PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC / SP

Maria Estela Conceição de Oliveira de Souza

A questão da argumentação e prova na matemática escolar: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC / SP

Maria Estela Conceição de Oliveira de Souza

A questão da argumentação e prova na matemática escolar: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre Profissional em Ensino de Matemática**, sob a orientação do **Prof. Saddo Ag Almouloud.**

São Paulo

2009

Banca examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ Local e data: ____________________

Dedico este trabalho aos meus pais, Marcos e Iara, às minhas irmãs, Márcia e Marisa, ao meu marido, Orlando, pelo apoio e compreensão, e à minha filha, Heloísa, "Luz divina que me inspirou a continuar essa batalha e chegar à vitória".

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a DEUS, pela vida.

Ao professor Dr. Saddo Ag Almouloud, por aceitar orientar-me para que pudesse concluir este trabalho.

À professora Dra. Janete Bollite Frant, pela orientação na parte inicial deste trabalho.

À equipe do Projeto AProvaME, pela oportunidade oferecida para eu aprender e desenvolver este trabalho.

A todos os professores do curso, pela paciência, dedicação e atenção prestadas.

Aos professores convidados para compor a banca deste trabalho e por terem feitos valiosas sugestões: Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva, Profa. Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar e Profa. Dra. Maria Raquel Miotto Morellatti.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

“O universo é uma harmonia de contrários”

Pitágoras

RESUMO

Este estudo está inserido no contexto do ensino e aprendizagem de provas e argumentos matemáticos de alunos da escola de educação básica, desenvolvido no âmbito do Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME). O objetivo do trabalho refere-se ao mapeamento das concepções sobre argumentação e provas de alunos adolescentes na faixa etária entre 14 e 16 anos de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo. Para esse levantamento foi elaborado um questionário contendo, em dois cadernos, cinco questões de Álgebra e cinco de Geometria, aplicadas a 1.998 alunos. Mais especificamente, este trabalho centrou-se na análise de uma questão de Geometria (G3) que solicitava a veracidade ou falsidade de uma afirmação e a apresentação de uma justificativa para a resposta. A elaboração e discussão das respostas foram baseadas principalmente nas pesquisas de Balacheff (1988) e Healy & Hoyles (1998) sobre argumentos empíricos e formais e sobre a complexa passagem da produção de provas pragmáticas para conceituais. Após a tabulação das informações coletadas, visando a uma análise mais detalhada desses 1.998 protocolos, extraiu-se uma amostra menor com 50 deles. Na etapa seguinte, esses alunos foram agrupados de acordo com os tipos de resposta apresentados para a realização de algumas entrevistas individuais, visando à obtenção de esclarecimentos adicionais sobre suas respostas. Encerrou-se o trabalho com um panorama conclusivo e reflexivo baseado no resultado das análises anteriores em que mais de 50% dos alunos pesquisados classificaram a afirmação da questão (G3) como verdadeira, e em relação às justificativas, a preferência por argumentos empíricos (verificações para alguns casos) se destacou, mas também houve uma considerável quantidade de respostas “não sei” e outras deixadas em branco, sendo poucos os que justificaram suas respostas com o uso de propriedades, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Palavras-chave: Prova e Demonstração; Argumentação; Quadrilátero; Educação Matemática.

ABSTRACT

This study is placed in the context of teaching and learning of mathematical proofs and arguments by students of middle school, developed under the Project Reasoning and Proof in School Mathematics (AProvaME). The aim of the work refers to map the concepts of argumentation and proofs of adolescent students aged between 14 and 16 years of public and private schools of the State of Sao Paulo. For this survey was drawn up a questionnaire in two books, five questions of Algebra and five of Geometry, applied to 1.998 students. More specifically, this work focused on reviewing a matter of Geometry (G3), which called for the truth or falsity of a statement and presenting a justification for the answer. The preparation and discussion of the responses were based largely on research Balacheff (1988) and Healy & Hoyles (1998), on empirical and formal arguments and the complex shift from production of evidence for conceptual pragmatic. After tabulating the information gathered, seeking a more detailed analysis of those 1.998 protocols, drew to a smaller sample of 50 of them. In the next stage, the students were grouped according to types of the presented responses for being submitted to a few individual interviews, in order to obtain additional information about their answers. The work was finished with a conclusive and reflective picture based on the results of previous tests, in which more than 50% of the surveyed students rated the statement of the issue (G3) as true, and for reasons, the preference for empirical arguments (checks for some cases) stood out, but they also had a considerable amount of “don’t know" and others left empty, with few to justify their answers with the use of properties, for example, the addition of internal angles of any triangle.

Keywords: Test and Demonstration; Arguments; Quadrilateral; Mathematics Education.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Durante a trajetória de minha vida escolar, como aluna, não tive oportunidades de desenvolver e conhecer os porquês da Matemática. Meus primeiros contatos com tais questões foram com prova e demonstração na graduação em Matemática. Contudo, na maioria das vezes, não entendia e não conseguia enxergar importância em tudo aquilo, talvez por falta de familiarização com esse tipo de procedimento.

Quando comecei a lecionar no ensino fundamental surgiram as inquietações sobre como explicar os porquês da Matemática, já que os alunos perguntavam: Como se chegou a essa fórmula? Para que serve?

Acredito que as provas devam ser objeto de estudo e de ensino por constituírem a essência do saber e fazer matemático. No entanto, não me sentia preparada para abordar esse tema em sala de aula, sobretudo pela escassez de experiências no decorrer da graduação.

Hoje considero que isto se deva ao fato de que a apresentação de uma demonstração – que ocorria nas aulas de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial Integral, por exemplo, comprova claramente o rigor e o formalismo presentes. Entretanto, sua elaboração é um processo complexo que abrange outras fases, como o levantamento e validação de hipóteses, podendo envolver, inclusive, um trabalho empírico de validação, mas isto não me parecia evidente ou natural.

Busquei então o aperfeiçoamento e a atualização profissional iniciando o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática na PUC-SP. No curso soube da existência do projeto AProvaMe[1]. Então, conversei com a professora Ana Paula

[1] AProvaME1: Projeto financiado pelo CNPq, Processo nº 478272/2004-9.

Jahn e mostrei-me interessada em participar do projeto com a finalidade de desenvolver uma dissertação de mestrado.

O projeto AProvaMe (Argumentação e Prova na Matemática Escolar) tem como proposta investigar as concepções de alunos da oitava série do ensino fundamental e primeira série do ensino médio, na faixa etária entre 14 e 16 anos, sobre a questão de argumentação e prova na Matemática, e propor atividades que utilizem ambientes computacionais para propiciar o desenvolvimento do raciocínio argumentativo e dedutivo dos educandos.

A partir daí comecei a participar do projeto e resolvi efetivar esta dissertação analisando as justificativas que os alunos apresentavam em relação a seguinte questão do questionário de Geometria:

A medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é sempre 360º?

Apresento no Capítulo 1 alguns estudos sobre prova e demonstração na Matemática, o Projeto AProvaME ao qual me encontro integrada, os objetivos, metodologia e a estruturação do questionário.

No Capítulo 2 registro alguns estudos sobre a problemática da pesquisa em relação à demonstração em Geometria, a definição da questão de pesquisa, a hipótese e a concepção de demonstração e prova de Balacheff (1988), que tomo como base para análise dos dados obtidos na pesquisa.

No Capítulo 3 avalio: a classificação da codificação das respostas que obtive dos alunos que responderam ao questionário aplicado, baseados em Healy e Hoyles (1998), estabelecida pelo grupo do projeto AProvaME; algumas respostas referentes à questão (G3) do questionário aplicado; o estabelecimento de uma amostra de 50 alunos pesquisados; as análises quantitativas e qualitativas efetuadas para a questão de interesse (G3) e a definição de critérios para a realização de entrevistas complementares. Procedi à tomada de quatro depoimentos de alunos para obtenção de maiores informações sobre as diferentes respostas obtidas na pesquisa.

Encerrei o trabalho com as considerações finais.

CAPÍTULO 1. ESTUDOS PRELIMINARES

1.1 A Prova e a Demonstração no Ensino da Matemática

Segundo Gouvêa (1998), a origem do estudo sobre demonstração matemática e seu desenvolvimento no decorrer da história permitem esclarecer a complexidade de seu ensino. Porém, a literatura a respeito não é muito vasta, pois para os matemáticos ela não é material direto de investigação, e sim fortemente ligado aos conhecimentos matemáticos.

Gouvêa (1998) sugere localizar a origem da demonstração matemática na Antiguidade Clássica, precisamente na Grécia do século VI a.C., baseando-se tão-somente em raros comentários de alguns matemáticos gregos após essa época, diante da inexistência de documentos.

A demonstração entre os gregos não está ligada à existência de provas, validações ou verificações, conforme elucida Gouvêa (1998, p. 22):

> A demonstração, entre os gregos, é consequência do pensamento reflexivo influenciado pelas exigências político-sociais e filosóficas que se instauraram, pela necessidade de "convencer" o outro. A tríade Sócrates, Platão e Aristóteles teve a função de suplantar, pelo pensamento reflexivo, a crença mística primitiva. As atividades humanas na "$\pi o \lambda \iota \varsigma$" (polis = cidade) alcançaram seu ponto alto de expressão. O pensamento reflexivo passou da preocupação cosmológica para a antropológica com sofistas, mestres de retórica e de eloquência na Atenas democrática, que precisavam preparar os cidadãos para a disputa dos cargos públicos através de eleições livres.

Diante do surgimento da Democracia, da Geometria (hoje Matemática) e da Filosofia, o termo "milagre grego", usado na época, era atribuído à descoberta da "razão" pela humanidade, não importando a civilização.

Ao falar que os gregos introduziram a demonstração em Matemática, não se exclui a vivência de matemáticos anteriores, que utilizaram as provas em várias fases. Podem-se citar alguns exemplos:

Segundo Keller (1986), os escribas do Egito provavam a precisão de seus cálculos por meio da verificação do resultado. Já na Índia era utilizada a figura (precisão do desenho) para provar as afirmações geométricas.

De acordo com J.C. Martzoloff (1998), as provas na Matemática chinesa surgiram sem as generalizações dessas práticas por alguns autores, em certos períodos.

A princípio, o significado dos termos prova e demonstração está ligado a uma ideia comum, à descrição de argumentos com vistas a justificar ou validar uma proposição. Apesar da ideia comum, esses termos nem sempre são considerados sinônimos, assumindo variações em função do tempo e do contexto. Na acepção de Pietropaolo (2005, p. 48):

> Convém assinalar que em artigos sobre a história da Matemática e, em particular, sobre Educação Matemática são usados variados termos para se referir às demonstrações, tais como: demonstrações formais, demonstrações rigorosas, provas rigorosas ou simplesmente provas. E nem sempre essas expressões são utilizadas como sinônimas...

Para falar do contexto, Fonseca (2005, p. 2) assevera que:

> os autores distinguem quatro contextos onde varia o significado de demonstração: (a) na lógica e fundamentos da matemática; (b) na matemática profissional; (c) nas ciências experimentais e no dia-a-dia; (d) na sala de aula de matemática.

A intenção até aqui não foi fazer uma apresentação com profundidade, mas ilustrar essa diversidade no significado dos termos prova e demonstração.

Há alguns anos as aulas de Matemática conviveram com métodos e estilos próprios de ensinos tradicionais, os quais, consoante D'Ambrósio (1989, p. 15), explicam que *a típica aula de matemática é uma aula expositiva, em que o professor passa no quadro-negro aquilo que ele julga importante... O aluno copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação.*

Nasser e Tinoco (2001, p. 1) salientam que os livros atuais têm modificado muito esse conceito de ensino, mas ainda não é o bastante. Muitos apresentam figuras mais atrativas e uma maneira diferente de ensinar Matemática, estilo até mais motivador, entretanto a nova abordagem faz com que os alunos deixem de pensar e raciocinar. As autoras enfatizam que: "*os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas idéias*".

O que está refletido nos raciocínios expostos aqui por D'Ambrósio, Nasser e Tinoco, que em suma querem dizer que os alunos resolvem inúmeras listas de exercícios repetitivos sem ao menos saber seu significado, nem principalmente conhecendo a argumentação que os levou a tais resultados.

Sabe-se que a prova na Matemática é um instrumento para explicação e/ou validação de enunciados, um instrumento que tem sua importância aumentada ao assumir outras funções como, por exemplo, ser tradicionalmente uma ferramenta para distinguir a Matemática das ciências experimentais.

Garnica (2002) postula a necessidade de revisão nas classificações das formas de argumentação matemática. Não se trata de discutir a dicotomia formal/não-formal, mas de falar das diferentes formas de argumentação que existem na sala de aula. Diante dos estudos realizados pelo autor, existem dois eixos para essa discussão: um voltado para as formas de argumentação escolar e outro para a prática profissional-científica.

Garnica (2002, p. 97) ressalta que *"o modo de argumentação por excelência é a prova rigorosa ou demonstração formal, envolta em paradoxos, mas com o objetivo de firmar, definitivamente, a veracidade das afirmações Matemáticas"*. Desta maneira, tal prática profissional deve ser voltada também para a prática e utilização em sala de aula.

Nasser e Tinoco (2001) discutem muito as argumentações nas funções da prova, e no dizer das autoras, a mais utilizada é a que desempenha a função de validação de um resultado comprovando sua veracidade, e esta função raramente é motivadora para os alunos, visto que não compreendem a necessidade de comprovar a veracidade de algo que já consideram óbvio.

Sobre a demonstração, Davis e Hersh (1986, p.182) observam:

> Uma demonstração, no melhor dos casos, aumenta o entendimento, mostrando o que é essencial no assunto. As demonstrações sugerem matemática nova. O principiante que estuda demonstrações se aproxima mais da criação de matemática nova. Uma demonstração é potência matemática, a voltagem elétrica do assunto, que vitaliza as afirmativas estáticas dos teoremas.

Se a prova é considerada como essencial na Matemática, a sua exploração em sala de aula parece não corresponder ao *status* que lhe é atribuído. Nas palavras de (De Villiers apud Nasser e Tinoco, 2001, p.10) *"em vez de se enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de explicação deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos"*.

Assim, não obstante a prova ser essencial para a definição da atividade matemática, na educação básica ela foi abandonada nos processos de ensino e aprendizagem.

Balacheff (1977) admite que o aluno não possui maturidade lógica para realizar ou tomar consciência da necessidade das provas.

Chazan (1990) complementa que é preciso um grande empenho por parte dos professores para que utilizem na sala de aula abordagens que aumentem e melhorem o papel da demonstração e propiciem a transformação das concepções dos alunos relativamente a ela.

Alguns educadores e pesquisadores voltados ao ensino da Matemática, entre eles: Balacheff (1988), Chazan (1990), Healy e Hoyles (1998), De Villiers (1999), procuram reverter esse quadro, sair de uma situação em que os argumentos e provas foram praticamente extintos da educação básica, em consequência de um tratamento com excessivo formalismo e poucos resultados. A tentativa desses educadores e pesquisadores é buscar e dar sugestões para a realização de um trabalho que valorize a criatividade, a exposição de ideias e procedimentos, onde os principais objetivos são a construção do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999, pp.215-216) para o ensino médio, entre as competências almejadas destacam que o aluno possa, na disciplina Matemática, "*escrever textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões*", e que ele possa também:

> - Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.).
> - Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> - Formular hipóteses e prever resultados.
> - Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> - Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> - Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Já nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 26) para o terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental de Matemática, tem-se entre as principais características do conhecimento matemático:

> O exercício da indução e da dedução em matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.

Segundo Barbosa (2007) e Jameli (2007) atualmente, alguns livros didáticos procuram apresentar situações de prova, mas são mínimas as situações que efetivamente envolvem os alunos neste trabalho, e as provas que aparecem, geralmente envolvendo Geometria, possuem um grau de generalidade inacessível para a maioria dos alunos.

As idéias até agora discutidas neste trabalho levam a interpretar o termo demonstração como um conjunto de meios que serve para validar e sistematizar o conhecimento matemático. Assim, é necessário que esses meios façam parte do processo de ensino e aprendizagem das crianças desde que comecem a aprender Matemática.

Na defesa de práticas que envolvam argumentação e prova, e apoiando sua presença já na educação básica, tem-se o Projeto AProvaME, a ser descrito de maneira sucinta a seguir.

1.2 Projeto AProvaME

Como citado, o Projeto AProvaME tem como proposta investigar as concepções de alunos da oitava série do ensino fundamental e primeira série do ensino médio, com faixa etária entre 14 e 16 anos, sobre a questão de argumentação e prova na Matemática, e propor atividades que utilizem ambientes computacionais para propiciar o desenvolvimento do raciocínio argumentativo e dedutivo dos educandos.

Formado por seis professores-pesquisadores e 28 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática integrando-se como professores-colaboradores, o projeto teve seu início em 2005 e término previsto para o final do primeiro semestre de 2007.

O projeto organizou-se em duas fases.

Na primeira, foi aplicado um questionário (modelo final no item 1.3.3) para 81 turmas, sendo 34 de 8ª série e 47 de 1ª série, pertencentes a 31 escolas, sendo 22 estaduais, três municipais e seis particulares do Estado de São Paulo, para a realização do mapeamento das concepções dos alunos sobre prova em Matemática.

A segunda fase caracterizou-se pela inter-relação entre ensino e aprendizagem. O objetivo principal da aprendizagem consiste na elaboração e avaliação de situações que vão ao encontro das limitações e dificuldades detectadas na compreensão de prova na primeira fase do projeto, e o propósito do ensino é a atuação do professor diante dessas situações de aprendizagem e nas modificações destas em ação.

Para um maior detalhamento, serão descritos a seguir os objetivos do projeto, um resumo de sua metodologia e as características dos questionários anteriormente citados.

1.2.1 Objetivos

Os objetivos abaixo fazem parte do documento apresentado ao CNPq − Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico, agente financiador do projeto AProvaME:

1. Mapeamento das concepções sobre argumentação e prova na Matemática de alunos adolescentes na 8ª série do ensino fundamental e 1ª série do ensino médio em escolas do Estado de São Paulo.
2. Criar grupos de trabalho contendo pesquisadores e professores para compor situações de aprendizagem, observando o envolvimento do aluno com o processo de construção de suposições e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
3. Elaborar um espaço virtual para cada membro da equipe do projeto e analisar seu papel de desenvolvimento das situações de aprendizagem, bem como o crescimento de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Analisar situações de aprendizagem, em termos da abrangência dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Pesquisar a aplicação dessas atividades por diferentes professores, e assim reconhecer em que fase sua participação nos grupos de trabalho fornece uma adequação de abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Processar métodos propícios ao papel de argumentação e da prova no currículo de Matemática.
7. Colaborar com o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

1.2.2 Metodologia do AProvaME

Na primeira fase desse projeto foram aplicados dois questionários, um de Álgebra e outro de Geometria. Estes foram aplicados por professores- colaboradores a três classes de 8ª série do ensino fundamental e/ou 1ª série do ensino médio, selecionadas aleatoriamente dentre seis classes por eles indicadas. No total, 1.998

alunos responderam aos questionários. As questões compõem dois domínios matemáticos: Álgebra e Geometria, sendo agrupadas em dois blocos:

1. Análise de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação;
2. Elaboração de provas.

Os dados coletados foram organizados em uma planilha e serviram de apoio para o desenvolvimento da segunda fase do projeto.

Com um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores, a segunda fase trazia a aprendizagem e o ensino como eixos inter-relacionados de investigação. Em relação à aprendizagem, tendo como referência a primeira fase do projeto, foram elaboradas e avaliadas situações de aprendizagem e sequências de atividades aplicadas pelos professores-colaboradores em suas salas de aula.

No final da segunda fase, procedeu-se a uma comparação entre o mapeamento realizado na primeira fase e os dados levantados em relação ao eixo de aprendizagem na segunda fase, visando a responder em que medida as principais dificuldades apontadas na primeira fase foram superadas na segunda fase pelos alunos-participantes, e quais características de prova ainda necessitarão de investimentos numa perspectiva de progressão.

1.3 O Questionário

1.3.1 A elaboração a partir de um modelo

Conforme as informações anteriormente descritas, o grupo de trabalho (pesquisadores e professores) iniciou as discussões em setembro de 2005, com a finalidade de elaborar os questionários de Álgebra, identificados como A1 e A2, e de Geometria, identificados como G1, G2 e G3, a serem apresentados aos alunos pesquisados.

Foi requerido pelo grupo a cada professor-colaborador, que durante a primeira semana de setembro de 2005, obtivesse os primeiros resultados do questionário aplicado (Anexo 2), numa simulação do que posteriormente viria a acontecer em sala de aula, assumindo uma postura crítica especialmente quanto aos aspectos clareza na apresentação/comunicação dos enunciados, perguntando: *“Você acha que os alunos entendem o que está sendo solicitado?”*, quanto ao grau de dificuldade das questões abordadas: *“Você acha que as questões são viáveis para que série/ idade?”*, e sobre qual o tempo ideal de duração da pesquisa: *“Quanto tempo os alunos necessitam para responder?”*, procurando estabelecer uma adequação do questionário ao perfil do público-alvo escolhido.

Com o término desta etapa, afirma-se por meio de análise das diversas amostragens disponíveis nos fóruns de discussão do sistema TelEduc que, de uma maneira geral, os pontos de vista expostos pelos professores-colaboradores revelam convergência quanto ao nível adequado de dificuldade e à previsão de pelo menos duas horas-aula para a resolução das questões (sendo uma hora para cada conjunto de questões de Álgebra e de Geometria). Foi destacada ainda pelos professores-colaboradores a necessidade de reformulação da questão G1, devido ao seu conteúdo extenso, bem como à falta de prática dos alunos para analisar e responder à questão proposta.

Após esta fase, foram aplicadas mais quatro atividades, sendo duas de Geometria e duas de Álgebra. Nestas últimas foram apresentadas situações abrangendo operações numéricas.

A seguir, apresentam-se essas quatro atividades.

Geometria

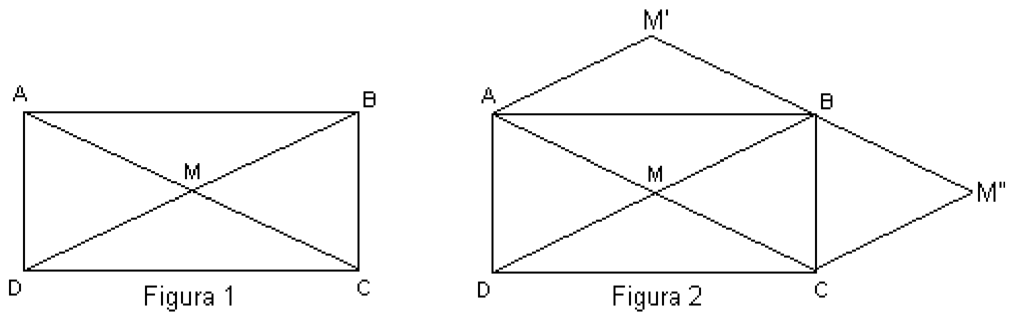
Atividade 1

Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Qual é a medida (x) do ângulo?

Justifique a resposta.

Atividade 2

Uma folha de papel tem quatro dobras e forma um retângulo de modo que as bordas se justapõem perfeitamente (sem se sobreporem), formando as diagonais do retângulo da Figura 1 abaixo. Desdobrando duas partes obtém-se a Figura 2.



Prove que os pontos M’, B e M’’ são alinhados

Álgebra

Atividade 1

1! = 1

4! = 4 x 3 x 2 x 1

7! = 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

N! = n x (n-1) x (n-2) x (n-3) x (n-4) x ... x 1

a) 3! é um número par?
Justifique.

b) 9! é um múltiplo de 5?
Justifique.

c) 62! é um múltiplo de 13?
Justifique.

Atividade 2

a) A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?
Quando se soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.
Justifique sua resposta.

b) A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?
Quando se soma um múltiplo de cinco qualquer com um múltiplo de quatro qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de cinco.
Justifique sua resposta.

Num procedimento parecido ao aplicado quando da elaboração da primeira versão do questionário, a oportunidade da incorporação total ou parcial dessas quatro questões foi submetida à consulta dos professores-colaboradores.

Ouvidas suas opiniões e sugestões, acabou desaconselhada a inclusão da Atividade 2 de Geometria, considerada de acentuada complexidade ante o propósito da pesquisa, e o item 2b da Atividade 2 de Álgebra, por ser repetitivo. Por outro lado, optou-se pela inserção das Atividades 1 de Geometria e de Álgebra, esta última com adaptações (simplificação da parte introdutória e elevação na quantidade de indagações).

1.3.2 Questionário-Piloto

Uma das principais decisões tomadas nesse período foi a de aplicação do questionário a uma turma limitada formada por um aluno da 8ª série do ensino fundamental e um da 1ª série do ensino médio, em cada uma das escolas onde posteriormente se realizaria a pesquisa, ou melhor, cada professor-colaborador se incumbiu tanto com a escolha dos alunos como também com o procedimento de todo o processo.

O questionário-piloto compunha-se de aquisição de informações que proporcionariam valiosa ocasião para antecipação das dificuldades encontradas pelos sujeitos da pesquisa na resolução das atividades, de ganho de uma *expertise* pelos aplicadores, e sobretudo da possibilidade de aperfeiçoamento e aferição da sistemática de avaliação das respostas obtidas, de maneira a consentir ações de planejamento e controle com vistas a minimizar as chances de ocorrência de falhas durante o transcorrer da grande pesquisa, considerando-se a sua abrangência (cerca de dois mil alunos espalhados por vários municípios do Estado de São Paulo).

Com o resultado das sugestões e das discussões efetuadas preliminarmente, foram executadas inserções de novas questões, e também algumas exclusões no questionário-piloto que passou, então, a contar para esta aplicação experimental com cinco questões de Álgebra e cinco de Geometria (Anexo 3).

Depois da sua aplicação, entre os meses de setembro e outubro de 2005, sem maiores contratempos, o grupo de trabalho foi subdividido em cinco equipes.

As equipes voltaram a se reunir para trocas de experiências, discussão sobre a viabilidade da realização de pequenas modificações nas questões, e especialmente para firmar os critérios de avaliação das respostas dos alunos, os quais serão expostos e comentados minuciosamente no Capítulo 3.

É essencial salientar que durante a aplicação do questionário-piloto, os aspectos que mais se destacaram foram as dúvidas dos alunos sobre a definição de quadrilátero (relativo à questão G3), reiteradamente equivocado com a figura do quadrado, e as dificuldades de interpretação de texto e expressão de grande parte deles, enfatizando muitas vezes as justificativas escritas em vez do que na realidade estava sendo questionado.

1.3.3 Modelo final

A cada quinzena realizavam-se reuniões, e durante esse período também aconteciam diversas discussões virtuais por meio do ambiente TelEduc. Desse modo, debatia-se sobre a inclusão de novas questões (ou exclusões), como também sobre as melhores maneiras de facilitar a comunicação para os alunos das afirmativas e enunciados propostos, escolhendo-se minuciosamente as palavras e termos, visando ao seu entendimento e ao mesmo tempo ao estímulo à produção de respostas mais precisas.

O mês de outubro de 2005 foi inteiramente dedicado ao término da montagem do questionário final, utilizando-se as observações e várias sugestões obtidas através da aplicação do questionário-piloto, resultando no enxugamento de algumas questões consideradas repetitivas ou com menor poder de adicionar novas informações. Procurou-se tornar o conteúdo mais espaçado e com um formato mais compreensível aos alunos pesquisados, incentivando a motivação para melhor desempenho, dedicação e sinceridade no preenchimento do questionário, com perguntas verdadeiramente essenciais à conquista da tarefa a eles designada.

Em que pese a complexidade desse evento, e por estar próximo do final do ano letivo de 2005, surgiu um ponto de preocupação para o grupo, uma vez que qualquer instituição de ensino poderia apresentar alguma contestação à realização de pesquisas externas ou atividades do gênero a partir da segunda quinzena de novembro de 2005, período tradicionalmente reservado à aplicação de avaliações oficiais, aulas de recuperação e demais atividades relacionadas com o término do ano letivo.

Com o material pronto, cada professor-colaborador retirou seu lote de cópias antecipadamente solicitado, tendo à sua frente todo o mês de novembro de 2005, como prazo afirmado para a efetivação da pesquisa, momento cercado de expectativas quanto ao início da imensa fase de atividades que se encontravam ociosas.

No (Anexo 4) apresenta-se a versão definitiva do questionário, contendo cinco questões focando conceitos de Álgebra e outras cinco direcionadas à Geometria, organizadas respectivamente em blocos de A1 a A5 e de G1 a G5, com um caderno independente e encapado (Anexo 5) para cada bloco. O questionário foi aplicado em 1.998 alunos de 8ª série do ensino fundamental e 1ª série do ensino médio, dos períodos matutino, vespertino e noturno, alocados em 81 salas de aula em 31 instituições de ensino particulares e públicas (estaduais e municipais), situadas em dez municípios de diferentes regiões geográficas do Estado de São Paulo: capital, Jacupiranga, Jundiaí, Lorena, Osasco, Promissão, Santo André, Santos, São Bernardo do Campo e São Caetano do Sul.

CAPÍTULO 2. A PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

2.1 O Ensino de Geometria e a Demonstração

O estudo da Geometria é uma área fértil para estabelecer atividades que envolvam demonstrações, pois os conceitos geométricos permitem que o aluno desenvolva um pensamento diferente que o possibilite a compreender, organizar e descrever o meio em que vive.

Como foi escolhida uma questão do questionário de Geometria para analisar as respostas que os alunos apresentaram, sugeriram-se alguns estudos sobre ensino e aprendizagem referentes ao trabalho da demonstração em Geometria.

De acordo com Gouvêa (1998), 67,3% dos professores entrevistados em sua dissertação de mestrado afirmaram que não tiveram chance de realizar estudos de Geometria em sua formação, de tal forma que pudessem obter subsídios para desenvolvê-los em sala de aula. E o autor ainda constatou que os professores pesquisados indicaram não realizar um ensino de Geometria que garantisse aos alunos a possibilidade de superar as dificuldades na aquisição dos conceitos geométricos e nas técnicas de prova e demonstração.

Os professores que participaram da pesquisa de Perez (1995) afirmaram que não possuíam metodologia e conteúdos adequados para desenvolver o ensino de Geometria.

Almouloud e Mello (2000) reconhecem:

- Grande parte dos professores atualmente em atividade recebeu uma formação de base muito precária em Geometria, devido à própria influência que o movimento da Matemática Moderna desempenhou em nossos currículos nas décadas de 60/70;
- os cursos de formação inicial de professores – tanto os cursos de magistério como os de licenciatura- continuam não dando conta de discutir com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria;
- também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido, igualmente, o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de geometria.

De acordo com Carlovich (2005), as coleções de livros didáticos do ano de 1990, em geral, apresentam provas de propriedades geométricas sob um olhar axiomático, em detrimento do empírico, enquanto nas coleções de 2000 o enfoque dedutivo diminui, dando lugar ao empírico.

A demonstração em Geometria apresenta um elo com a presença da figura que não se pode desatar, conforme Gouvêa (1998, p. 24):

> (...) a demonstração, em Geometria, está ligada a uma troca indissolúvel de relação da figura, no estatuto dos objetos da geometria, objetivo que somente é atingido depois de superado o obstáculo epistemológico constituído pela evidência da figura.

Duval (1995) destaca que o uso de dois registros: o das figuras e o da língua natural, na atividade matemática que a Geometria exige, não pode ser tratado como uma simples troca de registros, como pode acontecer em outras atividades matemáticas. É imprescindível que os tratamentos discursivos e com as figuras sejam realizados ao mesmo tempo e de maneira interativa.

Maioli (2002, p. 144), ao propor a questão: “Como trabalhar com formação de professores de maneira a contribuir com saberes referentes à geometria, e ao mesmo tempo oferecer aprimoramento em conhecimentos didáticos inerentes a este conteúdo?" Para a sua pesquisa, notou que o trabalho feito proporcionou ao professor o aprimoramento de conteúdos relativos à Geometria. No entanto, fala na conclusão:

> Com relação à demonstração constatamos que a oficina contribuiu no sentido de chamar a atenção para a sua necessidade, os professores avançaram, visto que na primeira atividade com demonstrações, não conseguiram utilizar a ferramenta sugerida (paralelas cortadas por uma transversal) e nas últimas já conseguiam explicitar o caminho da demonstração. No entanto, a oficina não deu conta de desenvolver conhecimentos a ponto do professor escrever sozinho uma demonstração completa. Se faz necessário um estudo mais profundo sobre demonstrações.

Alguns autores, como por exemplo, Davis e Hersh (1985, p. 73) destacaram a importância da função de comunicação da demonstração:

> (...) reconhecemos que o argumento matemático é dirigido a uma audiência humana que possui um conhecimento prévio que lhe dá a possibilidade de compreender as intenções do locutor ou do autor. Ao afirmar que um argumento matemático não é mecânico ou formal, também afirmamos implicitamente o que é...nomeadamente, um intercâmbio humano baseado em significados partilhados, nem sempre verbais ou expressos por fórmulas.

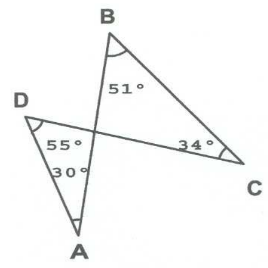
Lakatos (1976, p. 16) explicita: "*...as definições são frequentemente propostas e defendidas por argumentação quando surgem contra-exemplos..*."

Como exemplo, há a seguinte atividade de De Villiers (1999) relacionada ao teorema de que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360º.

Exercício:

Construa um quadrilátero ABCD e meça seus ângulos. Arraste o vértice D sobre o lado AB para obter uma figura parecida com a representada na Figura 1. A soma dos seus ângulos internos ainda é igual a 360º? A figura ABCD é um "quadrilátero"? O que significa para você a ideia de "quadrilátero"? Como é que isto se relaciona com o resultado bem conhecido formulado acima? O que significa para você ângulos "internos"?

Figura 1



A primeira reação da maioria das pessoas a um “contra-exemplo” como este é a de encará-lo como “exceção”, ou “monstro”, para sustentar o teorema de que a soma dos ângulos internos de todos os quadriláteros é de 360º, isto é, de rejeitar figuras assim como sendo quadriláteros.

Em alguns países, esta figura 1 é considerada um quadrilátero (estrelado), mas, no estudo das propriedades dos quadriláteros, consideram-se os quadriláteros não estrelados.

Maioli (2002), também fala em uma das atividades com quadriláteros sobre a importância da definição adotada para considerar como quadriláteros casos como o da Figura 1.

Neste trabalho consideram-se os quadriláteros não estrelados.

2.2 A Questão Escolhida

A questão do questionário que se escolheu para analisar é a seguinte: Quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

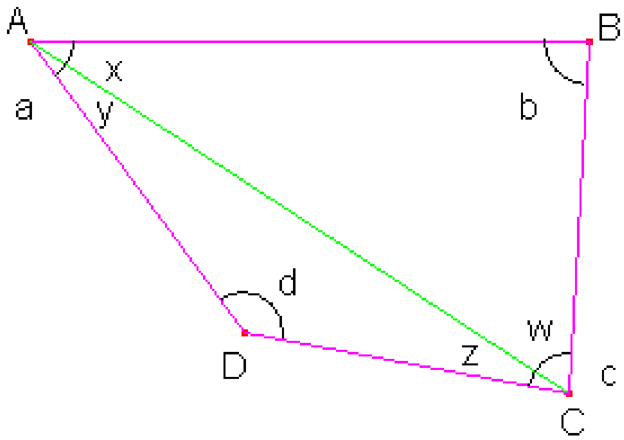
Quando se somam os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Em relação ao questionário, na primeira versão em português (Anexo 2) e no questionário-piloto (Anexo 3), a questão G3, objeto deste estudo, no modelo final do questionário acrescentou-se a definição de quadrilátero, pois como citado anteriormente, os resultados da aplicação do questionário-piloto mostraram uma confusão dos alunos na definição de quadrilátero, equivocado com o quadrado.

Questão da pesquisa: quais argumentos os alunos usam para justificar o resultado da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer?

As questões (G1 e G2), que contemplavam a justificativa da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer ser 180º, foram colocadas propositalmente anteriores para que os alunos pudessem de alguma forma relacionar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, com a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. Para apoiar as análises posteriores em relação às justificativas feitas pelos alunos pesquisados, apresenta-se a demonstração da propriedade em questão:

Figura 2



1- Construir um quadrilátero ABCD qualquer.

2- Construir o segmento AC (uma das diagonais do quadrilátero).

3- $x + b + w = 180^o$ (soma dos ângulos internos do triângulo ABC).

4- $y + d + z = 180^o$ (soma dos ângulos internos do triângulo ADC).

Somando membro a membro as equações 3 e 4, tem-se:

$x + y + b + d + w + z = 180^o + 180^o$, logo:

5- $x + y + b + d + w + z = 360^o$.

Como $x + y = a$ e $w + z = c$, substituindo na equação 5, obtém-se:

$a + b + d + c = 360^o$.

2.3 Hipótese

De acordo com estudos já apontados no Capítulo 1 sobre argumentação e prova na Matemática, baseados na experiência profissional dos professores-colaboradores junto ao Projeto AProvaME, a expectativa inicial é de uma preponderância de respostas envolvendo cálculos.

De igual forma, muitos resultados incorretos deverão ser obtidos, assim como restrições quanto ao tipo de quadrilátero abordado. Também são esperados muitos fatos em que, embora as respostas estejam corretas, inexistirão justificativas que as validem (indicativas de valores meramente memorizados, sem que se saiba o porquê). O encaminhamento da pesquisa terminará por confirmar ou contraditar tal hipótese.

2.4 Referencial Teórico

A análise dos dados obtidos durante a pesquisa com os alunos em relação à questão do questionário escolhida para estudo apóia-se na concepção de Balacheff (1988).

Conforme Balacheff (1988), o conjunto de provas exibidas pelos alunos pode ser distribuído em duas categorias denominadas *gênesis cognitiva* da demonstração. Deve-se perceber até onde os alunos compreendem o significado de uma demonstração e sua capacidade de justificá-la.

As provas são explicações aceitas por outros, num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro.

As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos;
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

Balacheff (2004) discute diversas perspectivas de prova matemática no processo de ensino e aprendizagem e questiona se seria possível um consenso a respeito de prova em Matemática, confrontando as opiniões de De Villiers (i) e Hanna e Janke (ii) (apud BALACHEFF, 2004, p.13) a respeito das funções da prova:

> **i.** verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação;
>
> **ii.** construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das conseqüências de uma hipótese, absorvendo um fato novo numa nova estrutura e permitindo uma nova percepção.

No entanto, Balacheff (2004, p. 13) destaca que existem pontos em comum nas epistemologias de prova matemática que podem ajudar a encontrar alguns elementos comuns a essa prova, como:

> **i.** reconhecimento de que a origem da racionalidade matemática, ao menos sob a perspectiva da aprendizagem, é construída sobre e contra um tipo de racionalidade baseada no "senso comum", apoiada numa cultura histórica, moral e de adesões religiosas, em práticas sociais e profissionais de uma comunidade;
>
> **ii.** na existência de uma profunda relação entre argumentação e prova, sua natureza é o objeto de um debate, ou pelo menos deve ser transformada num problema;
>
> **iii.** a prova deveria ser considerada à luz da teoria e da prática;
>
> **iv.** reconhecimento de que a matemática como um conteúdo gera dificuldades específicas para ser superadas ou, ao contrário, para ser construída com o surgimento de um significado de prova matemática;
>
> **v.** o professor desempenha um papel-chave como um animador acidental ou como um facilitador necessário (tradução da autora).

Para conhecer o nível de conhecimento, este foi dividido em dois tipos de provas: provas pragmáticas (*preuve pragmatique*) e provas intelectuais (*preuve intellectuelle*).

- Provas pragmáticas são explicações baseadas em ações simples e diretas como, por exemplo, desenhos;

- Provas intelectuais são fatos que não demonstram ações empíricas, mas se destacam usando o método lógico-dedutivo para caracterizar os objetos e suas relações.

Segundo o autor, a prova é demonstrada em quatro fases de validação, nas quais as três primeiras são provas pragmáticas e a última é prova intelectual:

1. ***Empirismo ingênuo*** (*empirism naïf*) **–** modo de validação da certeza de uma propriedade a partir da verificação de alguns casos sem maiores detalhes.
2. ***Experiência crucial*** *(expérience crucriale)* – é uma fase do processo de validação na procura de certa propriedade para um caso específico.
3. ***Exemplo genérico*** *(exemple génerique)* – quando num exemplo específico a validação da propriedade for confirmada por meio de argumentos feitos por realizações de operações ou transformações de modo que permita a generalização.
4. ***Experiência mental*** *(expérience mentale)* **–** posição elevada que não depende mais de um exemplo específico, mas sim quando os argumentos validados são conduzidos por pensamentos que comandem a generalidade da situação.

O autor também revela que a fase da experiência mental demarca com clareza a transposição da prova pragmática para prova intelectual. Por este ângulo, as ações são focadas na generalização em *gênesis cognitiva* da demonstração, e sendo assim, não é necessária a utilização da concretização particular.

Por outro lado, a fase de exemplo genérico é marcada pela variação, ora sendo prova pragmática, ora prova intelectual, conforme o tipo de questão e o contexto do estudo.

CAPÍTULO 3. ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Codificação Estabelecida

As equipes de pesquisadores e professores-colaboradores do Projeto AProvaME iniciaram discussões visando a escolher o critério a ser empregado para a codificação das justificativas dos alunos, tendo origem nos conceitos de provas pragmáticas e provas intelectuais, definidos por Nicolas Balacheff (1988), passando pelos níveis intermediários de validação: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental, optando pelas adaptações necessárias aos objetivos do projeto.

Na coleta dos dados, usou-se a classificação de Healy & Hoyles (1998) adaptando-a a esta pesquisa, visando além da classificação dos argumentos, ao tratamento dos dados para tabulação. Assim os argumentos apresentados pelos alunos foram categorizados como:

-2: Questões em branco.

-1: Respostas como não sei, não entendi.

0: Respostas totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado.

1: Alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências. Por exemplo, respostas completamente empíricas.

2: Alguma dedução/inferência, explicação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova.

2a – Falta muito para chegar à prova (mais próximo de 1).

2b – Falta pouco para chegar à prova (mais próximo de 3).

3 – Respostas corretas, totalmente justificadas.

A coordenação do AProvaME desenvolveu e apresentou a todo o grupo de trabalho, em dezembro de 2005, uma planilha MS Excel configurada para conter todas as respostas acumuladas, sendo que a cada uma de suas linhas a ser preenchida estaria associado o nome de um aluno-participante (protocolo). Por outro lado, cada uma das colunas guarda correspondência com um dos critérios -2, -1, 0, 1, 2a, 2b ou 3.

No momento da localização das respectivas células, os dados dos protocolos deveriam ser devidamente convertidos em registros numéricos binários 0 e 1, traduzindo a não-escolha ou a escolha, nesta ordem, da opção indicada em cada coluna por protocolo, de maneira a apresentar no final uma totalização dos resultados por questão, por tipo de resposta, por uma determinada opção, etc.

Repassadas pelo grupo todas as orientações a serem seguidas, e esclarecidas as dúvidas surgidas, cada professor-colaborador foi então incumbido da codificação dos protocolos em seu poder durante as férias escolares de janeiro de 2006.

3.2 Análise Estatística

Uma vez efetuada a exposição das informações codificadas, finalmente torna-se possível uma primeira apresentação dos resultados tabulados para a população total de 1.998 protocolos, base de amparo a uma avaliação preliminar do desempenho e referencial para todo o trabalho, antes da segmentação da pesquisa aos 50 elementos da amostra.

3.2.1 Do desempenho na questão G3

Nas tabelas a seguir estão sintetizadas as respostas encontradas para cada um dos itens que compõem esta questão, através das quantidades apuradas e respectivas representações percentuais, a saber:

Tabela 1. Análise da afirmação: verdadeira ou falsa

V	F	-2	-1	Total
1215	302	237	244	1998
60,8%	15,1%	11,9%	12,2%	100,0%

Pode-se perceber que 60,8% dos alunos que responderam ao questionário, em relação à questão G3, objeto de pesquisa, disseram que a afirmação é verdadeira, enquanto 15,1% responderam que a afirmação é falsa. Já as porcentagens dos alunos que deixaram a questão em branco ou responderam que não sabiam, não apresentaram uma diferença considerável, 11,9% e 12,2%, respectivamente.

Tabela 2. Análise das justificativas de acordo com a codificação estabelecida

0	1	2a	2b	3	-2	-1	Total
833	519	67	25	49	265	240	1998
41,7%	26,0%	3,4%	1,3%	2,5%	13,3%	12,0%	100,0%

Em relação às justificativas dadas para a questão G3, de acordo com a codificação estabelecida, tem-se que 41,7% dos alunos apresentaram justificativas erradas, ou apenas repetiram a afirmação do enunciado da questão; 26% apresentaram justificativas totalmente empíricas, sem nenhuma menção de inferência ou propriedades; 3,4% apresentaram alguma propriedade, mas longe de uma prova; 1,3% deles apresentaram justificativas próximas de uma prova, e 2,5% justificaram com propriedades em uma linguagem mais formal. As porcentagens dos alunos que não justificaram ou responderam que não sabiam justificar ficaram próximas, com 13,3% e 12%, respectivamente.

Os 49 protocolos que apresentaram justificativas valendo-se de propriedades em uma linguagem mais formal utilizaram a decomposição do quadrilátero em dois triângulos.

Dentre os 1.998 sujeitos coletados na primeira fase do projeto, sortearam-se aleatoriamente 50 alunos para compor uma amostra para análise, com os seguintes resultados:

Tabela 3. Análise da afirmação: verdadeira ou falsa?

Verdadeira	**Falsa**	**-2**	**-1**	**Total**
34	8	7	1	50
68%	16%	14%	2%	100%

Nota-se que tanto na estatística geral dos 1.998 protocolos como também dos 50 selecionados, as porcentagens de alunos que afirmaram ser verdadeira a afirmação de que a "medida da soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360º" ficaram na casa dos 60,8% e 68% respectivamente, indicando um grau de confiabilidade na amostra. Houve ainda 16% de respostas falsas para afirmação e respostas em branco, um percentual significativo para a amostra. Apenas um protocolo dos 50 da amostra respondeu "não sei" para a questão G3.

Tabela 4. Análise das justificativas de acordo com a codificação estabelecida

0	**1**	**2a**	**2b**	**3**	**-2**	**-1**	**Total**
17	19	1	1	2	9	1	50
34%	38%	2%	2%	4%	18%	2%	100%

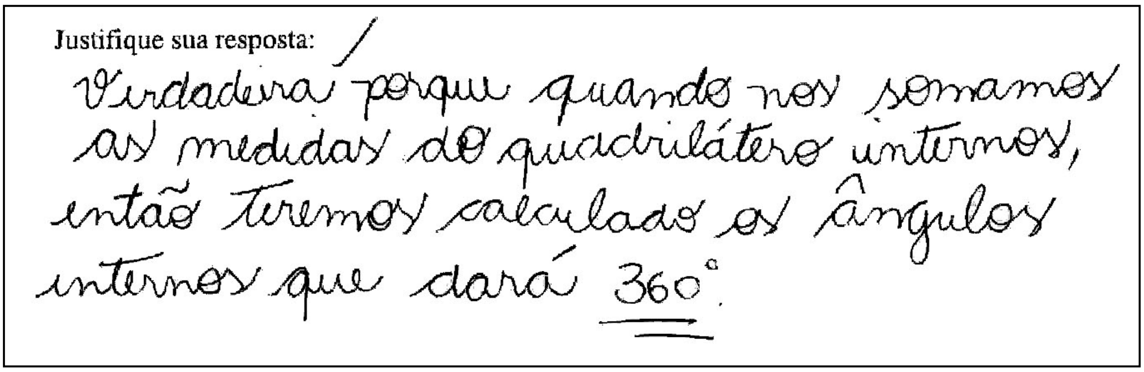
Ao contrário da análise geral, tem-se nesta amostra um percentual maior para a justificativa codificada como 1 (38%), que traduz respostas com informações pertinentes, mas que apresenta um raciocínio empírico. E em relação à justificativa codificada como 3, que descreve uma prova sobre a afirmação em questão, houve um baixo índice tanto nos 1.998 protocolos como nos 50 da amostra, de 2,5% e 4%, respectivamente.

3.3 Exemplos de respostas obtidas

Em relação à amostra de 50 protocolos, mostram-se alguns exemplos de respostas obtidas para a questão G3 escolhida para análise, de acordo com a codificação estabelecida no item 3.1.

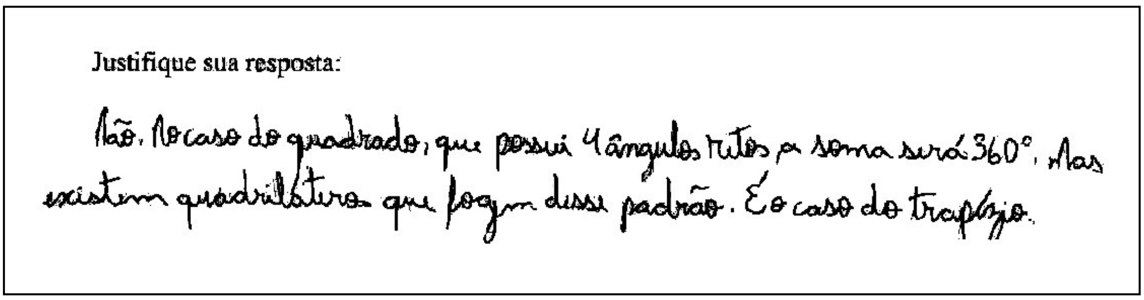
- ***Categoria 0***

- ***Exemplo 1:***


Justifique sua resposta: Verdadeira porque quando nos somamos as medidas do quadrilátero internos, então teremos calculado os ângulos internos que dará 360°.

Neste exemplo, o aluno repete a afirmação dada como resposta.

- ***Exemplo 2:***


Justifique sua resposta: Não. No caso do quadrado, que possui 4 ângulos retos a soma será 360°. Mas existem quadriláteros que fogem desse padrão. É o caso do trapézio.

Aqui o aluno considera válido somente para o quadrado por causa dos quatro ângulos retos.

- ***Categoria 1***
- ***Exemplo 1:***

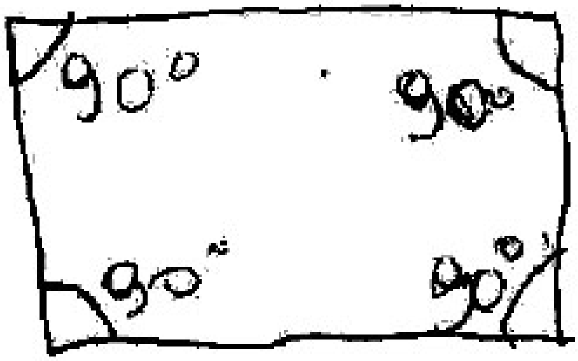
Justifique sua resposta:

É verdadeiro porque cada ângulo terá 90° e 90x4 = 360°

Exemplo 2:

Justifique sua resposta:

Sim



Nesta categoria, o exemplo utilizado foi sobre os quatro ângulos retos.

- ***Categoria 2a***
- ***Exemplo:***

Justifique sua resposta:

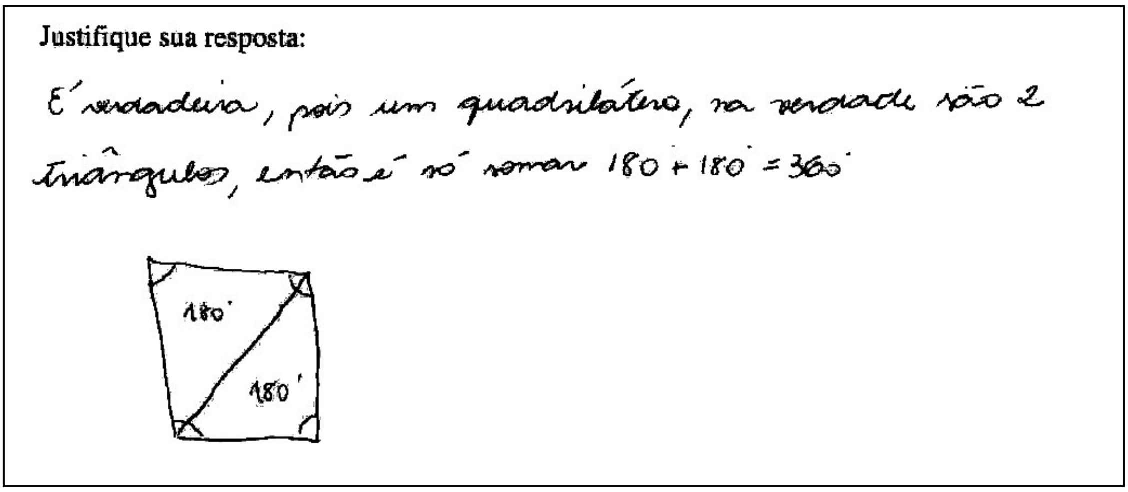
Verdadeira, porque sempre quando se interliga 4 pontos sem ser em uma mesma reta formam-se 360°

Ex:

No exemplo, o aluno apesar de atribuir valores para os ângulos, caracterizando um empirismo na justificativa, ele tenta expressar uma propriedade para a formação do quadrilátero.

- ***Categoria 2b***

- ***Exemplo:***

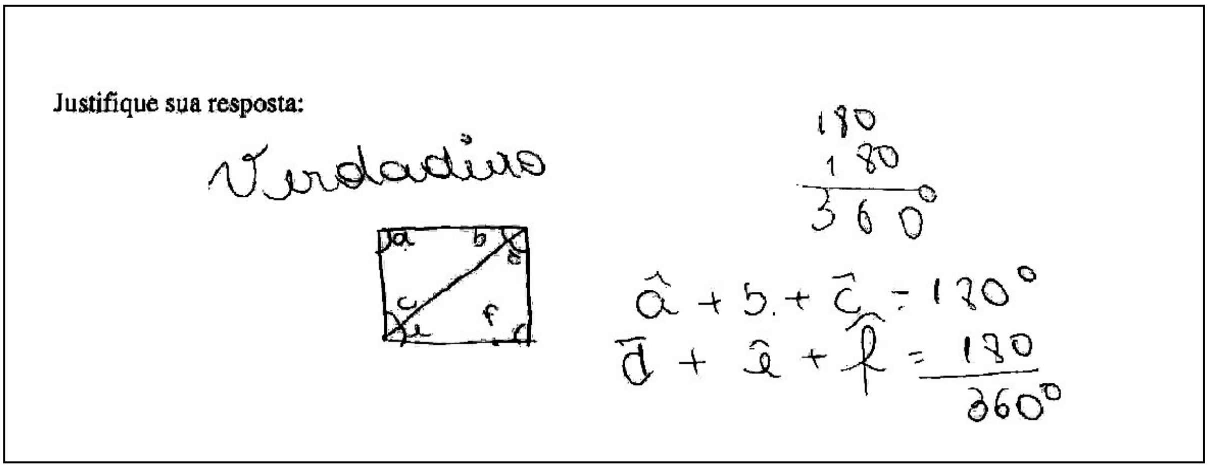

Justifique sua resposta:

É verdadeira, pois um quadrilátero, na verdade são 2 triângulos, então é só somar 180 + 180 = 360

No exemplo, o aluno utilizou a decomposição do quadrilátero em dois triângulos para justificar a resposta, porém não descreveu a propriedade de maneira formal, mas está próximo de uma prova.

- ***Categoria 3***

- ***Exemplo:***


Justifique sua resposta:

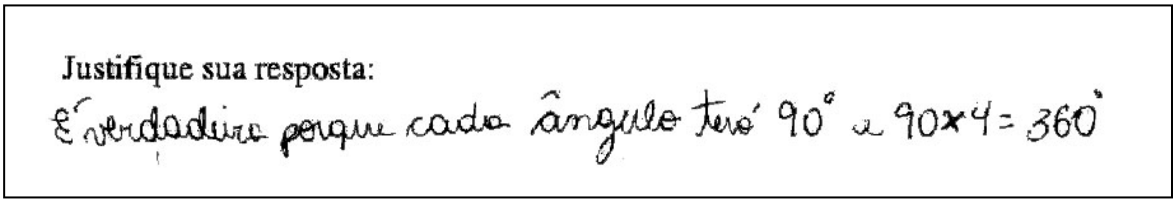
Verdadeiro

$$\begin{array}{r} 180 \\ 180 \\ \hline 360^\circ \end{array}$$

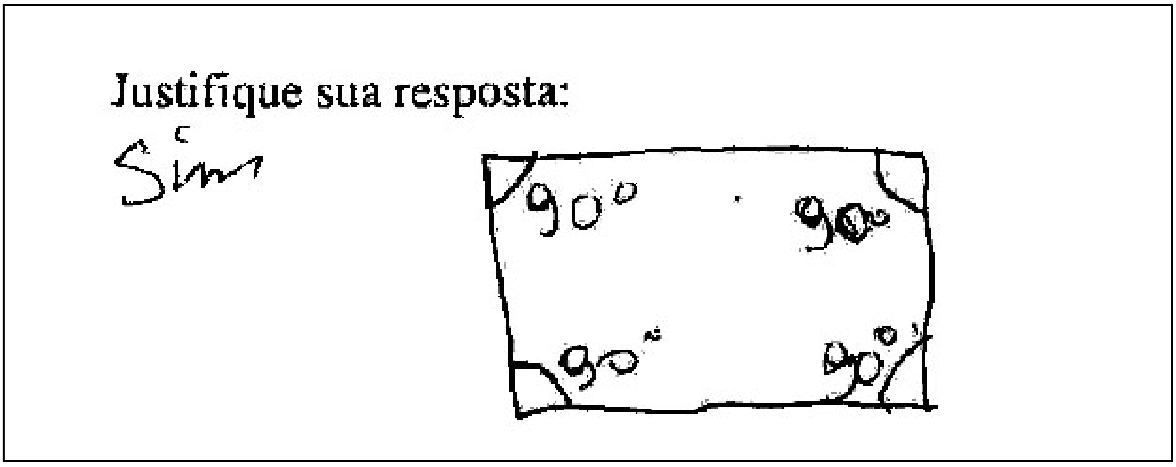
$$\hat{a} + b + \hat{c} = 180^\circ$$
$$\hat{d} + \hat{e} + \hat{f} = 180$$
$$360^\circ$$

Aqui o aluno apresenta uma propriedade e descreve-a de maneira mais formal, explicando que o resultado da soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º.

Os percentuais anteriores apontam uma possível ausência de práticas de trabalho com questões que propiciem ao aluno desenvolver generalizações em Matemática. Percebe-se que os alunos se encontram nas fases de empirismo ingênuo e experiência crucial, por exemplo:



Neste exemplo o aluno deixa a impressão de que os ângulos internos devem sempre medir 90º.



Em ambos os exemplos, os alunos se apoiaram na suposição de que cada ângulo interno mede 90º, sem menção a maiores detalhes, categorizados como provas pragmáticas, segundo Balacheff (1988) citado no Capítulo 2.

3.4 Realização das Entrevistas

Após a conclusão das análises preliminares das informações obtidas a partir da pesquisa realizada com alunos de 8ª série do ensino fundamental e da 1ª série do ensino médio, dentro da amostra dos 50 protocolos selecionados aleatoriamente, e com os resultados em mãos, podem-se dividi-los em tipos de respostas para facilitar a avaliação. Tendo todo o cenário pronto, verifica-se a necessidade de entrevistar pelo menos um aluno de cada tipo com o roteiro-base (Apêndice 1), para coletar maiores esclarecimentos referentes às respostas, dúvidas, e demais fatos que possam ocorrer.

No intuito de que todo esse processo seguisse de forma fidedigna em seu propósito, as entrevistas foram gravadas, e para comodidade do aluno o questionário estava disponível para que ele pudesse relembrar os registros efetuados, e com isto poderia acrescentar-lhes outros esclarecimentos que julgasse necessários.

De antemão foram tomadas todas as medidas de praxe: autorização formal da escola e/ou da família do aluno, agendamento do encontro e preparação para a condução da conversa, de forma que o entrevistado ficasse favoravelmente desinibido e motivado para auxiliar no esclarecimento das dúvidas. Como de resto em todo processo, a identidade dos sujeitos também deve ser preservada aqui, por meio da utilização de nomes fictícios, apelidos e outros recursos. Dessa amostra de 50 protocolos, selecionamos quatro deles para a realização das entrevistas, cujas análises estão descritas nos próximos itens deste capítulo.

3.4.1 Análise das Entrevistas

3.4.1.1 Aluno 1

Estudante de escola estadual em Osasco, 16 anos de idade, matriculada na primeira série do ensino médio (período diurno), apresentou uma justificativa para a questão G3 a nível de prova intelectual. Entrevista transcrita no Apêndice 2.

Questionada primeiramente sobre o emprego de justificativas em atividades de Matemática, declarou que as questões propostas em aula exigiam basicamente soluções numéricas. Quanto à resposta verdadeira para a afirmação da questão G3 e a justificativa utilizada por meio de triângulos, a aluna diz não se lembrar bem, mas recorda-se de um exemplo que a professora mostrou na lousa e tem uma ideia de como poderia ser. As letras utilizadas para representar os ângulos internos do quadrilátero foram porque a professora tinha ensinado assim no começo do ano. Mas percebe-se uma confusão da aluna quanto à nomenclatura “lado e ângulo” na fala: “Para representar os lados do retângulo, cada grau dela.”

Indagada sobre acréscimo de mais alguma coisa em sua justificativa, a aluna diz que acha que não.

A fala da aluna indica uma preferência na realização de exercícios que apresentem apenas respostas numéricas e mostrou-se confusa com alguns conceitos matemáticos, como lado e ângulo.

Apesar de a aluna apresentar uma justificativa em nível de fase de prova intelectual, deixa clara uma memorização e não um entendimento da resposta, indicando um esquecimento dos conteúdos decorados para breve utilização em avaliações.

3.4.1.2 Aluno 2

Estudante de escola particular em Santo André, 15 anos de idade, matriculada na primeira série do ensino médio (período diurno), respondeu verdadeira para a afirmação da questão G3, mas, não apresentou justificativa. Entrevista transcrita no Apêndice 3.

Questionada primeiramente sobre o emprego de justificativas em atividades de Matemática, declarou que as questões propostas em aula exigiam às vezes teoria, e às vezes práticas com atividades para calcular. A princípio, a aluna não se recordava de nenhuma atividade que teve que justificar, mas depois comentou: "... teve a do cubo que a gente tinha que ver os lados e a altura dele e tinha que explicar a teoria da onde surgiu a resposta".

Para a questão G3, a aluna disse apenas que a afirmação era verdadeira, sem apresentação de justificativa; indagada sobre o porquê de sua resposta, ela respondeu: "Porque num quadrilátero os ângulos dão 360º." Como a aluna mostrou interesse em tentar justificar no momento, então pediu-se que observasse as questões G1 e G2, que falavam da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, para ajudá-la a pensar numa justificativa. Após um silêncio de alguns minutos, a aluna comentou: "Cada lado tem um ângulo e a soma dos quatro é 360º, eu não sei por que coloquei verdadeira, não lembro."

Indagada sobre o tipo de quadrilátero que usaria para justificar, a aluna falou do cubo, com uma pequena intervenção do pesquisador para explicar sobre a diferença entre figura plana e figura não-plana. Ela citou então o quadrado e o retângulo, e ficou em silêncio em relação à existência de outros tipos de quadriláteros. Em relação à medida dos ângulos internos de um quadrado e de um retângulo, a aluna disse que não sabia.

Na avaliação da entrevistada, observa-se uma preponderância de atividades envolvendo somente o emprego de cálculos, que declarou “algumas vezes” precisar preparar justificativas, embora não tivesse conseguido citar exemplos dessas tarefas por não se lembrar, indicando um esquecimento dos conteúdos decorados para breve utilização em avaliações. A aluna mostrou-se confusa em relação a conceitos matemáticos como cubo, quadrilátero, quadrado e retângulo.

Não obstante a aluna declarar sua preferência por um tipo de aula que inclua demonstrações, seu posicionamento parece indicar uma atitude passiva, ou pelo menos investigativa, diante dos diversos conteúdos que lhe são expostos, resultado talvez da falta de hábito ou de estímulo para procurar evoluir e aprofundar o trabalho analítico, distanciando-se cada vez mais do imediatismo raso e das conclusões apressadas e impulsivas.

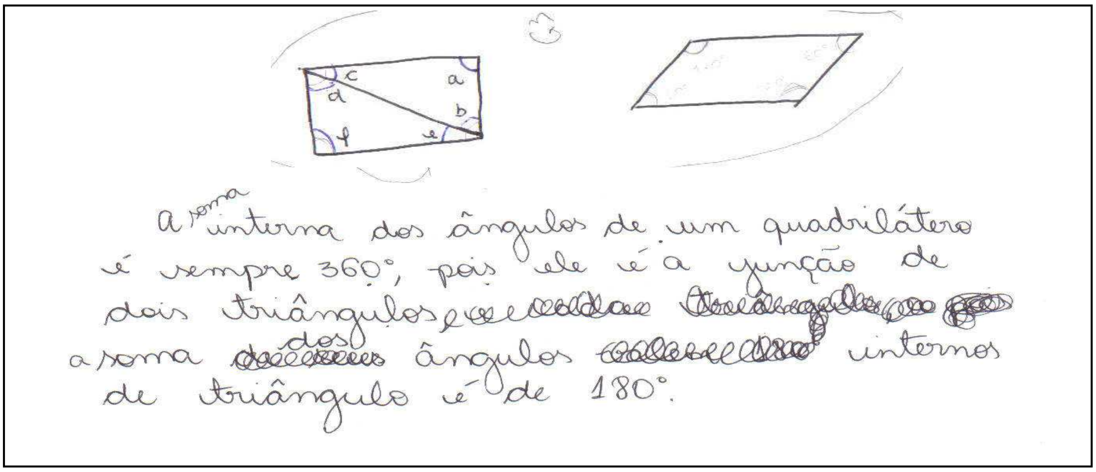
3.4.1.3 Aluno 3

Estudante de escola pública em Jundiaí, 15 anos de idade, matriculada na primeira série do ensino médio (período diurno), respondeu não sei para a questão G3. Entrevista transcrita no Apêndice 4.

Questionada primeiramente sobre o emprego de justificativas em atividades de Matemática, declarou que as questões propostas em aula exigiam basicamente soluções numéricas. Indagada sobre os motivos que a levaram a responder “não sei”, declarou que não estava acostumada a realizar atividades desse tipo, onde teria que escrever, falar da parte teórica, mas o principal é que não estava com vontade de responder ao questionário.

Na tentativa de fazer a aluna ler a questão novamente para pensar numa possível resposta e descobrir pontos importantes para a análise, ela desenhou um retângulo e um paralelogramo como exemplos de quadrilátero, mas não sabia como justificar. Depois de alguns minutos, questionada sobre o valor do ângulo interno de um retângulo, declarou ser 90º cada um dos quatro e a soma deles 360º, mas o enunciado da questão falava de um quadrilátero qualquer. Assim eram vários, e teria que proceder de igual maneira com todos.

Em prosseguimento à entrevista em relação a outras questões, conforme o Apêndice 4, e no final retomando-se a questão G3, objeto deste estudo, a aluna perguntou se dois lados têm necessariamente a mesma medida, e questionada sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, declarou ser de 180º, e sendo o quadrilátero a junção de dois triângulos, e como cada um tem 180º, juntando-se os dois têm-se 360º. Descreveu sua fala da seguinte maneira:



Observa-se na aluna uma preferência na realização de exercícios que apresentem apenas respostas numéricas, observa-se também a confusão entre os conceitos matemáticos de lado e ângulo.

Apesar de apresentar uma justificativa no final da entrevista em nível de fase de prova intelectual, a aluna indicou certa tendência para a prova pragmática, num nível de empirismo ingênuo, buscando exemplos de quadriláteros e valores de ângulos para tentar justificar a resposta.

3.4.1.4 Aluno 4

Estudante de escola particular em Santo André, 15 anos de idade, matriculada na primeira série do ensino médio (período diurno), apresentou o exemplo do quadrado para justificar a questão G3. Entrevista transcrita no Apêndice 5.

Faz uma distinção entre atividades “de justificar” e “de fazer contas”. Na introdução, declarou que a maior parte delas dentro de seu curso de Matemática valoriza apenas a execução de cálculos. Por solicitação, citou trigonometria como um exemplo do segundo caso, não se recordando, entretanto, de nenhuma situação do primeiro (“porque são muitas, né?”).

Quanto ao tipo de aula, enfatizou sua preferência pela demonstração dos conteúdos, alegando ficar mais fácil o entendimento, e contradizendo a fala anterior de que não se lembrava porque “são muitas”, a aluna citou o exemplo de trigonometria, onde o professor deu os desenhos e pediu aos alunos que fizessem a demonstração.

Declarou que quadrilátero para ela lembra o quadrado que tem os ângulos de 90º, e somados os quatro dão 360º. Apresentou insegurança ao responder sobre a possibilidade de existirem outros tipos de quadriláteros sem ser o quadrado, e outros valores de ângulos internos. ”Acho que poderia, porque existem outras formas de desenhar quadriláteros que a soma daria 360º.” Deixou claro que o ângulo de 90º é por causa da divisão de 360º por quatro, e questionada sobre outra forma de justificar como verdadeira a questão, a aluna insistiu na ideia de mostrar os valores dos ângulos.

A aluna afirmou ser favorável à prática usual de deduções e demonstrações nas aulas de Matemática, mas sua resposta parece ter apenas o intuito de agradar o entrevistador. A mesma, nitidamente efetua escolhas em nível de provas pragmáticas caracterizadas pelo empirismo ingênuo, buscando exemplos de quadriláteros e valores de ângulos para tentar justificar a resposta. Ela evita, ou abandona aquelas que exigem maior esforço dedutivo, deixando-as inconclusas ou resolvidas de forma impulsiva, gerando incoerências.

Utilizou-se de um mesmo assunto, trigonometria, a título de exemplo para ilustrar tanto o grupo das atividades de fazer contas como de justificar: “... Por exemplo, agora nós estamos vendo trigonometria, e é só cálculo.” E em outro trecho: “Já, agora a gente tá aprendendo trigonometria, e a professora deu os desenhos e pediu pra gente demonstrar...”. A aluna também mostrou-se confusa entre conceitos matemáticos, como de lado e ângulo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ainda que não contrariem a projeção inicial (Capítulo 2, item 2.3) neste trabalho, lamentavelmente os resultados da amostra em geral podem ser considerados não-satisfatórios.

Com fundamento nas informações coletadas nas entrevistas, e antes no desempenho dos sujeitos da amostra no preenchimento do questionário, torna-se possível incluir então as seguintes constatações, no tocante à tipificação de prova de alunos de oitavas séries do ensino fundamental e de primeiras séries do ensino médio, para a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer:

1. Categorizada como prova pragmática, com o exercício preferencial de ações diretas sobre determinadas representações concretas dos objetos matemáticos.

O nascimento da Matemática está estreitamente vinculado ao atendimento às diversas necessidades de quantificação de objetos materiais, surgidas nos primórdios da civilização humana. Com o passar do tempo, o desenvolvimento de todo um sistema formal de pensamento para reconhecer, classificar e explorar padrões acabou por adquirir uma dinâmica própria, transcendendo os aspectos puramente utilitários que a originaram.

Assim sendo, a Matemática acabou por assumir um caráter não-empírico, passando seus axiomas, teoremas e propriedades, perante a impossibilidade da realização de experimentos concretos, a serem validados por meio de procedimentos dedutivos, provas e demonstrações. Dentro deste contexto, torna-se imperativo ao estudante não apenas a compreensão da importância de tais construções, como também estar apto a produzi-las.

2. Dentro desta categoria verifica-se o predomínio do empirismo ingênuo como principal linha de pensamento adotada no trato com a temática. Mais primário dentre os quatro níveis idealizados por Balacheff (1998) quanto às formas de validação de propriedades, apoia-se somente na aplicação de alguns poucos exemplos, sem maiores aprofundamentos, como é o caso das justificativas usadas com o quadrado. Tal classificação denota a extensão do processo educativo a ser percorrida na busca da ascensão intelectual citada no item anterior.

3. Entre as causas dos erros cometidos, e na raiz de grande parte das dificuldades apresentadas pelos alunos nesta questão, destaca-se a insuficiência de conhecimentos elementares de Geometria Plana, especialmente a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, que por sua vez é utilizada para a justificativa da soma dos ângulos internos de um quadrilátero. Talvez a origem do problema resida no fato de estes temas serem tratados quase que exclusivamente no ensino fundamental.

4. Os professores, de um modo geral, têm o hábito de utilizar provas e demonstrações em seu trabalho, mas quase sempre com o emprego de metodologias meramente expositivas, pouco atraentes por si, e com a proposição de atividades em que estas práticas são simplesmente esquecidas, com a excessiva priorização da resolução de problemas através da substituição de números por fórmulas, do seguimento de regras, da efetuação de cálculos e da obtenção de soluções essencialmente numéricas. A importância dada a estes quesitos durante o andamento do curso acaba se impondo, peremptoriamente, em detrimento de tarefas abertas, que exijam um maior envolvimento com ações interiorizadas dirigidas à generalidade, desprendidas de concretizações particulares, e que, por insuficientes, deixam de gerar repercussão entre o público-alvo.

5. Muitas vezes os alunos, quando instados, assumem uma opinião francamente favorável à produção de justificativas, admitindo mesmo ser o método mais eficaz para a aquisição de conhecimentos. Contudo, o desempenho geral dos sujeitos mostrado nesta pesquisa, bem como a substância dos depoimentos colhidos, funcionando como um contraponto ao discurso, deixam a impressão de que, na verdade, os discentes são levados a evitar tais iniciativas por uma questão de comodismo ou falta de hábito, numa atitude que, tomada coletivamente, carrega o potencial de induzir o professor a efetivamente perenizar a situação descrita anteriormente.

Reflexões para Futuras Pesquisas

Longe de pretender esgotar o assunto, este trabalho, ao contrário, suscita novas inquietações, haja vista a Matemática, que não sendo uma ciência experimental, exige necessariamente o emprego de provas e demonstrações para a verificação de propriedades, teoremas, ajustes, entre outros, a ela relacionados.

Uma leitura superficial de alguns livros didáticos revelou a quase inexistência de problemas em aberto envolvendo a soma de ângulos internos de um quadrilátero qualquer. Poucos contêm a demonstração de tal propriedade, ou mesmo chegam a contemplar esta temática.

Qual a influência do livro didático nesse panorama?

Neste contexto cabe ao professor um papel primordial. Fazendo sua parte, deve incentivar seus alunos à construção de conjecturas. Eles, por sua vez, diante de exemplos empíricos, deveriam ser levados a pensar: “Será válido em qualquer situação? Como proceder?”

Se a formação do docente não valorizou os aspectos de provas e demonstrações, é possível que ele próprio não esteja igualmente convicto de sua importância, ou talvez não saiba como praticá-los de maneira eficaz em sala de aula.

Finalizando, destacam-se o aprendizado e a oportunidade de reflexão proporcionada pela condução deste estudo, sabendo da importância de perseverar na abordagem de conteúdos enriquecidos pelas correspondentes provas matemáticas, utilizando na medida do possível estratégias que contemplem as modernas mídias disponíveis ou, ao menos, atuando em sala de aula com iniciativas que busquem desenvolver no aluno o interesse, ou a necessidade de construir argumentações coerentes e justificativas consistentes, como pede a boa prática desta ciência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo A. G. & MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. **Iniciação à demonstração apreendendo conceitos geométricos.** 23ª reunião da ANPED, 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br>. Acesso em: 20/10/2009.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. PIMM (ed.). **Mathematics Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton, 1988, pp. 216-235.

______. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. **Les Cahiers du Laboratoire Leibniz**, Grenoble, n. 109, 2004.

______. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, vol.18, nº 2, Mai 1977, pp. 147-176.

BARBOSA F. S. S. **Argumentação e prova no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CARLOVICH, M. **A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para 3º e 4º ciclos do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

CASTILHO, Antonio Paulo Ferreira de & PESCUMA, Derna. **Projeto de Pesquisa.** O que é? Como fazer? 2ª ed. São Paulo- SP: Olho d'Água, 2005.

CHAZAN, D. Quasi-empirical views of mathematics and mathematics teaching. **Interchange, v.** 21, n.1, 1990, pp. 14-23.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. **A Experiência Matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

______. **Descartes' Dream**. New York: HBJ Publishers, 1986.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Como ensinar Matemática hoje? **Temas e Debates**, SBEM, ano II, nº 2, 1989, pp.15-19.

DE VILLIERS, M. **Rethinking Proof with Geometer's Sketchpad**. USA: Key Curriculum Press, 1999.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Paris: Peter Lang, 1995.

GARNICA, A. V. M. Etnoargumentações: trajetória de um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. In: **ProfMat –** Congresso Nacional de Professores de Matemática, 2002, Viseu-Portugal. Actas – ProfMat – Viseu, 2002. Lisboa/Viseu (Portugal): Associação dos Professores de Matemática e Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

GOUVÊA, Filomena A. Teixeira. **Apreendendo e ensinando geometria com a demonstração**: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado – PUC/SP, São Paulo, 1998.

GIL, Antônio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 1996.

HEALY, S. V. L. & HOYLES, C. Justifying and Proving in School Mathematics. **Technical Report**, University of London, Institute of Education, London, 1998.

JAMELI, S. M. **Abordagens no ensino de prova; a argumentação na Matemática escolar:** análise de uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional) – Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

MAIOLI, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

KELLER, O. **Essai sur le calcul et l'algébre en Egypte antique**. IREM de Lyon, doc. n. 57, Willeurbanne CEDEX, 1986.

MARTZLOFF. J. C. **Histoire des mathématiques chinoises**. Paris: Masson, 1998.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

PEREZ, Geraldo. A realidade sobre o ensino de geometria de 1º e 2º graus no Estado de São Paulo. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 4, 1995, pp. 54-62.

PIETROPAOLO, R. C**. (Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática**. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2005.

INTERNET

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 14 ago. 2009.

FONSECA, L. **A Demonstração e os Futuros Professores de Matemática da Educação Básica**. ESE de Viana Castelo, 2005. Disponível em: http://www.mytwt.net/cibem5/MyFiles/outros/Lina_Fonseca.pdf. Acesso em: 13 ago. 2009.

HEALY, Siobhan Victoria (Coord.). **Argumentação e Prova na Matemática Escolar** – Descritivo do projeto enviado e aprovado pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), 2005. Disponível em: http://www.teleduc.pucsp.br/cursos/aplic/index.php?cod_curso=323. Acesso em 20 nov 2005.

KNUTH, E. The rebirth of proof in school mathematics in the United States. **Proof Newsletter**, May/June 2000. Outubro, 2000. htttp:/www.cabri.image.fr/Preuve/ Newsletter/000506

NASSER, Lílian; TINOCO Lucia. **Argumentação e Provas no Ensino de Matemática**. 2.ed. Rio de Janeiro (RJ): Projeto Fundão – IM/UFRJ, 2001. pp.1-10. Disponível em: http://www.teleduc.pucsp.br/cursos/aplic/index.php?cod_curso=323. Acesso em 17 ago 2005.

ANEXOS

Anexo 1. Tabelas

Tabela 5. Caracterização dos sujeitos em relação à afirmação se verdadeira ou falsa

Codificação	Verdadeira	Falsa	Em Branco
Sujeitos	1, 2, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 48	3, 4, 12, 26, 29, 46, 49, 50	8, 10, 14, 18, 19, 28, 34, 47

Tabela 6. Caracterização dos sujeitos em relação às justificativas de acordo com a codificação acordada

Codificação	0	1	2a	2b	3	-2	-1
Sujeitos	3, 4, 5, 9, 12, 13, 16, 22, 25, 26, 32, 37, 39, 42, 46, 49, 50	1, 6, 7, 11, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 30, 31, 35, 36, 38, 40, 41, 45, 48	27	33	15, 44	2, 8, 10, 14, 18, 29, 34, 43, 47	28

Anexo 2. Primeira versão em português do Questionário

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer

b é um número inteiro qualquer

2*a* e 2*b* são números pares quaisquer

2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6

2 + 4 = 6   4 + 4 = 8

2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

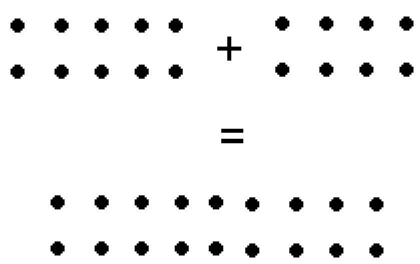
Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4

6 = 2 x 3

14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

	SIM	NÃO	NÃO SEI
Resposta de Artur:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Beth:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Célia:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Duda:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Érica:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Franklin:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Hanna:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

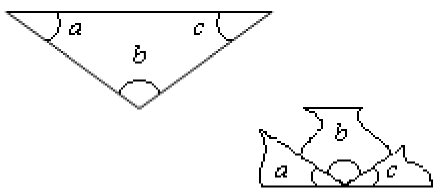
Minha resposta:

G1: Amanda, Bia, Cíntia, Dario, Edu, Fernando e Hélia estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando se soma os ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero
e também para um isósceles e a
mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é Verdadeira.

Resposta de Dario

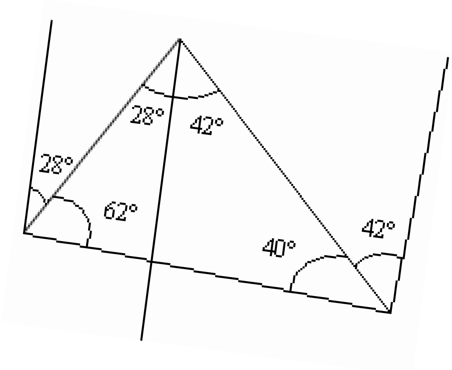
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns
triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	Total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Hélia

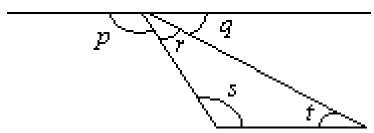
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



(90º - 28º) + 28º + 42º + (90º - 42º) = 180º
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta da Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
$p = s$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.

$p + q + r = 180º$.Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180º$.
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo

e terminar olhando o caminho por onde começou, você

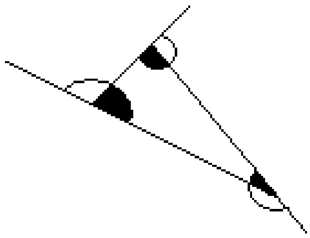
deve ter girado um total de 360º. Você pode ver que cada

ângulo esterno quando somado ao ângulo interno deve dar

180º porque eles formam uma reta.

Isso faz um total de 540º. Cálculo: 540º - 360º = 180º.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.



Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se estivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Para cada item, circule SIM (1), NÃO (2) ou NÃO SEI (3)

A afirmação é:

Quando se soma os ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

	SIM	NÃO	NÃO SEI
Resposta de Amanda:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Bia:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Cíntia:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Dario:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Edu:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Fernando:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Resposta de Hélia:			
Contem um erro.	**1**	**2**	**3**
Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.	**1**	**2**	**3**
Mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	**1**	**2**	**3**
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	**1**	**2**	**3**

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soa as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

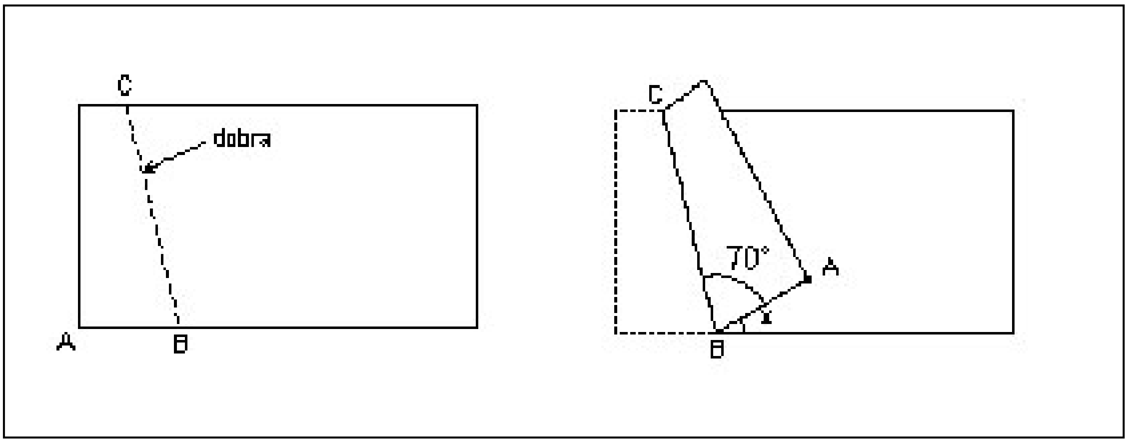
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Justifique sua resposta.

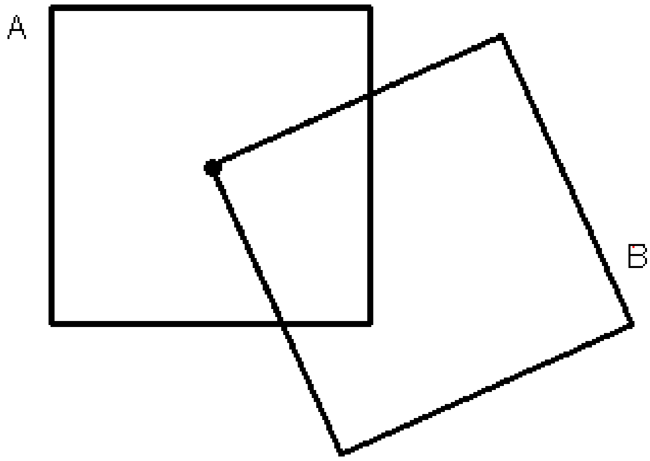
G4. Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5. A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

Anexo 3. Questionário Piloto

A1. Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer

b é um número inteiro qualquer

2a e 2b são números pares quaisquer

2a + 2b = 2 (a + b)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 =6

2 + 4 = 6 4 + 4 = 8

2 + 6 = 8   4 + 6 =10

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira

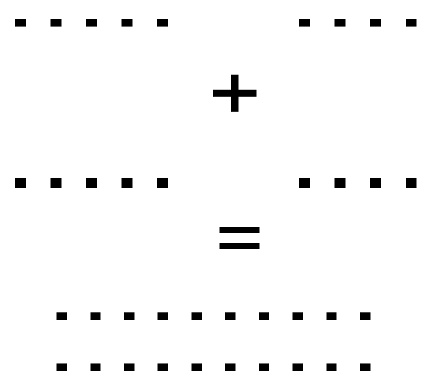
Resposta de Duda

Números pares terminam em 0,2,4,6 ou 8.

Quando você soma dois destes, a Resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4

6 = 2 x 3

14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se estivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A Afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostrar que a afirmação é sempre verdadeira.			Mostrar que a afirmação é verdadeira apenas para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Beth	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Duda	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Franklin	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Hanna	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores de 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A Afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5. Sabemos que:

4! Significa 4 x 3 x 2 x 1

5! Significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** É um número par?

Justifique

b) O que significa **8!**?

c) **8!** É um múltiplo de 21?

Justifique

d) **62!** É um múltiplo de 37?

Justifique

e) Pedro calculou **23!**

Sem calculadora, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

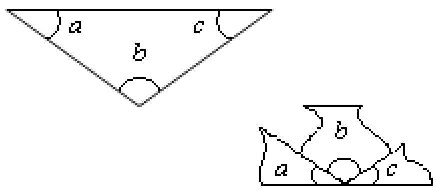
Justifique.

G1. Amanda, Dário, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero
e também para um isósceles e a
mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é Verdadeira.

Resposta de Dario

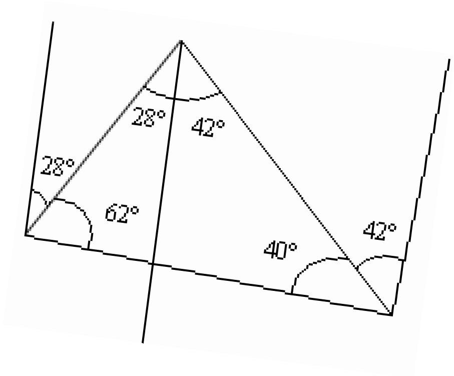
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	Total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

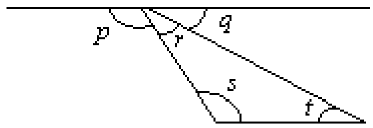


(90º - 28º) + 28º + 42º + (90º - 42º) = 180º

Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta da Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
$p = s$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.

$p + q + r = 180º$.Ângulos numa linha reta.

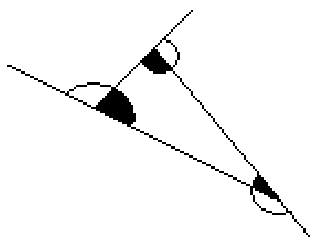
Logo $s + t + r = 180º$.

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360º. Você pode ver que cada ângulo esterno quando somado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta.

Isso faz um total de 540º. Cálculo: 540º - 360º = 180º.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se estivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostrar que a afirmação é sempre verdadeira.			**Mostrar que a afirmação é verdadeira apenas para algumas números pares.**		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soa as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

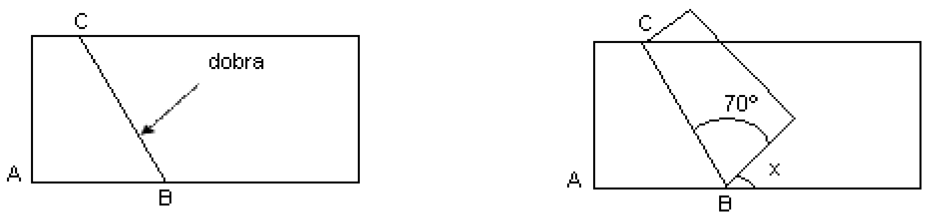
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Justifique sua resposta.

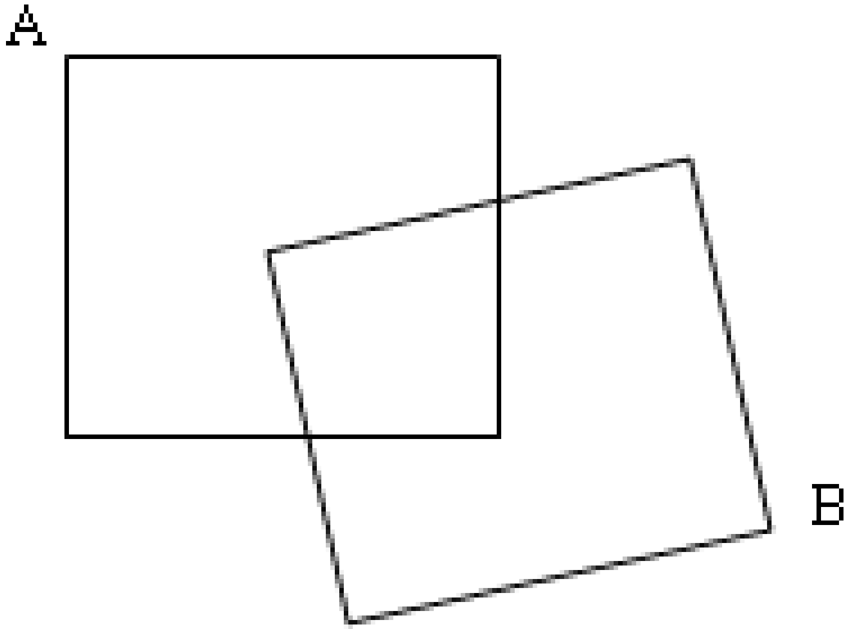
G4. Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo, obter o valor de X.



Justifique sua resposta.

A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

G5. Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta.

Anexo 4. Modelo Final

A1. Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer

b é um número inteiro qualquer

2a e 2b são números pares quaisquer

2a + 2b = 2 (a + b)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4 4 + 2 =6

2 + 4 = 6 4 + 4 = 8

2 + 6 = 8 4 + 6 =10

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

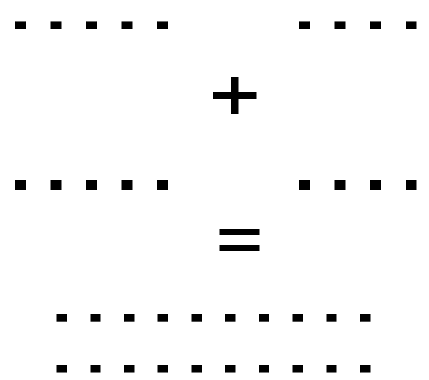
Resposta de Duda

Números pares terminam em 0,2,4,6 ou 8.

Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4

6 = 2 x 3

14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostrar que a afirmação é sempre verdadeira.			Mostrar que a afirmação é verdadeira apenas para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Beth	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Duda	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Franklin	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Hanna	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores de 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zeca precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5. Sabemos que:

4! Significa 4 x 3 x 2 x 1

5! Significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** É um número par?

Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** É um múltiplo de 21?

Justifique.

d) **62!** É um múltiplo de 37?

Justifique.

e) Pedro calculou **23!**

Sem calculadora, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

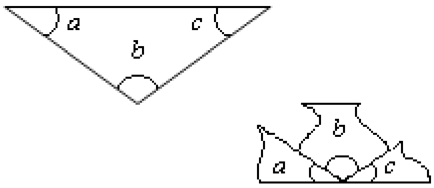
Justifique.

G1. Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo equilátero
e também para um isósceles e a
mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

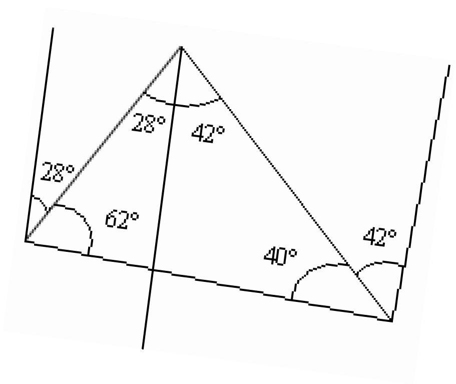
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	Total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Hélia

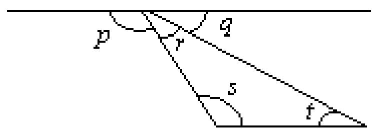
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



(90º - 28º) + 28º + 42º + (90º - 42º) = 180º
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

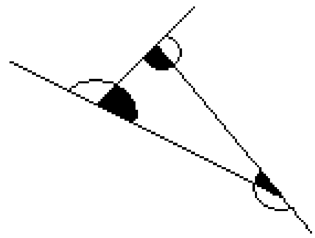


Afirmações	Justificativa
p = *s*	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
q = *t*	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.

p + *q* + *r* = 180º Ângulos numa linha reta.
Logo *s* + *t* + *r* = 180º.
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda a volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360º. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta.
Isso faz um total de 540º. Cálculo: 540º - 360º = 180º.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostrar que a afirmação é sempre verdadeira.			**Mostrar que a afirmação é verdadeira apenas para alguns números pares.**		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Dario	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não Sei	Sim	Não	Não Sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo-retângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

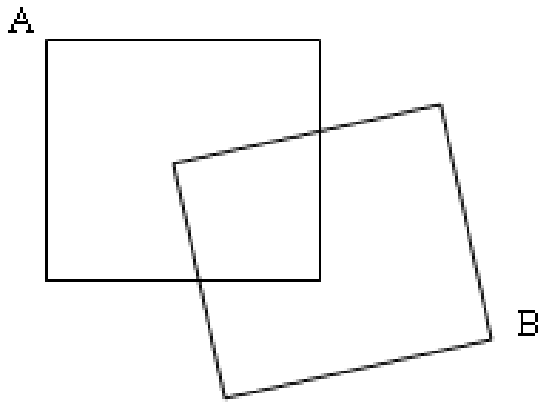
Justifique sua resposta.

G4. Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo, e obtenha o valor de X.

Justifique sua resposta.

G5. A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta.

Anexo 5. Capa do Questionário

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AProvaME

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

Anexo 6. Normas de Conduta para Aplicação da Pesquisa

- Apresentar-se para a classe como um professor mestrando em Educação Matemática e participante de um projeto que faz parte do trabalho final de seu curso.
- Este projeto tem por objetivo pesquisar o ensino de prova, demonstrações e argumentações em Matemática, não é avaliativo e os resultados são para tentar proporcionar possíveis mudanças no currículo desta disciplina.
- É uma pesquisa a nível estadual, serão 81 turmas (sic) de escolas particulares e/ou públicas, e a mesma já foi também objeto de pesquisa internacional.

Atenção:

- Não deve haver interferência por parte dos aplicadores;
- Se possível, aplicar o questionário em todas as classes ao mesmo tempo;
- Tempo mínimo para preenchimento igual a 50 minutos;
- Se a escola permitir, liberar a saída dos alunos após a permanência mínima;
- O aluno deve usar apenas caneta.

Anexo 7. Amostra de 50 protocolos selecionados

Nº	Nº ORIGINAL	APLICADOR	TURMA	ALUNO
1	1270	MARCILIO	8A	AGNES
2	100	ALVESMAR	ABC	ALYNE
3	369	BENEDITA	CFD	ANA L. S. PRIANTI
4	1	ALEXANDRE	8C	ANDERSON
5	929	JULIO CESAR	1A	ANDRÉ
6	1303	MARIA ESTELA	UNI-A	BRUNA M.
7	955	LOURIVAL	1A	BRUNO
8	944	JULIO CESAR	1A	CAIO
9	1899	WELLINGTON	A	CAMILA S
10	106	ALVESMAR	ABC	DAIANE
11	55	ALEXANDRE	8A	DANIELA
12	1754	SUELLI	8B	DANIELA
13	1582	PAULO	B	DANIELE MARTINS
14	433	EDNA	B	DANIELLE D.
15	434	EDNA	B	DEBORA J.
16	1672	SILVIANE	8B	E40
17	1713	SILVIANE	8C	E81
18	534	EDNALDO	8B	ERALDO
19	747	FLAVIO	8C	ERICK S. NOVAES
20	963	LOURIVAL	1A	FELIPE G
21	1433	MIRTES	1B	GABRIEL
22	1407	MIRTES	1A	GEZINARA
23	1504	MOACIR	B	ISADORA
24	327	BENEDITA	CFA	ISAIAS S. HENRIQUE
25	441	EDNA	B	JEFFERSON
26	1015	LOURIVAL	1D	KAREN
27	1326	MARIA ESTELA	UNI-A	KARINA
28	631	FABIANA	ABC	LEANDRO
29	942	JULIO CESAR	1A	LEANDRO B
30	1835	VALDENIR	B	LETÍCIA F.
31	915	JOSE LEONCIO	C	LUCAS DA S.
32	852	JOSE LEONCIO	A	LUCAS H.
33	1285	MARCILIO	8A	MARIANA
34	200	AMADEU	B	MARIANA ELISETE
35	1301	MARCILIO	8B	MARYANN
36	562	FABIANA	ABC	MAYARA
37	891	JOSE LEONCIO	B	NELSON M.
38	1268	MARCILIO	8A	PEDRO
39	1455	MIRTES	1C	PRISCILLA
40	1721	SUELLI	1D	REBECA
41	1330	MARIA ESTELA	UNI-B	RENATA
42	636	FABIANA	ABC	RENATO
43	453	EDNA	B	SAMIRA
44	249	ANDERSON	A	SERGIO
45	1371	MIRTES	1A	SILENE
46	364	BENEDITA	CFB	TALITA RODRIGUES
47	1356	MARIA ESTELA	BOSQUE	THAIANE
48	1030	LOURIVAL	1D	VALMIR
49	2013	JULIO CESAR	8A	VINI P
50	779	JONAS	ABC	15

Anexo 8. Alunos selecionados para entrevistas

	Escolhido por	Nº	Nome	Série	Escola	Aplicador
1	Amadeu	1	Agnes C. V. M.	8A	Colégio São Joaquim	Marcilio
2	Luiz D.	3	Ana Luiza S. E. Prianti	1D	EE Prof. Francisco F. F. da Silva	Benedita
3	Jonas	7	Bruna M. Sanches	1A	Uni A – Colégio	Estela
4	Estela	15	Daniele Duarte	1B	E.E. Vicente Peixoto	Edna
5	Amadeu	19	Flávia C. Franzoni	8B	EE Prof. Getulio Nogueira de Sá	Silviane
6	Júlio	20	Gabriel Davies Jr.	1B	E.E. Cap. Bernardo F. Machado	Mirtes
7	Luiz D.	21	Isadora R. dos Santos	1B	E.E. Narcísio Álvares Lobo	Moacir
8	Júlio	24	Joice Nunes Moura	1A	E.E. MMDC	Fabiana
9	Júlio e Estela	25	Karina V. Teixeira	1A	Uni A – Colégio	Estela
10	Amadeu	26	Leonardo C. Pereira	1D	E.E.MMDC	Fabiana
11	Luiz D. e Júlio	32	Marcelo C. Pereira	1D	Romeu Montouro	Lourival
12	Estela	34	Mariana Elisete	1O	E.E.Dr. Antenor Soares Gandra	Amadeu
13	Luiz D. e Júlio	37	Nelson Machado	1B	Colégio Adv. de Itapecerica da Serra	José Leôncio
14	Estela	41	Renata Silva dos Santos	1B	Uni A – Colégio	Estela
15	Amadeu e Jonas	42	Renato D. Goya	1A	E.E. MMDC	Fabiana
16	Jonas	44	Sergio Silva Borg Jr.	8A	SEMEF	Anderson
17	Jonas	50	Walmir C.D. Silva	1D	Romeu Montouro	Lourival

Orientações para a Organização das Entrevistas

1. Em princípio, cada mestrando se responsabiliza pelas entrevistas dos alunos que escolheu. Entretanto, alguns sujeitos foram escolhidos por dois mestrandos e serão entrevistados apenas por um deles. Assim, as entrevistas foram redistribuídas como abaixo, levando em conta o critério acima, as tarefas já executadas e o fato de que um mestrando escolheu 5 sujeitos.

   Amadeu: sujeitos 1, 19, 26

   Jonas: sujeitos 7, 42, 44, 50 (a entrevista do 42 será partilhada com Amadeu)

   Luiz D.: sujeitos 3, 21, 32 (a entrevista do 32 será partilhada com Julio)

   Julio: sujeitos 20, 24, 25, 37 (a entrevista do 25 será partilhada com Estela, a entrevista do 37 será partilhada com Luiz D.)

   Estela: sujeitos 14, 34, 41.

2. Podem ocorrer trocas de sujeitos entre os mestrandos, desde que explicitadas as razões e com o acordo dos orientadores (email para Sonia e Janete, com cópia para Lulu).
3. Amadeu completará a tabela acima com os nomes das escolas e os nomes completos dos sujeitos a serem entrevistados, alem de conferir os outros dados. Em seguida, envia um arquivo com a nova tabela para: Jonas, Luiz, Julio, Estela, Sonia, Janete, com cópia para Lulu.
4. As entrevistas deverão ser todas realizadas entre 7 e 30 de novembro.
5. As entrevistas não precisam integrar o texto do exame de qualificação.
6. As transcrições das entrevistas devem estar prontas até 15/12/06, para que os mestrandos possam trabalhar nas análises nas férias.
7. De hoje, 24/10/06, até o dia 4/11/06, cada um dos mestrandos fica responsável por:
   a) contatar IMEDIATAMENTE os aplicadores correspondentes aos seus sujeitos a serem entrevistados, para começar a cuidar dos detalhes da entrevista; avisar imediatamente os mestrandos e orientadores (em email único endereçado a)

      Jonas Borsetti Silva Santos
      Maria Estela C. de Oliveira de Souza
      Amadeu Tunini Doro
      Julio Cesar Porfirio de Almeida
      Luiz Donizeti Ferreira
      Janete Bolite Frant
      Sonia Pitta Coelho

      com cópia para Lulu), no caso de existir impossibilidade de algum sujeito para a entrevista; empenhar-se em conseguir os agendamentos pois em caso de impossibilidade os sujeitos serão substituídos, a critério dos orientadores;
   b) Agendar datas para as entrevistas e cuidar de todas as providencias práticas para o bom andamento desta (lugar, tempo, gravador, autorização dos pais se for o caso, cópia dos protocolos do sujeito e

protocolo em branco para o caso de ser necessário que o sujeito escreva algo, etc., etc., etc....).

c) Elaborar os roteiros de entrevista dos seus sujeitos. Para isso, levar em conta: as posições desses sujeitos nas suas tabelas, às categorias e/ou grupos resultantes da sua análise e, muito importante, os protocolos dos seus sujeitos. Colocamos abaixo algumas questões elaboradas pelo Amadeu (G4 e G5), para dar uma idéia:

ALUNO 26:

- Na questão G4 você usou a letra y para representar um ângulo. Você "chutaria" um valor para esse ângulo? Qual? Por quê?
- Na questão G5 você disse que dividindo a quadrado A em 4 partes, formaria dois triângulos retângulos semelhantes. A sua afirmação está correta, mas para eu entender melhor, o quê você quis dizer com a palavra semelhantes?
- Se girarmos o quadrado B em torno do centro do quadrado A, ajudaria a resolver e justificar a questão? Por quê?

ALUNO 42:

- Na questão G4 você não apresentou uma resposta e nem justificativa, olhe-a e veja se lembra o por quê?
- Na questão G5, você respondeu corretamente e disse que dava para ver claramente que a resposta era 1/4. Se eu não consigo ver claramente, você poderia me explicar de alguma forma? Como?
- Você acha que exercícios que pedem justificativa pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento (raciocínio) matemático? Porquê?

d) examinar as posições dos outros sujeitos (os que não são do seu grupo de entrevista) nas suas tabelas e/ou categorias de análise, e elaborar eventuais questões de entrevista (para alguns deles) que sejam do interesse de sua pesquisa; lembrem-se, quanto mais vocês conhecem sobre a amostra, em relação às suas questões, mais vocês podem escrever sobre a sua pesquisa. Os mestrandos acolherão, ouvidos os orientadores, questões de seus colegas. Um exemplo: digamos que Estela, depois de olhar a posição do sujeito 19 nas suas tabelas e categorias de análise, decide encaminhar duas questões para o roteiro de entrevista dele. Para isso, deve:

e) Enviar, até 2 de novembro, um feriado, essas questões para o responsável pela entrevista do sujeito 19 (Amadeu), com cópia para os orientadores (Sônia e Janete). Analogamente para os outros mestrandos que desejem incluir questões.
f) De posse de suas questões e das enviadas por seus colegas, cada mestrando elaborará os seus roteiros de entrevista, uma para cada sujeito do seu grupo.
g) Enviar, até 4 de novembro, esses roteiros de entrevista (3 ou 4, dependendo do mestrando) aos orientadores (Janete e Sonia), com cópia para Lulu.
h) No dia 6/11, com inicio às 16h30, conforme email enviado a todos na 2ª feira pela Janete e reproduzido no email correspondente a esse arquivo, haverá o 2º workshop de dissertações sobre questionários. Nesse dia, vamos conversar sobre os roteiros e fazer entrevistas simuladas. Para isso, trazer:
    - Gravador (com pilha), *pen-drive* com gravador ou outro meio de registro
    - Cópia dos roteiros de entrevistas
    - Cópias dos protocolos de cada um dos sujeitos do seu grupo de entrevista
    - Cópia em branco de um questionário (álgebra ou geometria, dependendo das suas questões de investigação).

APÊNDICES

Apêndice 1 – Roteiro base para entrevista

ALUNO 15:

1. Na questão G3 você respondeu verdadeiro para a afirmação, acertando-a. O que fez você dar essa resposta e justificar usando triângulos? Você tomou como base as questões G1 e G2?
2. Você usou letras para representar os ângulos em sua justificativa. Por quê?
3. Você acrescentaria mais alguma coisa na sua justificativa?

ALUNO 25:

1. Na questão G3 você respondeu verdadeiro para a afirmação, acertando-a. O que fez você dar essa resposta?
2. Você não apresentou uma justificativa para sua resposta. Por quê?
3. Observe o questionário novamente e tente justificar sua afirmação.

ALUNO 34:

1. Quais os motivos que levaram você responder não sei na questão G3?
2. Observe o questionário novamente e tente responder.

ALUNO 41:

1. O que lembra para você a palavra quadrilátero?
2. Na questão G3 você respondeu ser verdadeiro a afirmação, acertando-a, e justificou usando como exemplo o quadrado. Por quê?
3. Você poderia ter usado um outro quadrilátero qualquer como exemplo? Por quê?
4. Observe as questões G1 e G2, elas ajudariam você a justificar a questão G3 de uma outra forma? Por quê?

Apêndice 2 – Transcrição da Entrevista 1

Participantes: Pesquisador (P) e aluno (A)

No ano passado nessa mesma época você respondeu dois questionários sobre questões de Geometria e Álgebra que em alguns momentos você realizava cálculos, e outros, você tinha que justificar sua resposta.

P. Você realiza ou já realizou atividades desse tipo no decorrer das aulas de Matemática? Dê alguns exemplos.

A. *Não, fazemos mais exercícios de cálculo mesmo.*

P. Na questão G3 você respondeu verdadeiro para a afirmação, acertando-a. O que fez você dar essa resposta e justificar usando triângulos?

A. *Eu não me lembro bem, mas foi de um exemplo que a professora deu na lousa e eu tive uma idéia de como poderia ser não que era uma resposta exata, eu dei continuidade do que ela fez na lousa e acabou dando certo.*

P. Você usou letras para representar os ângulos em sua justificativa. Por quê?

A. *Porque no começo a professora ensinou a mexer com esse tipo de letra e o que cada letra representava assim, só que não me lembro muito.*

P. No caso você quis usar essas letras para representar o que?

A. *Para representar os lados do retângulo, cada grau dela.*

P. Você acrescentaria mais alguma coisa na sua justificativa?

A. *Acho que não.*

P. Na questão G4 você procurou usar em várias contas o ângulo de 90º, veja seus registros. Você pode marcar na figura esse ângulo de 90º que você usou?

A. *Não entendi a pergunta.*

P. Você fez várias contas com o ângulo de 90º, você pode marcar ele ai na figura?

A. *Não, eu não sabia responder eu não consegui chegar num resultado.*

P. Você lembra por que quis usar esse ângulo?

A. *Não lembro.*

P. Em relação à questão A4, você sabe explicar o que é um múltiplo de 3?

A. *Bom múltiplo de 3 seria três vezes algo é o que eu acho.*

P. E um múltiplo de 6?

A. *Múltiplo de 6 seria seis vezes algo.*

P. Em relação à questão A5e, por que você somou 20 com 3?

A. *Porque pela lógica do 20 para o 23 faltava 3.*

P. Você sabe o que significa algarismo?

A. *É um número, o último número, ah... é um número normal.*

Apêndice 3 – Transcrição da Entrevista 2

Participantes: Pesquisador (P) e aluno (A)

No ano passado nessa mesma época você respondeu dois questionários sobre questões de Geometria e Álgebra que em alguns momentos você realizava cálculos, e outros, você tinha que justificar sua resposta.

P. Você realiza ou já realizou atividades desse tipo no decorrer das aulas de Matemática? Dê alguns exemplos.

A. Sim, tem coisa que é mais na teoria e outras na prática a gente tem que fazer conta e outras não, só afirmar se é verdadeiro ou falso que o enunciado está dando à alternativa.

P. Nenhuma que você tem que justificar a sua resposta?

A. Sim tem que ver da onde saiu na teoria da onde saiu à afirmativa se é verdadeira ou falsa.

P. Você pode dar um exemplo, você se recorda de alguma atividade?

A. Não me lembro de nenhum. Teve a do cubo que agente tinha que ver os lados e a altura dele e tinha que explicar a teoria da onde surgiu à resposta.

P. Como assim você explicar?

A. Tem que ver da onde saiu à lógica de fazer a conta e descobri a quantidade de cubos.

P. Em relação à questão G1, porque você escolheu para a sua resposta a resposta da Cintia?

A. Não lembro.

P. Você tinha várias respostas para analisar que falava sobre a soma dos ângulos internos do triângulo e aí apresentava várias respostas numa primeira vez você tinha que analisar as respostas e dar aquela que você concordaria que você daria como resposta?

A. Eu achei que foi da Cíntia.

P. Por quê?

A. *Porque eu achei a dela a mais lógica do meu ponto de vista, eu faria à mesma coisa que ela fez, então achei que a dela é a mais correta.*

P. Por que você achou que a dela é a mais correta.

A. *Porque eu acho que pensei do mesmo jeito que ela, eu faria do mesmo jeito.*

P. O que te chamou a atenção na resposta da Cíntia?

A. *A soma dos ângulos que ela fala dos ângulos internos. Porque ela mostra cada um deles o que é e de onde que saiu.*

P. Agora para resposta que você daria para que o seu professor escolheria você colocou a resposta do Edu. Por que você entende que seu professor escolheria a resposta do Edu?

A. *Porque ele mostra os ângulos, que os ângulos caminham que ele fala de cada ângulo também, só que ele explica na teoria.*

P. Como assim, explica na teoria?

A. *Ele dá o total, aí ele reparte cada ângulo, e chega à conclusão.*

P. Na questão G2, por que você entende ser necessário construir uma nova demonstração para a soma dos ângulos internos do triângulo?

A. *Silêncio....... não sei.*

P. Porque aqui fala da afirmação não é isso, olha quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer o resultado é sempre 180º e ele fala suponha que já foi provado isso daqui. Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer o resultado é sempre 180º. Então você tem diante disso que analisar e escolher uma das duas: se ele precisaria fazer uma nova demonstração ou não precisaria fazer nada porque a afirmação já foi provada e você assinalou que ele precisaria fazer uma nova demonstração, por quê?

A. *Para ele poder provar o que ele estava dizendo.*

P. Você acredita então que ele precisa de uma nova demonstração. E essa afirmação que suponha que já foi provado no começo da questão ele não pode considerar?

A. *Não, ele precisa de um novo número e de novos exemplos para ter certeza.*

P. Seu professor apresenta as demonstrações, deduções das fórmulas e teoremas no decorrer das aulas?

A. *Apresenta.*

P. Você prefere assim ou gostaria que fossem apresentados diretamente sem as demonstrações?

A. *Não, com as demonstrações é melhor, é mais fácil de aprender.*

P. E você realiza também algumas demonstrações de fórmulas? O professor explica para vocês tentarem deduzir algumas?

A. *Sim, ele passa as fórmulas para a gente conseguir fazer as coisas e dá para deduzir sim.*

P. Em relação à questão G3 você respondeu que a afirmação é verdadeira, mas, não apresentou uma justificativa, por quê?

A. *Porque num quadrilátero os ângulos dão 360º, não sei.*

P. Como você poderia justificar, vamos buscar fazer uma tentativa?

A. *Sim*

P. Observe as questões G1 e G2 que falam da soma dos ângulos internos de um triângulo. Observando elas, será que podem te ajudar a pensar em uma justificativa para a questão G3?

A. *Silêncio....*

P. O que você usaria como exemplo para começar a sua justificativa?

A. *Cada lado tem um ângulo e a soma dos quatro é 360º eu não sei por que coloquei verdadeira, não lembro.*

P. Você falou que tem quatro ângulos e somando dá 360º e que tipo de quadrilátero você usaria?

A. *Um cubo?*

P. O cubo é uma figura tridimensional e o quadrilátero é uma figura plana.

A. Então um quadrado, um retângulo.

P. Só os dois?

A. Silêncio...

P. Você falou o retângulo e o quadrado. A soma dos ângulos internos deles dá 360º ?

A. Dá

P. Quanto mede os ângulos internos do quadrado e do retângulo?

A. Não sei.

P. Na questão G5 você respondeu corretamente, mas, não justificou, lembra o por quê?

A. Não lembro.

P. Como você justificaria hoje?

A. Porque ele está um quarto do quadrado só na parte do quadrado no outro ele está naquela área.

P. Como você mostraria essa sua resposta?

A. Ele está só um quarto acima.

P. Mas, como você faria para mostrar que a resposta é um quarto?

A. Desenhar ele mais vezes, desenhar ele completar a figura.

P. Como assim?

A. Fazendo outros quadrados.

P. Quais outros quadrados, você está falando do quadrado A ou B?

A. Completar o quadrado A com mais quadrados iguais ao B, na mesma direção do B.

Apêndice 4 – Transcrição da Entrevista 3

Participantes: Pesquisador (P) e aluno (A)

No ano passado nessa mesma época você respondeu dois questionários sobre questões de Geometria e Álgebra que em alguns momentos você realizava cálculos, e outros, você tinha que justificar sua resposta.

P. Veja os questionários que você respondeu no ano passado. Você se lembra deles?....

A. Sim.

P. Eles têm questões para você escolher a melhor resposta, questões para calcular e para justificar sua resposta. Você está acostumado a fazer esses tipos de atividades?.... Quais?

A. Não, o que a gente aprende na escola, o que a gente faz é mais ligado à matéria, dado os exercícios que a gente tem que responder, calcular e responder, pronto.

P. Então o que você está acostumada a fazer em matemática é basicamente conta, cálculo?

A. É.

P. Quais os motivos que levaram você responder não sei na questão G3?

A. Primeiro porque eu não me interessei em fazer e depois, é porque normalmente, sei lá, ou porque não é tão aplicada à parte da escrita, como posso falar, da parte teórica e sei lá, eu acho que é mais porque eu não estava interessada em fazer a prova.

P. Mas, lendo a questão hoje, você entendeu ela?

A. Eu acho que sim.

P. Se fosse para responder hoje, você responderia ou, você se sente em condições de responder?

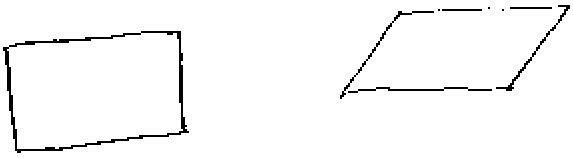
A. Eu acho que daria se eu pegasse.

P. Tudo o que está escrito na questão você compreende? Quadrilátero?

A. Quatro lados.

P. E a forma deles? ... Desenha dois para mim?

A.



P. Você desenhou um retângulo e um paralelogramo. Você sabe o que é ângulo interno, o que é quadrilátero e o que significa 360º. Você pode observar a questão novamente e tentar responder hoje?

A. Agora, ... não sei.

P. Eu te dou um tempo para responder.

A. E se eu não responder?

P. Tudo bem, é tentar resolver e não resolver, não é obrigado a fazer.

A. Eu tento.

P. Após alguns minutos...

A. Eu não sei, na teoria, como responder.

P. Não? Está bom.

A. Eu acho, sei lá que..., não dá.

P. Se você vai no retângulo. Quanto mede os ângulos do retângulo?

A. 90, todos 90.

P. E a soma?

A. 360.

P. Então, se você escrevesse isso estaria dando uma justificativa para o retângulo. Quando está falando em justificar, é dizer isso.

A. Ah, mas é que está escrito um quadrilátero qualquer, então seria vários, eu ia ter que fazer todos, sei lá.

P. Seria impossível fazer com todos.

A. Por isso que tem que ter uma teoria para isso e eu não sei essa teoria.

P. Na verdade você pode usar apenas um recurso para isso, mas, tudo bem depois podemos voltar, vamos para a próxima pergunta. O professor de matemática trabalha demonstração em sala de aula? Pede para justificar as respostas dos exercícios?

A. Professor que estou tendo agora ou os que já tive.

P. Fique livre para falar, o que você tem ou que já teve.

A. Eu acho que depende do professor, existiram professores que deram aula para mim que pediam para justificar a resposta, mas, muito querem saber o resultado da conta.

P. Então a maioria só quer o resultado?

A. Eu acho que sim.

P. Alguns poucos que passaram na sua vida pediram para justificar.

A. É.

P. Então o fato de justificar não é tão estranho a você.

A. Não.

P. Você deixou em branco as questões A5c e A5d. Você lembra o porquê?

A. Não.

P. Você acha que faltou alguma coisa?

A. Eu acho que não sabia.

P. Você lendo, consegue entendê-la?

A. Eu entendo, mas, responder eu não sei a resposta.

P. O item c está falando de múltiplo, você sabe o que é múltiplo?

A. Múltiplo é um número, um resultado gerado por um outro número.

P. Gerado como?

A. Através da multiplicação.

P. Está vendo o que está em negrito? Leia para mim.

A. 8.

P. E este sinal?

A. Não sei.

P. Este sinal na matemática chama fatorial e representa uma multiplicação, veja 4! e 5! acima. A pergunta é 8! é um múltiplo de 21? Você acha que é?

A. Não.

P. Por quê?

A. Sei lá, porque ele é ímpar.

P. Por que o 21 é impar e o 8 é par é isso, não sei?

A. É, mas o 5 é impar e eu coloquei sim, então não sei.

P. Você disse sim porque deu 120, que é número par. Quando você diz que não sabe, está dizendo que este caminho não é muito bom para pensar?

A. Estou dizendo que não sei qual é o caminho. Por esse caminho eu não sei se vou achar 21.

P. Quer experimentar?

A. Mas vai dar um número maior que 21, se 5! dá 120 então 8! vai dar maior.

P. E os múltiplos de 21, quais são?

A. 42, 84 e 168.

P. São todos múltiplos. E aqui, você acha que vai aparecer múltiplo de 21?

A. Pode ser.

P. Pode ser. Porque você acha que pode ser?

A. Se eu fizer a conta eu vou achar, eu acho.

P. E o item d?

A. Eu acho que o mesmo motivo da letra c.

P. Então 62! É um múltiplo de 37. Pelo mesmo motivo.

A. Pelo mesmo motivo do c é o d.

P. Na questão G4, você consegue chutar um valor?

A. Não, não chuto.

P. Se quiser chutar eu espero.

A. É em graus?

P. É em graus.

A. *40, não, não sei.*

P. É 40º. Você chutou certo. Agora você consegue falar porque chutou 40º?

A. *Porque 70, para 180 que é o valor da metade de 360, aqui também é 70 e 70 com 70 dá 140, para 180 falta 40.*

P. Isso, você falou a resposta correta e justificou direito, justificar seria isso, escreva para mim, eu quero ver a diferença da parte oral para a escrita, pode escrever como quiser.

A.

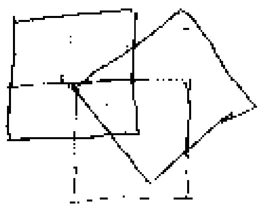
O valor de x deu 40°, pois no desenho forma-se metade de uma circunferência que é de 180° e se uma parte vale 70°, a outra igual, então também vale 70°, para 180° faltam 40°.

P. E a questão G5, consegue chutar um valor?

A. *1/4?*

P. Chutou direito de novo. Agora você pode dizer o por quê? Você que falar ou escrever?

A. *Não sei como explicar. Ele está no centro e ele vai pegar... seria a mesma coisa se eu tivesse assim aqui (abaixo), eu dividi em quatro, então 1/4, como explicar, não sei.*



B. Então você movimentou o quadrado e na posição que deixou, dividiu em quatro partes. Você deu um grande passo. Escreve isso.

A. *Mas, como?*

P. Escreve, movimentei e tal... É que o que você vai escrever aí, mesmo que não fique claro, tem a figura para mostrar o que você fez.

A.

Movimentando o quadrado B e deixando-o de uma forma visível de que era uma parte do quadrado, que estava dividido em quatro, que estava sendo usada.

P. Tudo bem, na hora que você movimentou a figura, a parte que era comum antes e que é comum agora, aparentemente são iguais?

A. Não.

P. Se tivesse que mostrar se são iguais, você teria algum caminho?

A. Eu acho que sim porque eles têm quatro lados, só que no anterior com medidas diferentes, só que eu acho que chegariam a 360.

P. Você atribuiria ao fato dos quatro lados.

A. Acho que sim.

P. E você falou em 360?

A. É quatro lados, 360 né.

P. Você associou o ângulo 360º.

A. É, eu acho que aqui eles são em medidas diferentes e aqui não.

P. Eu acho que é só, tem mais alguma coisa que você quer falar? Agora que você fez essas duas últimas, você gostaria de voltar na anterior, na questão G3?

A. Eu não sei como explicar.

P. Não tem nenhuma idéia? Nem uma pista?

A. Num quadrilátero dois lados têm necessariamente a mesma medida?

P. Não, mas aí você está pensando em lados e a questão fala em ângulos. Se você tiver um triângulo, qual é a soma de seus ângulos internos?

A. 180º.

P. Isso pode ajudar em alguma coisa?

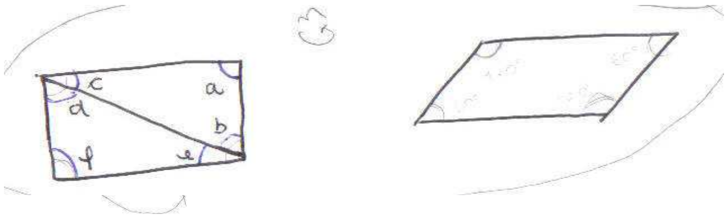
A. Porque é a junção de dois triângulos?

P. Faça, tente.

A. Cada triângulo tem 180 então juntando tem 360.

P. Escreva o que você acha.

A.



A soma interna dos ângulos de um quadrilátero é sempre 360°, pois ele é a junção de dois triângulos e a soma dos ângulos internos de triângulo é de 180°.

P. Então, obrigado.

Apêndice 5 – Transcrição da Entrevista 4

Participantes: Pesquisador (P) e aluno (A)

No ano passado nessa mesma época você respondeu dois questionários sobre questões de Geometria e Álgebra que em alguns momentos você realizava cálculos, e outras você tinha que justificar sua resposta.

P. Você realiza ou já realizou atividades desse tipo no decorrer das aulas de Matemática? Dê alguns exemplos.

A. Sim algumas vezes nós fazemos atividade de justificar, mas a maioria é de fazer contas mesmo. Por exemplo, agora nós estamos vendo trigonometria e é só cálculo.

P. E as atividades que você fez de justificar, você poderia dar exemplos de como foi?

A. Agora eu não sei se vou recordar porque são muitas né.

P. Como que era você não se recorda o que você tinha que justificar?

A. Falar como eu cheguei naquele resultado é isso.

P. Seria justificar uma afirmação ou deduzir uma fórmula por exemplo.

A. Não fórmula não é só mesmo justificar o porque do resultado da conta.

P. Em relação à questão G1, porque você escolheu para a sua resposta a resposta da Amanda?

A. Aqui eu fui mais pela lógica do exercício.

P. Que lógica é essa você pode explicar?

A. Ah... foi pelo desenho como ela mostrou os ângulos.

P. E por que você escolheu a resposta de Edu para seu professor?

A. Porque eles vão sempre por um lado mais justificado e a de Edu está mais detalhado tem mais justificativa.

P. Na questão G2, por que você entende ser necessário construir uma nova demonstração?

A. Porque ele teria que fazer um outro desenho pra mostrar que a soma dos ângulos do triângulo daria 180º.

P. Então você acredita que precisa construir uma nova demonstração?

A. *É precisa fazer para comprovar que a soma dos ângulos é 180º.*

P. Seu professor apresenta as demonstrações / deduções das fórmulas e teoremas no decorrer das aulas?

A. *Sim.*

P. Você prefere assim ou gostaria que fossem apresentados diretamente, sem as demonstrações?

A. *Com as demonstrações porque fica mais fácil de entender o conteúdo.*

P. Você já fez alguma atividade para demonstrar uma fórmula ou teorema?

A. *Já, agora a gente ta aprendendo trigonometria e a professora deu os desenhos e pediu para a gente demonstrar para ela.*

P. Em relação à questão G3, o que lembra para você a palavra quadrilátero?

A. *Lembra um quadrado.*

P. Você respondeu verdadeiro para a afirmação da questão G3 acertando-a e justificou usando quadrado, por que?

A. *Porque o quadrado tem os ângulos de 90º e somando os quatro ângulos daria 360º.*

P. Você poderia ter usado um outro quadrilátero qualquer como exemplo? Por que?

A. *Acho que poderia, porque existem outras formas de desenhar quadriláteros que a soma daria 360º.*

P. Para você um quadrilátero tem que ter só os ângulos de 90º para a soma dar 360º?

A. *É seria já que tem quatro lados e dividindo daria 90º cada um.*

P. E você não poderia ter um quadrilátero com outros ângulos, por exemplo um trapézio, a soma das medidas dos ângulos internos do trapézio não vão dar 360º?

A. *Podem dar também.*

P. Então, os ângulos não precisam ser só de 90º?

A. *É.*

P. Observe as questões G1 e G2, será que elas ajudariam você a justificar a questão G3 de uma outra forma? (Vou dar um tempo para você observar as questões e responder)

A. Tem outra forma aqui fala que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º e na resposta do professor que foi a de Edu a soma dos ângulos externos no final dariam 360º. Outra forma seria usar um quadrilátero não necessariamente o quadrado.

P. E como você faria para mostrar que a soma das medidas dos ângulos desse quadrilátero daria 360º?

A. Seria mostrando os valores dos ângulos mesmo acho que é o mais adequado.