção com os eixos etc.). Acreditamos que essa percepção pode se tornar possível, por meio de atividades que permitam ao aluno situar uma dada função no contexto de uma família de funções e esboçar seu gráfico a partir de um membro típico da mesma, realizando translações, reflexões etc..

Um estudante com essa concepção pode entender, por exemplo, que o gráfico da função representada pela expressão algébrica $y = x + 4$ pode ser construído a partir do gráfico de $y = x$ realizando-se uma translação vertical de 4 unidades e, que o gráfico da função $y = - x^2$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $y = x^2$ por meio de uma reflexão em relação ao eixo *x*.

É importante ressaltar que, dos livros analisados, somente o LD-2 apresenta atividades que permitem essa percepção.

Acreditamos que a utilização de *softwares* gráficos pode contribuir para a viabilização do procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma por permitir que o aluno visualize, no mesmo plano cartesiano, vários gráficos pertencentes à mesma família de curvas - o que é bastante dificultado se realizado à mão - e assim criar condições cognitivas para uma apreensão global e qualitativa das representações gráficas, que são essenciais no estudo de funções.

Finalmente, na perspectiva de contribuir para uma aquisição mais significativa do conceito de função, além de uma abordagem que parta do intuitivo para o formal, estabelecendo-se as devidas conexões deste conceito com outros campos da Matemática e com outras áreas do conhecimento, sugerimos que sejam propostas atividades que possibilitem a conversão entre os registros gráfico e algébrico nos dois sentidos, de forma qualitativa, pois acreditamos que a exploração de funções nas representações gráfica e algébrica pode facilitar a compreensão deste conceito.

É importante ressaltar que, de acordo com Duval (2003), é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática, entretanto, a coordenação dos diferentes registros de representação semiótica não é adquirida naturalmente pelos estudantes durante o ensino de Matemática.

Assim, apesar da importância da atividade de resolução de problemas, tanto do ponto de vista cognitivo quanto do didático, não se deve subestimar a articulação dos registros, isto é, a identificação dos objetos matemáticos por suas múltiplas representações, pois esta atividade é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Por isso, é necessário que os livros didáticos e os professores priorizem mais as tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão, particularmente em relação às representações gráfica e algébrica, quando se trata do objeto *função.*

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*. V.1. 1ª série. Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2004.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2006.

_____. Secretaria da Educação Fundamental. *Programa Nacional do Livro Didático* – Matemática (PNLD). Brasília: MEC, 2005. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/guiasvirtuais/pnld2005>. Acesso em: 30 de setembro de 2006.

_____. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio* – Matemática (PNLEM). Brasília: MEC, 2005. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/home/ld_ensinomedio/matematica>. Acesso em: 30 de setembro de 2006.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática: 5ª a 8ª série. Brasília: MEC, 1998.

_____. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1999.

_____. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+: Ensino Médio – *orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC, 2002.

DANTE, L. R. *Matemática*. V.1. 1ª série. Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2005.

DUVAL, Raymond. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Aprendizagem em Matemática, org. Silvia D. A. Machado, Campinas, SP: Papirus, p.11-33, 2003.

DUVAL, Raymond. “Graphiques et équations: L’articulation de deux registres”. *Annales de Didactque et de Sciences Cognitives*, v.1, p.235-253, 1988.

EDWARD, C. H.; PENNEY, D. *Cálculo com Geometria Analítica*. 4. ed. Tradução: Alfredo Alves de Farias. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, v. 1, 1997.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. *O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática*. REREMAT. Santa Catarina, UFSC, 2006. p.26-38. Disponível em: <http://www.redemat.mtm.ufsc.br/reremat_2005.htm>. Acesso em: 15 de março de 2007.

GUELLI, O. *Matemática: uma aventura do pensamento*. 2. ed. 8ª série. Ensino Fundamental. São Paulo: Ática, 2005.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP. *Relatório Saeb 2001 – Matemática*. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://www.inep.gov.br/basica/saeb/anos_anteriores.htm>. Acesso em 10 de fevereiro de 2007.

_____. *Resultados do Saeb 2003 (Versão Preliminar).* Brasília: MEC, 2004. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/anos_anteriores.htm>. Acesso em 10 de fevereiro de 2007.

_____. SAEB – 2005. Primeiros Resultados: *Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada.* Brasília: MEC, 2007. Disponível em: http://www.inep.gov.br/basica/saeb/anos_anteriores.htm>. Acesso em 10 de março de 2007.

LEE, Paulo. *Ciências versus pseudociências*. Curitiba: Expoente, 2003.

LINS, Rômulo; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.* 4ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2001.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. *Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas*. In: As idéias da álgebra. Org. Arthur F. Coxford e Albert P. Shulte. Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, p. 144-154, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: E.P.U., 1986.

MARIANI, R. C. P. *Transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no Curso de Cálculo*. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2006.

MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM. *Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?* Pró-posições, vol. 3, n° 1, Campinas, SP, 1992.

MORETTI, M. T. *A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais*. In: Aprendizagem em Matemática, org. Silvia D. A. Machado, Campinas, SP: Papirus, p.149-160, 2003.

OLIVEIRA, N. *Conceito de função: Uma abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem*. Dissertação (mestrado em Ensino da Matemática). PUC-SP, São Paulo, 1997.

PÁDUA, E. M. M. *Metodologia de pesquisa: Abordagem teórico-prática*. 11. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005.

PELHO, E. B. B. *Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis*. Dissertação (mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2003.

PIRES, C. C.; CURI, E.; PIETROPAOLO, R. *Educação Matemática*. 8ª série. Ensino Fundamental. São Paulo: Atual, 2002.

ROSSINI, Renata. *Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias*. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2006.

SÃO PAULO (Estado). *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática* – 2º grau. 3. ed. Secretaria de Estado da Educação – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo, 1992.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. *Matemática*. V.1. 4. ed. 1ª série. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2004.

SOARES, Magda B. *Um Olhar sobre o livro didático. Presença Pedagógica – Livro: objeto de desejo*. Ed. Dimensão, v. 2, nº 12, nov./dez. 1996, p. 53-63.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo, 4. ed. Tradução: Cyro C. Patarra, Ana Flora Humes, Cláudio Asano, Márcia Tamanaha (IME – USP). V. 1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

TRINDADE, J. A. O.; MORETTI, M. T. *Uma relação entre a teoria histórico cultural e a epistemologia histórico critica no ensino de funções: a mediação*. In: Zetetiké, v. 8, nº 13/14, jun./jul., p. 29-50, 2000.

USISKIN, Zalman. *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis*. In: As idéias da álgebra. Org. Arthur F. Coxford e Albert P. Shulte. Tradução: Higino H. Domingues, São Paulo: Atual, p.9-22, 1995.

VARIZO, Z. C. M. *O Livro Didático. Ontem e Hoje.* In: Cadernos de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo. V. 1, n 1 – Vitória: UFES/PPGE, p. 125-140, 1999.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. *O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências*. Ciência e Educação, v. 8, nº 1, Bauru: UNESP, p. 1-12, 2002. Disponível em: <http://www4.fc.unesp.br/pos/revista/vol8num1.htm>. Acesso em: 20 de novembro de 2006.