Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP

Wagner Pulido Rodrigues

Uma Abordagem Conceitual de Volumes no Ensino Médio

Mestrado em Educação Matemática

São Paulo
2011

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP

Wagner Pulido Rodrigues

Uma Abordagem Conceitual de Volumes no Ensino Médio

Mestrado em Educação Matemática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**, sob a orientação do Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi**.**

São Paulo
2011

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

À Gessica, meu amor, minha companheira sem a qual esse trabalho não poderia existir.

Aos amados pais João e Edina, meu norte por toda a vida.

Agradecimentos

À Capes, financiadora da pesquisa.

Aos Docentes.

“A geometria existe por toda parte. Procure observar as formas regulares e perfeitas que muitos corpos apresentam. As flores, as folhas e incontáveis animais revelam simetrias admiráveis que nos deslumbram o espírito. A geometria repito existe por toda parte. No disco do sol, na folha da tamareira, no arco-íris, na borboleta, no diamante, na estrela-do-mar e até num pequenino grão de areia. Há, enfim, infinita variedade de formas geométricas espalhadas pela natureza. Um corvo a voar lentamente pelo céu descreve com a mancha negra de seu corpo, figuras admiráveis; o sangue que circula nas veias do camelo não foge aos rigorosos princípios geométricos; a pedra que se atira no chacal importuno desenha no ar uma curva perfeita! A abelha constrói seus alvéolos com a forma de prismas hexagonais e adota essa forma geométrica, segundo penso, para obter a sua casa com a maior economia possível de material. A geometria existe, como já disse o filósofo, por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la. O beduíno rude vê as formas geométricas, mas, não as entende; o sunita entende-as, mas não as admira; o artista, enfim, enxerga a perfeição das figuras, compreende o Belo e admira a Ordem e a harmonia! Deus foi o grande geômetra. Geometrizou a Terra e o Céu.”

O Homem que Calculava
Malba Tahan – Júlio César de Mello e Souza

RESUMO

A presente pesquisa dedicou-se à análise de parte dos materiais didáticos denominados "*Caderno do Professor*" e "*Caderno do Aluno*", distribuídos em 2008 e 2009 pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo aos professores e alunos de ensino médio das escolas públicas do Estado. Com vistas a uniformizar o currículo escolar do estado de São Paulo, os *Cadernos* foram elaborados para cada uma das disciplinas do currículo escolar, para cada série de ensino fundamental do ciclo II e do ensino médio, para cada um dos quatro bimestres letivos. Tal pesquisa restringiu-se ao exame da parte dos *Cadernos de Matemática* consagrada ao estudo do cálculo de volumes de sólidos, também denominado historicamente de estereometria. Foi examinado se nos *Cadernos* há uma abordagem conceitual do cálculo de volumes, isto é, se o trecho dedicado a esse tópico se pauta por uma abordagem que privilegia a investigação dos fundamentos dos conceitos estudados. A pesquisa visou avaliar se e em que medida os *Cadernos do Professor e do Aluno de Matemática*, na abordagem da estereometria, contemplam a especificidade da disciplina, consistente precipuamente no seu caráter abstrato, de sorte a proporcionar ao professor as condições de superação das dificuldades que aquelas especificidades acarretam para o processo de aprendizado. O referencial teórico que norteou a investigação consiste principalmente da teoria sobre aprendizagem de matemática desenvolvida por Raymond Duval, bem como textos direcionados à formação de professores relacionados ao tema da pesquisa. De acordo com Duval, as dificuldades de aprendizado decorrentes do caráter abstrato da matemática podem ser contornadas a partir de procedimentos que viabilizem os processos de visualização e de manipulação dos conceitos e objetos matemáticos. Dentre esses procedimentos contam-se a apresentação histórica dos assuntos abordados, e em consonância com as preocupações cotidianas dos estudantes. Estimou-se aqui que procedimentos como esses são aptos a despertar a curiosidade do estudante pelo assunto, tendo por isso o condão de tornar o aprendizado um processo menos árduo e mais agradável. As análises indicaram que o material pode possibilitar uma abordagem conceitual do cálculo de volumes de sólidos geométricos. Também foram identificados aspectos do material que poderiam ser melhorados. Sendo assim, foram feitas sugestões de atividades complementares.

Palavras-chave: educação matemática, cálculo de volumes, abordagem conceitual, história da matemática, visualização.

ABSTRACT

The research proposed here was dedicated to the analysis of part of the didactic material referred to as "*Caderno do Professor* [Teacher's Brochure]" and "*Caderno do Aluno* [Student's Brochure]", distributed in the year of 2008 by the São Paulo State Department of Education to the high school teachers in public school of the State. In view of standardizing the school curriculum of the State of São Paulo, the *Cadernos do Professor*, and the correlated *Cadernos do Aluno* [Student's Brochure], were prepared to each subject in the school curriculum, to each grade in the elementary school of cycle II and in high school, and, to each of the four school bimesters. This research was restricted to the examination of the *Caderno do Professor de Matemática* [Mathematics Teacher's Brochure], in particular regarding to the study of the calculation of volumes of solids, also known historically to stereometry. Was examined if, in the *Cadernos*, there is a conceptual approach of the calculation of volumes, that is, if the section dedicated to this topic is based on an approach that favors the investigation of the fundaments of the concepts studied. The research had the purpose of evaluating whether and to which extent the *Cadernos do Professor de Matemática*, at the approach to stereometry, take into consideration the specificity of the subject, consistent mainly in its abstract character, in a way to provide the teacher conditions to overcome the difficulties raised by such specificities to the learning process. The theoretical framework that guided the research mainly consists of the mathematical theory of learning developed by Raymond Duval, and texts aimed at teacher training related to the research topic. According to Duval, the difficulties in learning arising out of the abstract character of mathematics may be overcome by means of procedures enabling the processes of visualization and manipulation of the mathematical concepts and objects. Among such procedures we have the historic presentation of the matters discussed, and the consideration with the daily concerns of the students. It was estimated that procedures such as these are capable of triggering the curiosity of the student for the subject, therefore, with the purpose of making the learning process less difficult and more pleasant. The analysis indicated that the material can allow a conceptual approach to the calculation of volumes of geometric solids. Also identified were aspects of the material that could be improved. Therefore, suggestions were made for complementary activities.

Key words: mathematics education, calculation of volumes, conceptual approach, history of mathematics, visualization.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O que é volume? De onde surge o interesse em calcular volumes? Quando ensinamos o conteúdo de volumes precisamos nos preocupar com essas questões fundamentais. O interesse em conhecer “quanto espaço” um objeto ocupa, o seu volume, ou que volume um recipiente pode comportar, certamente remonta à época em que o homem começou a sentir a necessidade de transportar ou armazenar coisas. Os registros históricos mais antigos trazem problemas que envolvem medir o quanto das colheitas agrícolas poderia conter um armazém. Possivelmente o volume foi uma das primeiras medidas a serem utilizadas pelo homem.

A estereometria – estudo do cálculo de volumes de sólidos – aparece em obras egípcias de 3500 anos atrás. Problemas estereométricos foram estudados ao longo dos séculos por diversos matemáticos, dentre os quais figuram Platão (427-347 a.C.), Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) e Leonardo da Vinci (1452-1519). (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

Medidas de volume são conceitos importantes e podem ser conhecidos por qualquer pessoa. Por isso são ensinados. Resta averiguar de que material dispõe o professor para abordá-los.

Em 2008 a Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, buscando uniformizar o currículo escolar neste estado, elaborou e enviou aos professores textos denominados *Caderno do Professor*. Os textos foram elaborados para cada uma das disciplinas do currículo escolar, para cada série de ensino fundamental do ciclo II e do ensino médio, e, para cada um dos quatro bimestres letivos.

Em 2009 foram enviados textos para os alunos, chamados *Caderno do Aluno*. Os *Cadernos do Aluno* contêm as atividades já sugeridas nos respectivos *Cadernos do Professor*, e foram organizados para dar suporte aos alunos no desenvolvimento das atividades previstas no material distribuído aos professores.

Esses textos já despertaram o interesse de pesquisadores, como Camargo (2010), que investigou como o *Caderno do Professor de Matemática* aborda o conteúdo de Matrizes, apoiando-se na metodologia de análise de conteúdo de Bardin (2009). Essa pesquisa procurou relacionar a abordagem presente no material do professor com a abordagem apresentada em dois livros didáticos.

Esse trabalho de Camargo (2010) nos inspirou a investigar o material disponibilizado para o professor de matemática, levando em consideração que, para possibilitar o ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos, é necessário levar em conta as características peculiares da aprendizagem dessa área do conhecimento. Ora, uma característica da geometria em geral, e, por conseguinte, do trabalho com volumes, mais especificamente, é que nessas disciplinas lida-se com conceitos e suas representações.

Assim, em nossa pesquisa, resumidamente, procuramos observar se o material distribuído aos professores traz uma abordagem conceitual sobre volumes. *Consideramos uma abordagem conceitual aquela que se atém aos fundamentos dos conceitos relativos a uma atividade ou prática.*

A aprendizagem matemática tem sido estudada por teóricos de diversas áreas. Nos últimos anos uma das teorias sobre aprendizagem de matemática vem sendo desenvolvida pelo filósofo, psicólogo e pesquisador na área de educação matemática, Raymond Duval. Apresentamos alguns aspectos dessa teoria no capítulo 1.

O desenvolvimento conceitual requer que conheçamos um pouco da história e do desenvolvimento relacionados ao cálculo de volumes. Esse estudo é apresentado também no capítulo 1.

No capítulo 2, com base nos textos do capítulo 1, fazemos uma análise de algumas atividades propostas no *Caderno do Professor* (SÃO PAULO, 2009) *e do Aluno* procurando responder a questão para a qual se volta esta pesquisa, qual seja: verificar se as atividades desses cadernos proporcionam uma abordagem conceitual para o ensino do volume dos objetos.

No capítulo 3, a partir das relações estabelecidas entre os textos apresentados no capítulo 1 e 2, apresentamos algumas sugestões, indicando trabalhos que trazem atividades que podem complementar as atividades do *Caderno do Professor* (SÃO PAULO, 2009) *e do Aluno*.

Além do trabalho de Camargo (2010), três outras pesquisas nos influenciaram a estruturar nosso trabalho da forma como o fizemos. Trata-se dos trabalhos de Carvalho (2008), de Salazar (2009) e de Ferraz (2010). Apresentamos, em poucas linhas, cada um deles nos próximos parágrafos.

Carvalho (2008) investigou a organização dos assuntos relacionados ao tema Geometria Espacial Métrica nos livros didáticos de Matemática destinados à 2ª série do Ensino Médio. Foram analisados três livros didáticos de Matemática para a 2ª série do Ensino Médio enviados pelo Ministério da Educação a escolas estaduais de São Paulo em 2006. Uma das finalidades dessas análises consistiu em verificar se as atividades, propostas naqueles livros, se coadunavam com os pressupostos teóricos da teoria de Duval (2009). Esse trabalho nos abriu a perspectiva do uso dessa teoria no contexto da análise de materiais didáticos.

Salazar (2009) também utilizou a teoria de Duval (2009) para abordar as diferentes profundidades com que se pode apreender uma figura. O autor verificou que o uso de um aplicativo de geometria dinâmica possibilitou aos alunos a apreensão perceptiva do registro figural dinâmico. A apreensão perceptiva permite interpretar e reconhecer, quase que de imediato, as formas geométricas. Esse tipo de trabalho facilitou a aprendizagem das modificações que é possível fazer com as figuras, tais como: posicionais, decomposição e composição, ampliação e redução.

Ferraz (2010), em sua pesquisa, verificou que os professores encontram dificuldades para ensinar o conteúdo relacionado ao volume de prismas e pirâmides. O autor indicou que existe uma carência de pesquisas relacionadas a esse tema. Tendo isso em vista e, baseando-se em Salazar (2009), o autor desenvolveu uma sequência de ensino, com uso de software de geometria dinâmica, com um grupo de professores da rede estadual de ensino de São Paulo. Para a análise das produções dos sujeitos de pesquisa também foi utilizada a teoria de Duval (2009).

Os resultados de sua pesquisa indicaram que os aspectos analisados foram apenas parcialmente atendidos, e apontam como principais deficiências: pouca exploração nos livros didáticos de atividades que desenvolvem a visualização e a falta de atividades que possam ser desenvolvidas por software educacional.

Ferraz (2010) aponta a necessidade de pesquisas relacionadas ao conteúdo “volume de sólidos”. Carvalho (2008) nos mostra a possibilidade de usar a teoria dos registros de representação semiótica como ferramenta de análise de materiais didáticos. Essas indicações nos mostram a pertinência de se realizar uma pesquisa voltada para um material didático que leve em conta a teoria mencionada.

Para proceder a uma abordagem conceitual, será importante estudar os materiais disponíveis para o professor tendo em vista as teorias e propostas que se apoiem nessa forma de trabalho. Sendo assim, nós nos basearemos nessas teorias, que serão apresentadas no capítulo 1, para estabelecer o que caracteriza uma abordagem conceitual. A partir daí analisaremos *Caderno do Professor* (SÃO

PAULO, 2009) *e do Aluno* visando verificar se as atividades ali presentes possuem características desse tipo de abordagem. Por fim apresentaremos nossas sugestões e considerações finais.

1 ABORDAGEM CONCEITUAL E EPISTEMOLÓGICA SOBRE VOLUMES

Visar o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos indivíduos sem se fixar, de forma míope, sobre aquisições de tal ou tal noção particular é provavelmente o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática.

Raymond Duval

O emprego do conceito de medida é constante ao longo da história da matemática. Desde a Babilônia, passando pelos Egípcios, Gregos e Romanos, até nossos dias, a ideia de medida vem se desenvolvendo em virtude da necessidade humana e das necessidades da própria matemática. Originou-se naturalmente das atividades humanas na agricultura, na economia e na engenharia. Por exemplo, nós medimos comprimentos, áreas e volumes, ângulos, o tempo entre outras coisas.

Para chegar à compreensão de como se obtém o volume de um determinado objeto precisamos saber que *medir é comparar*, ou seja, estabelecemos uma determinada unidade de medida arbitrária e verificamos quanto dessa unidade preenche o objeto que queremos medir.

Desse modo, fazendo comparações e aproximações, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) aprimorou um método, atribuído a Eudoxo (408-355 a.C.), chamado de método de exaustão. Arquimedes se serviu desse método para provar o resultado obtido por outro método, o do Equilíbrio, usado por ele para determinar áreas e volumes de figuras geométricas. (SILVA, 2005)

Arquimedes de Siracusa aplicou o método de Eudoxo, entre outras coisas, para determinar o volume da esfera em relação ao volume do cilindro e ao volume do cone.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) criou uma simplificação para as comparações de Arquimedes entre aqueles sólidos e generalizou a ideia para poder efetuar comparações entre dois sólidos quaisquer. Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) criaram o cálculo infinitesimal inspirados nesses trabalhos, e o Cálculo acabou por dar novas ideias para a medida de áreas, volumes e comprimentos.

Como vemos, a ideia de comparação esteve sempre presente no desenvolvimento desses métodos e procedimentos matemáticos. Pensamos que, se o trabalho com volumes for feito de maneira reprodutiva, manipulativa, ou seja, por meio de fórmulas e técnicas operatórias, sem a preocupação com o entendimento dos conceitos, haverá uma desvinculação das ideias originais que comprometerá a boa compreensão da matéria. Entendemos que se o ensino se processar de forma histórica e bem fundamentada, será realizada uma abordagem conceitual.

1.1 APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA SEGUNDO DUVAL

Raymond Duval, formado em filosofia e psicologia, investiga a dificuldade que muitos estudantes têm em aprender matemática, e busca encontrar as causas que a explicam.

Para ele o motivo dessa dificuldade advém do fato de que a Matemática, como é conhecida hoje, se constitui de objetos inacessíveis diretamente. Isso difere radicalmente de outras áreas do conhecimento, como a biologia, por exemplo, em que podemos ter acesso direto aos objetos de estudo. Se estudarmos uma planta, podemos observá-la e, com base nessa observação, determinar do que ela é constituída, bem como vários outros aspectos de sua constituição.

A Matemática, ao contrário, se constitui de ideias desenvolvidas pelo homem ao longo do tempo. Criamos diferentes e variadas formas de representar essas ideias e conceitos. Por exemplo: o sistema de numeração decimal, binário e hexadecimal. As figuras geométricas. Os gráficos cartesianos. As tabelas. As matrizes. A linguagem algébrica. A notação científica. As porcentagens, etc. Cada uma dessas formas de representação possui características, regras, possibilidades de tratamento, e potencialidades para representar alguns aspectos de um conceito Matemático, mas não outros. De modo que um único sistema de registros não é capaz de expressar um conceito Matemático no todo. Portanto, faz-se necessário o domínio e o entendimento articulado simultâneo de mais de um sistema de representação para que se possa ter conhecimento pleno dos conceitos Matemáticos. A esse domínio articulado Duval (2009) denomina de compreensão integrativa.

A compreensão integrativa permite ao aprendiz, mentalmente e/ou com ajuda de registros, trabalhar e “visualizar” conceitos matemáticos de forma dinâmica. Quero dizer com isso que quando se atinge a compreensão integrativa, que também podemos chamar de conceitualização ou *noésis,* o sujeito é capaz de produzir a visualização de um objeto matemático de uma maneira dinâmica, isto é, fazendo mover o objeto, como um vídeo ou construindo mentalmente imagens sucessivas.

A percepção visual é um tanto quanto limitada, pois apresenta apenas uma única face de objetos que são, contudo, tridimensionais. A visualização, por seu turno, proporciona a articulação das várias faces ou perspectivas sob as quais um mesmo objeto pode ser apresentado. Ela envolve um movimento ou uma transformação do conteúdo percebido, ou seja, visões sucessivas, que nos permitem conhecer a multiplicidade do objeto como um todo contínuo. (DUVAL, 1999)

De acordo com Duval (2009), quando trabalhamos com geometria, três formas de processos cognitivos devem ser consideradas.

A primeira delas é a visualização. Trata-se do processo de examinar o espaço-representação de uma ilustração ou de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva.

A segunda forma se refere à construção de modelos, com uso de instrumentos, em que as ações representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;

A terceira forma está associada ao raciocínio usado para estabelecer relações no processo do discurso para a extensão do conhecimento, para a prova e para a explicação.

Aquelas ligações entre registros, que levam à aprendizagem dos conceitos Matemáticos, compõem a arquitetura cognitiva através da qual os alunos podem reconhecer o mesmo objeto através de diferentes representações. Elas sempre começam com a coordenação de um registro que disponibiliza a visualização e outro para realizar uma função discursiva (Duval, 2009).

Para Duval (2009), o emprego de vários registros de uma mesma representação, seja ao mesmo tempo seja sucessivamente, por si apenas não acarreta a sua coordenação, de modo que ela não se dá espontaneamente. Para que ocorra a coordenação é necessário discriminar as unidades significantes próprias de cada registro a serem postas em correspondência nos registros de partida e de chegada.

Entretanto,

> mesmo nos registros em unidades discretas, como aqueles das línguas, as unidades significantes que compõem uma representação, isto quer dizer um enunciado, uma fórmula, ou um texto, não aparecem separada e independentemente umas das outras. [...] uma definição provável e individual de unidades significantes torna-se totalmente inoperante e ambígua. (DUVAL, 2009, p. 101)

Para solucionar esse problema, seria necessário “possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes de representação em outro registro”. (DUVAL, 2009, p. 101)

A aprendizagem de um sistema de representação por parte dos alunos não é simples. Avaliações institucionais na França na década de 90 mostraram que, ao entrar para a faculdade, apenas um em cada três estudantes tem pleno entendimento, por exemplo, do funcionamento do sistema de numeração decimal, e está habilitado a ter sucesso em todas as questões relacionadas às mais simples operações como: multiplicação ou divisão de números decimais. (DUVAL, 2009)

Quando Duval fala de “registro de representação semiótica” ele se refere a um sistema de signos que acumulam as funções de comunicação, tratamento e objetivação. Ele não leva em conta as notações convencionais que não são sistemas. Por exemplo, as numerações binárias e decimais formam um sistema, mas as letras ou símbolos usados para indicar as operações algébricas não formam. (D’AMORE, 2005)

Duval (1999) afirma que, do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática se diferencia dos outros domínios da ciência, tendo em vista que os objetos matemáticos são acessíveis apenas por meio de suas representações semióticas. Nas outras áreas do conhecimento,ao contrário, as representações semióticas são imagens ou descrições sobre alguns fenômenos do mundo externo real, às quais podemos ter um acesso perceptual e instrumental.

Por outro lado, a compreensão da matemática exige distinguir os objetos matemáticos de suas representações, por exemplo, os números não devem ser confundidos com os dígitos de um dado sistema de numeração (romana, binária, decimal). Da mesma maneira, figuras em geometria, mesmo quando construídas com precisão, são apenas representações com valores específicos que não são em si os objetos matemáticos. (DUVAL, 1999)

Segundo Santaella (1983), o termo semiótica vem da raiz grega "*semeion*", que quer dizer signo. Semiótica seria a ciência dos signos, a ciência, por conseguinte, de toda e qualquer linguagem. A Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação o que há de comum a todas as linguagens possíveis, ou seja, ela tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção de significação e de sentido.

Duval (2009) defende a importância das representações semióticas pelo fato de que as opções de tratamento matemático, como operações de cálculo, dependem do sistema de representação. Por exemplo, o sistema decimal de posição dá mais possibilidades de tratamento do que o sistema romano de numeração.

Para Santaella (2000), signo é uma coisa que representa outra coisa: seu objeto. Ele só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, de substituir outra coisa diferente dele. Signo pode ser definido como qualquer coisa que, de um lado, é determinada por um Objeto e, de outro, determina uma ideia na mente de uma pessoa, esta última é denominada o Interpretante do signo. Um signo, assim, tem uma relação triádica: com seu objeto, por um lado, e com seu interpretante, por outro.

Para Duval (1998), contudo, os sistemas de representação semiótica utilizados na Matemática, se tornaram significativos em si mesmos, sem depender da relação entre o interpretante e o objeto, inaugurando uma relação não mais triádica.

> Os sistemas semióticos tornaram-se independentes de suas possíveis interpretações, com o surgimento dos sistemas formais. Aparecem então as noções de simulação e modelagem como essenciais para descrever a atividade de conhecimento e a noção de representação é independente do sujeito e do objeto. Na verdade, a noção de objeto assume uma nova natureza, uma vez que é o mesmo sistema que dá sentido aos signos e, portanto, é necessário falar de objeto-estrutura. A dedução a que desempenha um papel fundamental na constituição da ciência. (DUVAL, 1998, tradução nossa)[1]

---

[1] "Los sistemas semióticos se vuelven independientes de sus posibles interpretaciones, con la aparición de los sistemas formales. Aparecen entonces las nociones de simulación y modelización como esenciales para describir la actividad del conocimiento y la noción de representación es independiente del sujeto y del objeto. De hecho la noción de objeto asume una nueva naturaleza, dado que es el sistema mismo quien le da significado a los signos y, por consiguiente, es necesario hablara de objeto-estructura. La deducción juega un papel fundador en la constitución de la ciencia." (DUVAL, 1998)

A representação se caracteriza por uma correspondência entre duas entidades (qualquer notação, signo ou conjunto de símbolos) que um indivíduo põe em algum tipo de relação referencial uma com a outra. Por meio dessa correspondência a entidade que é a representação evoca a entidade representada (algum aspecto do mundo externo ou de nossa imaginação), ainda que esta última não esteja presente. (COLOMBO, 2008)

Duval (1999) pondera sobre o significado da palavra “representação”. Segundo ele, ao lidar com uma representação é necessário levar em conta o sistema em que esta é produzida, pois o significado de qualquer representação não é determinado por sua realização material, mas apenas por suas relações frente a outros signos. Para ele, é o número de possíveis escolhas que importa. Os sistemas de numeração decimal e binária são exemplos desta deliberação semiótica: o significado de cada dígito depende não só da sua posição, mas também do número de escolhas possíveis para cada posição.

Como a linguagem, um sistema semiótico pode ser utilizado tanto mentalmente quanto por escrito. Entretanto, as estratégias de tratamento desse sistema podem variar. Por exemplo: o cálculo mental usa o mesmo sistema decimal que o escrito, mas não as mesmas estratégias.

Existe uma grande diversidade de representações semióticas usadas em matemática, tais como os sistemas de numeração, as figuras geométricas, a escrita algébrica, e os gráficos. Mesmo a linguagem natural pode ser usada, ainda que de maneira diferente do seu uso na linguagem cotidiana.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural. Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: - argumentação a partir de observações, de crenças ...; - dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3); -apreensão operatória e não somente perceptiva; -construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: -numéricas (binária, decimal, fracionária...); -algébricas; -simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos: -mudanças de sistema de coordenadas; - interpolação, extrapolação.

QUADRO 1 – REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS
FONTE: Duval (2003, p.14).

O Quadro 1 nos traz uma ideia dos tipos de registros utilizados em matemática, bem como de suas funções, quais sejam: discursiva e não discursiva; multifuncional e monofuncional.

A língua natural é a representação discursiva fundamental. Sendo ela um registro multifuncional, ela não nos permite realizar tratamentos algoritmizáveis. Por meio dela podem ser feitas as argumentações e as deduções, bem como a utilização da língua escrita ou falada.

Os sistemas de escrita são representações discursivas monofuncionais que se baseiam em sistemas de escrita mais econômicas, às quais podem ser aplicados tratamentos algorítmicos.

As figuras geométricas são representações não discursivas multifuncionais. Elas podem ser construídas com instrumentos, podem ser apreendidas perceptivamente e permitem apreensões operatórias.

Os gráficos cartesianos são representações não discursivas monofuncionais que permitem tratamentos algoritmizáveis.

Duval (2009) distingue dois tipos de transformações de representações semióticas: o tratamento e a conversão.

Os tratamentos são transformações de representações que estão dentro do mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo permanecendo no mesmo sistema de representação de escrita dos números, resolver uma equação ou um sistema de equações. (DUVAL, 2009)

As conversões são transformações de representações que alternam entre registros, mantendo os mesmos objetos denotados: por exemplo, escrever uma equação algébrica a partir de um gráfico. (DUVAL, 2009)

Podemos citar como exemplo de conversão as transformações entre registros numéricos decimal, fracionário e porcentagem: 0,3 = 30/100 = 30%.

Do ponto de vista matemático, a conversão ocorre apenas para selecionar o registro em que a realização dos tratamentos é mais econômica, mais potente, ou para criar um segundo registro que sirva como um suporte ou guia para os tratamentos que são realizados no outro registro. Por outro lado, do ponto de vista cognitivo, a atividade de conversão parece ser a atividade de transformação representacional fundamental que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2009)

Existem dois tipos de fenômenos característicos da conversão entre representações: as variações de congruência e de não-congruência. Eles são percebidos ao comparar o registro de chegada e o de partida. Em geral, quando há congruência a complexidade é menor e quando não há congruência a complexidade é maior. Além disso, há uma heterogeneidade entre os dois sentidos em que se efetua uma conversão, de modo que saber converter em um sentido não implica saber converter no sentido contrário. (DUVAL, 2003)

Duval (2003) exemplifica uma conversão congruente da seguinte forma: “o conjunto de pontos cuja ordenada é superior a abscissa: y > x”. Para efetuar tal conversão da língua natural para o registro algébrico é suficiente uma correspondência termo a termo entre as respectivas unidades significantes. Neste caso, a conversão inversa permite voltar a encontrar a expressão inicial do registro de partida.

Como exemplo de não-congruência, temos: “o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva: x > 0. Na escritura algébrica não existe uma unidade significante que corresponda a ‘positivo’. Para suprir essa carência é necessário recorrer a “> 0”, que é a combinação de duas unidades significantes. Aqui não há correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas da expressão, o que requer uma reorganização da expressão dada no registro de partida para obter a expressão correspondente no registro de chegada (DUVAL, 2003).

A apreensão de uma representação semiótica, por parte do sujeito, é chamada de *semiósis,* enquanto que a apreensão conceitual do objeto matemático é denominada *noésis.* Para que ocorra essa última o sujeito deve ser capaz de utilizar a conversão de diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Além disso, como o sentido da conversão implica em fatores diferentes de congruência, ou seja, implica em níveis de dificuldade diferentes, seria necessário dominar também o sentido inverso da conversão.

Em resumo, a apreensão de objetos matemáticos implica a compreensão integrativa de uma variedade de registros de representação semiótica. Envolve também as capacidades de construção, argumentação e raciocínio. Perpassam por uma exploração heurística, ou seja, por um processo de descoberta das ideias que fazem parte da fundação do conhecimento Matemático. Esses aspectos propiciam a visualização dos conceitos que se inter-relacionam em um todo contínuo.

Apresentamos até aqui alguns aspectos da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009) que permeiam as características da aprendizagem da matemática. Mais adiante examinaremos alguns textos direcionados à formação de professores relacionados ao conceito de volumes.

1.2 O TRATAMENTO CONCEITUAL E EPISTEMOLÓGICO DE VOLUMES

Podemos abordar os conteúdos de ensino da Matemática de diferentes formas. Há aquelas abordagens pelas quais aprendemos baseados em fórmulas de cálculo, puro e simples, sem buscar compreender o significado, as origens ou os porquês dessas fórmulas. Mas há também aquelas abordagens em que se busca compreender as ideias e o raciocínio que conduz àquelas fórmulas, propiciando a conceitualização.

Convencionemos chamar de estáticas aquelas abordagens de materiais didáticos que enfatizam o uso de fórmulas matemáticas e desconsideram a utilização dos diferentes registros de representação semiótica.

De outro lado, convencionemos chamar de dinâmicas as abordagens de materiais didáticos que consideram a utilização dos diversos registros de representação semiótica, e que procuram propiciar a *noésis*.

Habitualmente em livros didáticos e apostilas o método de ensino se resume a apresentação de fórmulas comuns para o cálculo do volume de sólidos seguidos de solicitação da execução de séries de exercícios.

Lima et al. (2001) realiza uma análise de doze coleções de livros didáticos para o ensino médio, apontando diversos problemas, principalmente no que diz respeito ao estudo de áreas e volumes. De um modo geral é observado que esse conteúdo foi tratado de maneira apressada e desordenada. Não há, por exemplo, a preocupação em definir de maneira adequada o que é volume: a definição do volume de um sólido não é apresentada, e a fórmula do volume de um bloco retangular é apresentada apenas por meio de exercícios que são tomados como representativos e dos quais se pretende que ela seja “deduzida”.

A principal crítica se refere à falta de rigor matemático e ao excesso de tratamento algébrico nas atividades propostas. Ao ser submetido apenas à manipulação de exercícios fora de contextos de aplicação, o leitor fica prejudicado, sem estímulo para pensar ou para usar sua criatividade. Um dos problemas que surgem daí é que esse desestímulo pode prejudicar mesmo a formação dos professores, e, na esteira delas, a apreensão dos conteúdos pelos estudantes. Com efeito, os livros didáticos podem constituir a ocasião para o aprendizado do próprio professor, visto que, em muitos casos, pode ser por meio do livro didático que o professor aprende aquilo que vai transmitir aos alunos. Isso acontece quando o professor não estudou o assunto em sua formação inicial.

Um grave problema na formação do futuro professor é o seguinte:

> ... quando jovem entra na faculdade, não teve uma boa formação na escola, logo não conhece bem a Matemática que vai ensinar. Por sua vez, as aulas que tem na faculdade tratam de Cálculo, Variáveis Complexas, Equações Diferenciais e outros assuntos que ele bravamente, com grande esforço, tenta assimilar em dose mínima para ser aprovado no exame. No final de tudo, recebe seu diploma sem ter domínio das coisas que vai ensinar a seus alunos, como decimais infinitas, as proposições básicas da Geometria no Espaço, Divisibilidade, Análise Combinatória, etc. (LIMA, 2007)

Para os docentes que tiveram uma educação matemática voltada para a aprendizagem mecânica pela repetição de exercícios, a maneira mais natural de ensinar é seguir pelo mesmo caminho. Ora, se é evidentemente importante saber efetuar os cálculos, é preciso também ir além e entender os conceitos.

A despeito das dificuldades da aprendizagem da Matemática, atribuídas por Duval ao fato de que esse conhecimento é acessível apenas por meio de suas representações, Lima (2007) ressalta que, em todas as épocas, é reconhecida a importância desse conhecimento, para a formação cultural do indivíduo e para lhe fornecer instrumentos para entender o mundo, prever resultados e controlar fenômenos.

A fim de atingir uma melhoria no ensino da Matemática o autor sugere que, para habituar os alunos “com o método matemático, dotá-los de habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos do cálculo e dar-lhe condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real”, de uma maneira global, a estrutura de um curso de Matemática deve abranger três componentes fundamentais, que formariam um tripé. Quais sejam: a conceituação, a manipulação e as aplicações. Quanto à conceituação, ele afirma que ela

> (...) compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações. (LIMA, 2007)

Se estabelecermos uma relação entre a conceituação, apontada por Lima (2007) e a *noésis* nos termos de Duval (2009), poderemos afirmar que ambas estariam condicionadas à coordenação de mais de um registro de representação. Essa relação fica evidente quando Lima se refere à importância da “interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos”. Poderíamos considerar que o uso de diferentes formas e termos significa a coordenação dos registros de representação semióticas.

A segunda base do tripé:

> A manipulação, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música (ou mesmo como o repetido treinamento dos chamados “fundamentos” está para certos esportes, como o tênis e o voleibol). A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-lhe da perda de tempo e energia com detalhes secundários. (LIMA, 2007)

Assim sendo, a manipulação equivaleria a conhecer as especificidades, ou as formas de tratamento, que são possíveis em cada sistema de registros. Lima menciona as construções geométricas como parte integrante da manipulação, assim como Duval, quando nos traz considerações a cerca da exploração heurística e das construções por meio de instrumentos. Entretanto, para Duval, os objetos Matemáticos sempre são acessados utilizando-se mais de um tipo de registro.

A terceira base do tripé são as aplicações, que Lima caracteriza considerando que:

> As aplicações são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia a dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA, 2007)

As aplicações seriam então o próprio uso da matemática para resolver os problemas que nos impõe a vida.

Observemos que não se pretende considerar que esses três componentes sejam os únicos, nem que eles estejam necessariamente dispostos em uma ordem pré estabelecida. O que é importante é que eles não sejam negligenciados para que a prática dessas orientações signifique uma melhoria nos cursos atuais das escolas públicas. Isso permitirá sanar as deficiências dos livros analisados por Lima et al. (2001) que, em geral, estão focados na manipulação em detrimento da conceituação.

Alguns autores trazem abordagens diferentes daquelas focadas em fórmulas e tornam mais dinâmico o aprendizado de áreas, semelhanças e volumes.

Lima et. al. (2003) trazem sugestões de aulas. O capítulo quinto da referida obra traz uma proposta de atividades para introdução ao cálculo de volumes sugerindo que, para desenvolver o conceito de volume, o professor deve, antes de uma definição formal, apresentar uma ideia intuitiva e fornecer diversos exemplos para que os alunos possam compreender o assunto que será tratado.

Segundo os autores uma boa introdução ao tema seria apresentar uma caracterização geral de volume de um sólido com uma formulação tal como a seguinte: o *Volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada.*

Com esta ideia os autores sugerem que sejam feitas comparações provocativas, por exemplo: “Dadas duas caixas, qual delas tem maior volume? Quem tem maior volume: Maria ou Pedro? Observando uma panela pequena e uma garrafa, que objeto parece ter maior volume? Uma bola de futebol ou uma caixa de sapatos?”

Esses exemplos de como iniciar o ensino ilustram a proposta dos autores de introduzir um conteúdo matemático por meio de aplicações que necessitam do conhecimento do conceito. Além disso, podem estimular o raciocínio, a argumentação e suscitar ideias quanto às maneiras possíveis de responder a essas perguntas.

> Muitas comparações são óbvias, outras não. No caso da panela e da garrafa, pode-se encher a garrafa com água e despejar dentro da panela. Para comparar volumes de objetos impermeáveis podemos mergulhá-los, um de cada vez, em um reservatório contendo água até o bordo e comparar a quantidade de água que transbordou. Se tivermos um reservatório cilíndrico de vidro, podemos colar em sua parede uma escala de nossa escolha e, com ela medir volumes de pequenos objetos impermeáveis, como uma pedra de formato irregular, por exemplo. (Lima et. al., 2003)

Essas sugestões, se experimentadas, poderiam eventualmente servir para alguma atividade prática, mas principalmente, serviriam como um conhecimento que o aprendiz poderia utilizar como auxílio em sua visualização e em seu raciocínio. Além disso, elas podem servir também como um elemento motivador para o estudo dos volumes, por meio do qual se perceberá a dificuldade prática de se estabelecer o volume dos objetos.

> Por exemplo, o mestre de obras precisa saber o volume de concreto que será utilizado na construção das colunas, vigas e lajes de um edifício. A forma e as dimensões de cada um destes objetos estão na planta e o cálculo do volume deverá ser feito antes que o edifício exista. Alguns objetos são pequenos demais, ou grandes demais, ou são inacessíveis, ou simplesmente não existem concretamente. Sentimos então a necessidade de obter métodos para o cálculo de volumes, pelo menos de objetos simples, conhecendo sua forma e suas dimensões. (Lima et. al., 2003)

Medir volume, intuitivamente, consiste em atribuir um valor numérico à “quantidade de espaço” ocupada por alguma coisa, em comparação com uma unidade de volume estabelecida. Muitas vezes, em vez de uma unidade de volume, utiliza-se uma unidade de capacidade. (BROLEZZI e DRUCK, 2002).

Grando (2009) nos mostra como trabalhadores de olarias calculam a quantidade de tijolos a serem transportados em um caminhão. De acordo com Grando, os oleiros fazem filas de tijolos pelo comprimento, pela largura e pela altura da carroceria. A seguir eles contam a quantidade de tijolos de cada fila e multiplicam os valores obtidos. Assim é obtido o volume de tijolos que a carroceria do caminhão pode conter.

Essa ideia do volume da carroceria de um caminhão é uma aplicação desse conhecimento. A conceituação consistiria em generalizar esse conhecimento e realizar demonstrações com rigor matemático. A manipulação seria trabalhada na resolução de problemas relacionados a esse conteúdo.

Em geral, para medir volume, utiliza-se um cubo de aresta 1 centímetro (cm). O volume seria, assim, equivalente a 1 centímetro cúbico (cm^3) (FIGURA 1).

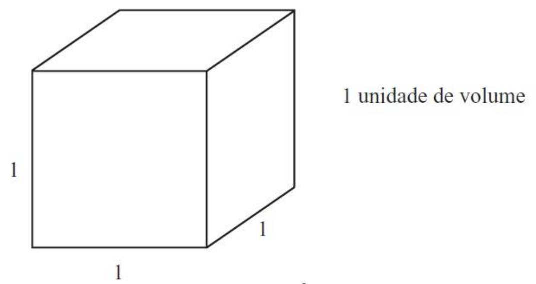


FIGURA 1 − CUBO UNITÁRIO
Fonte: Lima et. al., 2003

Assim, o volume de um objeto, em relação ao cm^3, deve ser um número que exprima quantos cubos unitários esse objeto pode conter.

O cubo unitário, no entanto, não seria muito apropriado para medir, por exemplo, quantos cubos unitários poderiam caber em uma garrafa de refrigerante, pois os cubos unitários não se ajustariam perfeitamente para preencher totalmente a forma da garrafa. Nesse caso, teríamos então uma aproximação.

Entretanto, eles podem nos servir como unidade de medida a ser comparada com objetos que tenham todos os ângulos retos. Isso nos permitiria calcular com precisão o volume de um paralelepípedo retângulo, ou simplesmente, de um bloco retangular.

Poderíamos então propor que se imaginasse inicialmente um bloco retangular com dimensões 4cm, 3cm e 2cm, e a seguir se perguntasse: “Qual é o seu volume?”

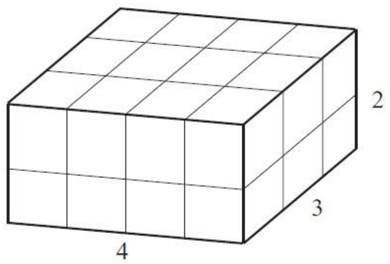


FIGURA 2 − PARALELEPÍPEDO
Fonte: Lima et. al., 2003

Observando o desenho (FIGURA 2), não há duvida que este bloco possa ser dividido em 4×3×2 = 24 cubos unitários e, portanto, que seu volume equivale a 24cm^3.

A partir da compreensão desse resultado, poderíamos partir para questões mais complexas, como, por exemplo, a seguinte: “O que acontece quando as dimensões do bloco não forem inteiras? Continuaria valendo o produto das dimensões desse bloco? Como isso se justifica?”

Para calcular o volume do bloco retangular de 5,6 cm de comprimento, 4,7 cm de largura e 2,0 cm de altura (FIGURA 3), por exemplo, podemos dividir cada aresta do cubo unitário (com 1 cm de aresta) em 10 partes iguais. Traçando pelos pontos de divisão planos paralelos às faces, dividimos esse cubo unitário em 1000 cubos menores de aresta 1/10 (FIGURA 4).

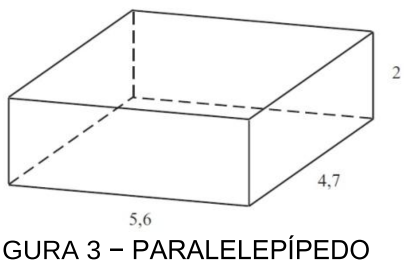


FIGURA 3 − PARALELEPÍPEDO
Fonte: Lima et. al., 2003

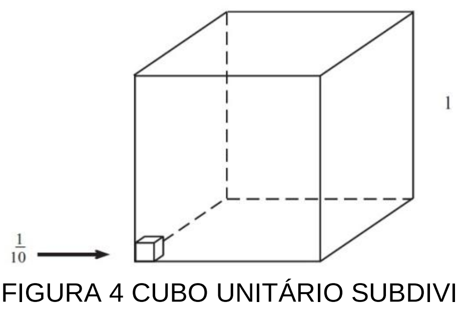


FIGURA 4 CUBO UNITÁRIO SUBDIVIDO
Fonte: Lima et. al., 2003

O volume de cada cubinho seria v = 1/1000. Podemos contar quantos destes cubinhos preenchem o bloco retangular dado: são 56 × 47 × 20 cubinhos. Logo, o volume do bloco retangular é igual ao número de cubinhos multiplicado pelo volume de 1 cubinho, ou seja, 56 × 47 × 20 × 1 = 5,6 × 4,7 × 2,0. 1000

Em um terceiro nível de complexidade, poderíamos examinar o que ocorreria caso as medidas dos lados do paralelepípedo fossem números irracionais.

Nesse caso, podemos utilizar aproximações sucessivas. Essa abordagem é conhecida como método da exaustão. Dado um cubo *C* de aresta *b* irracional, se *x* for um número menor que b^3, *x* é menor que o volume de *C*, e se *y* for um número maior que b^3, então, *y* é maior que o volume de *C*. Conclui-se que b^3 deve ser igual ao volume de *C*. (BROLEZZI, DRUCK, 2002)

Assim podemos dizer que basta multiplicar as medidas das três dimensões do paralelepípedo para obter seu volume.

Para Lima (2009), o aspecto histórico do conhecimento Matemático ajuda a entender a evolução das ideias, o seu significado presente, além de amenizar e suavizar a aprendizagem.

Brolezzi e Druck (2002) elaboraram um material de apoio para ser aplicado em um curso de formação de professores. Os autores enriqueceram seu texto adicionando informações históricas referentes à construção do conhecimento de volumes, semelhanças e áreas, constituindo, assim, uma abordagem epistemológica da ideia de volume. Esse material trazia informações tais como a de que “Heródoto, um dos primeiros historiadores da humanidade, afirmava que os gregos teriam trazido a Geometria do Egito.”

> É bem conhecida a história de que as cheias do Rio Nilo desfaziam as divisões entre as terras, que, para serem refeitas, precisavam de cálculos e medidas de áreas. Daí a palavra geometria - "medida da terra". Entretanto, Aristóteles, grande filósofo da Grécia Antiga, dizia que a Geometria teria nascido no Egito, não em razão de suas aplicações práticas, mas pelo fato de os sacerdotes terem tempo livre o suficiente para se dedicar à apreciação das formas da natureza e ao estudo lúdico dessas formas. (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

Percebemos, assim, que o estudo do cálculo do volume dos sólidos geométricos, denominado “estereometria”, interessou aos povos da Antiguidade, tanto pela sua utilidade prática como pelos desafios que representava.

Arquimedes (287-212 a.c.), nascido na cidade grega de Siracusa, filho de astrônomo, estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria. Arquimedes foi um grande matemático e, pode-se afirmar, um homem à frente de seu tempo. Suas criações intrigaram estudiosos por séculos para saber de onde vinha sua genialidade.

Até que em 1906, em Constantinopla, foi descoberta uma cópia de *O Método*, um tratado de Arquimedes enviado a Eratóstenes que se encontrava perdido desde os primeiros séculos depois de Cristo. Neste tratado constavam as ideias gerais sobre os métodos utilizados por Arquimedes para descobrir as áreas e volumes de alguns sólidos. Com isso descobriu-se que ele se valia de métodos físicos em seus raciocínios. (BROLEZZI, DRUCK, 2002)

A ideia fundamental de Arquimedes, o método do equilíbrio, consiste em utilizar uma alavanca para colocar em equilíbrio uma figura de área ou volume conhecido com outra que se deseje conhecer.

Brolezzi e Druck (2002) consideram que os métodos heurísticos, utilizados por Arquimedes, podem ser de grande utilidade no ensino da Matemática. Os autores trazem como exemplo a utilização do método da exaustão para determinar a área de um círculo. Vejamos um exemplo utilizando o hexágono como aproximação da área de um círculo (FIGURA 5).

> O perímetro do hexágono inscrito é um pouco menor que o comprimento C da circunferência. A altura dos triângulos que compõem o hexágono é também um pouco menor que o raio r do círculo. Considerando-se um polígono com um número maior de lados, podemos imaginar que a medida do perímetro ficará mais próxima do comprimento da circunferência e que a altura dos triângulos em que o polígono se decomporá ficará mais próxima à do raio do círculo. Como a área de cada triângulo é a metade da altura vezes a base (um dos lados do polígono), a área do polígono ficará sempre mais próxima de rC/2, à medida que aumentar o número de lados do polígono. Arquimedes considerou que a limitação inferior à área do círculo fazia com que essa área nunca fosse inferior a rC/2. De forma similar, ele propunha considerar um polígono regular circunscrevendo o círculo para n = 6, como na ilustração abaixo. Aumentando o valor de n, a área do polígono circunscrito tende a rC/2. Dada essa limitação superior, a área do círculo não pode ser maior que rC/2.
> Arquimedes conclui seu raciocínio afirmando que, se a área do círculo não pode ser menor que rC/2 nem maior que rC/2, então, ela deve ser igual a rC/2. (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

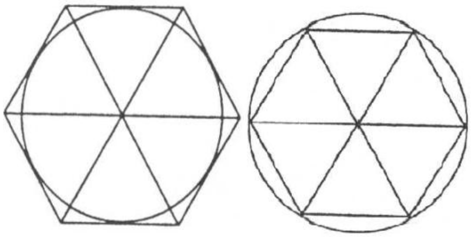


FIGURA 5 − ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA
Fonte: adaptado de Brolezzi e Druck (2002)

Para os autores, o trabalho com composição e decomposição de figuras, inspirado na Geometria grega, pode ser utilizado desde as séries iniciais, por exemplo, para o cálculo aproximado da área de uma figura qualquer, por excesso ou falta, a partir de malhas quadriculadas, triangulares ou hexagonais.

As atividades de composição e decomposição de figuras são consideradas importantes também para Lima (2007) e para Duval (2003). Eles consideram que elas são, quase sempre, requeridas na resolução de problemas geométricos e são de fundamental importância nas questões cognitivas da aprendizagem Matemática.

Segundo Brolezzi e Druck (2002), o hábito de visualizar as composições de figuras subjacentes ao cálculo de áreas pode ser útil, ainda, para o desenvolvimento de noções mais sofisticadas, como a noção de integral.

Cavalieri elaborou um conceito intuitivo que trata do volume de sólidos, conhecido como Princípio de Cavalieri. Essa ideia pode ser aplicada para o entendimento do volume de sólidos, e pode ser ilustrada pela imaginação sobre o que acontece quando, por exemplo, manipulamos duas pilhas de cartas de baralhos completos. Estando as cartas organizadas de modos diferentes, ainda assim, a quantidade de cartas não se altera (FIGURA 6). Assim, se pensarmos que o volume da pilha equivale à soma das áreas de suas cartas, esse valor permanece inalterado entre as pilhas de cartas. Essa ideia pode ser generalizada, mesmo que as formas sejam diferentes basta que as áreas das duas pilhas sejam iguais.

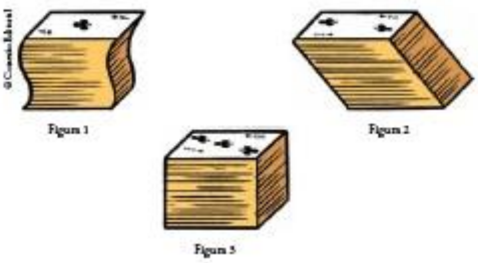


FIGURA 6 − ILUSTRAÇÃO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI
Fonte: (SÃO PAULO, 2009)

Pela ideia proposta por Cavalieri temos que:

> 1. Se os segmentos determinados pela intersecção de qualquer reta perpendicular a uma direção fixa com duas figuras planas tiverem sempre o mesmo comprimento, então, as superfícies têm a mesma área.
> 2. Se as áreas das secções por qualquer plano perpendicular a uma direção fixa de dois sólidos forem iguais, então, os sólidos têm volumes iguais. (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

Assim podemos calcular o volume de um sólido comparando-o a outro, de volume conhecido, e verificando se qualquer plano paralelo à suas bases, ao cortá-los, gera figuras planas de mesma área.

Acreditamos que essa ideia de continuidade, em que o volume de um objeto equivale à soma da área de suas secções, proporciona aquela compreensão em forma de movimento, em que pontos podem formar linhas e, correlativamente, linhas podem formar planos, e esses, por fim, podem formar sólidos. Sendo assim, uma continuidade, como uma linha que faz um lençol e ao dobrarmos esse lençol temos um volume.

Apesar de o Princípio de Cavalieri estar presente nos livros didáticos, em muitos casos, falta uma conexão entre tal princípio e os demais temas relacionados ao volume das figuras. Além disso, quase sempre as atividades abordadas nos livros que são inspiradas no Princípio de Cavalieri utilizam apenas sólidos geométricos de medidas inteiras. (LIMA et al., 2001)

O Princípio de Cavalieri, no entanto, pode ter aplicações bem mais amplas, e auxiliar na explicação de problemas matemáticos bem mais complexos, como os que apresentamos abaixo.

Sabemos que obter o volume do paralelepípedo reto-retângulo equivale a calcular o produto das medidas lineares de suas três dimensões. A partir do Princípio de Cavalieri podemos comparar esse sólido com outros que sejam diferentes apenas no formato de suas bases, mas que conservem a área dessas bases iguais as do paralelepípedo referido.

Se a base do objeto cujo volume queremos conhecer tiver a mesma área da base do paralelepípedo, então, “tomando um plano paralelo ao plano da base dos dois sólidos, suas intersecções com dois sólidos serão figuras geométricas congruentes com suas bases, portanto, terão a mesma área” (BROLEZZI e DRUCK , 2002). Sendo assim os dois sólidos de mesma altura devem possuir o mesmo volume (FIGURA 7).

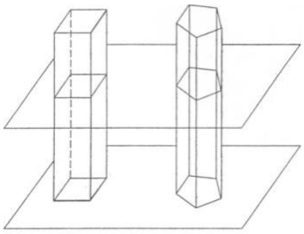


FIGURA 7 − PLANO SECCIONANDO DOIS PRISMAS
Fonte: (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

Dois prismas de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

O paralelepípedo reto-retângulo é um caso particular de cilindro. Podemos definir o cilindro como um sólido formado a partir de uma figura plana F e de um segmento de reta g, que chamamos de geratriz, não contido no mesmo plano que F. Se para cada ponto em F erguermos um segmento paralelo a g e da mesma medida que g, então teremos um cilindro (FIGURA 8).

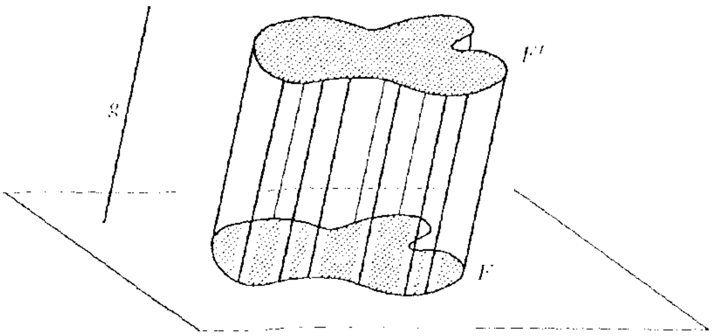


FIGURA 8 − CILINDRO
Fonte: (LIMA, 2009)

Pelo princípio de Cavalieri o volume desse sólido será igual ao volume de outro sólido, de mesma altura e mesma área das bases, como o de um paralelepípedo por exemplo.

Da mesma forma que, a partir de um prisma obtemos o volume de um cilindro generalizado, também, a partir de uma pirâmide de base triangular podemos obter o volume de um cone generalizado usando o Princípio de Cavalieri.

Podemos considerar esse cone generalizado como o sólido delimitado por uma figura plana e pelos segmentos que unem cada ponto do contorno dessa figura a um ponto, fora do plano da figura, chamado cume ou vértice (FIGURA 9).

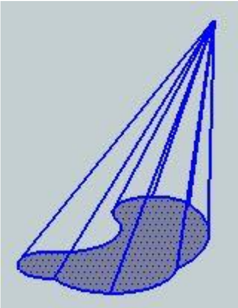


FIGURA 9 − CONE GENERALIZADO
Fonte: (LIMA, 2009)

As pirâmides de qualquer forma de base e os cones de base circular são casos especiais de cones generalizados. Lima et al. (2006) e, Brolezzi e Druck (2002) nos mostram que o Princípio de Cavalieri pode ser empregado também para tornar compreensível a igualdade entre os volumes desses sólidos quando as áreas de suas respectivas bases e suas alturas são as mesmas (FIGURA 10).

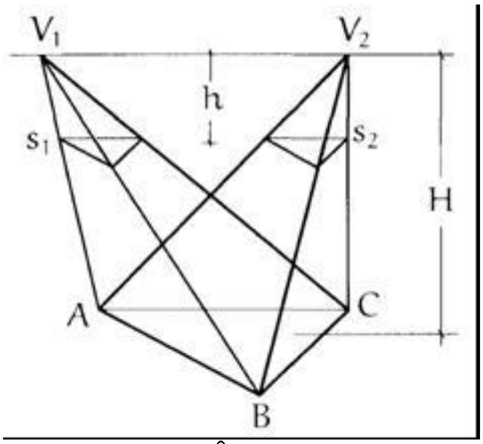


FIGURA 10 − PIRÂMIDES DE MESMA BASE E ALTURA
Fonte: (LIMA, *et al.*, 2006)

Esses mesmos autores nos mostram que se tomarmos um prisma de base triangular podemos dividi-lo em três pirâmides que, duas a duas, têm a mesma altura e mesma área da base (FIGURA 11). Disso resulta que o volume de uma dessas pirâmides equivale ao volume do prisma que a originou dividido por três.

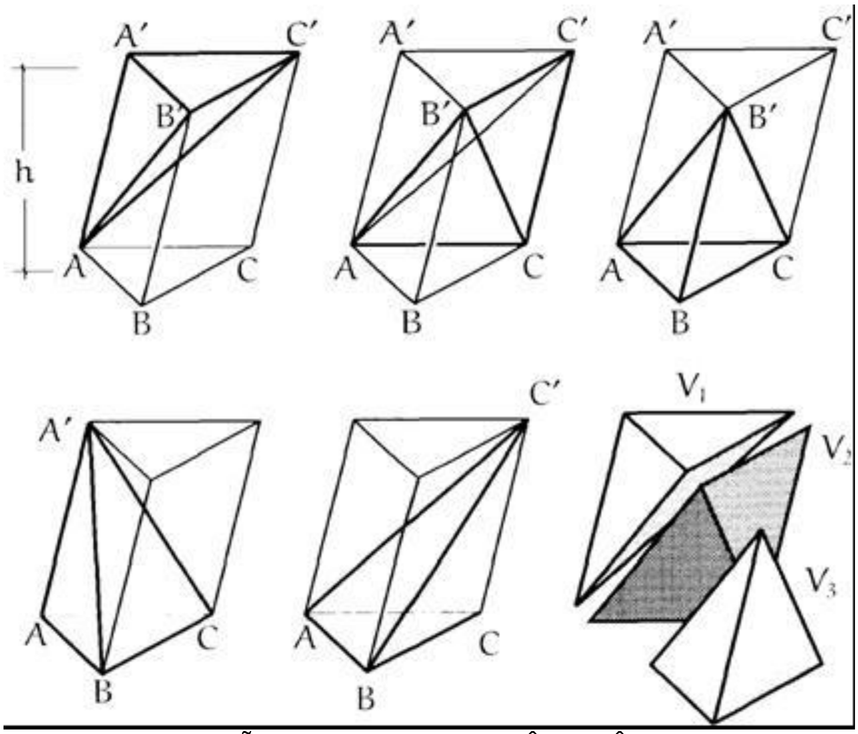


FIGURA 11 − DIVISÃO DO PRISMA EM TRÊS PIRÂMIDES
Fonte: (LIMA, *et al.*, 2006)

Lima et. al. (2001) incentivam a utilização desse princípio para o ensino de volumes, pois consideram que ele fornece argumentos intuitivos que propiciam a compreensão das fórmulas para calcular volumes.

O Princípio de Cavalieri também é aplicado por Brolezzi e Druck (2002) para obter o volume da esfera. Para isso comparam-se os volumes de uma esfera e de um sólido formado pela diferença entre um cilindro e um cone duplo, conhecido como anticlepsidra (FIGURA 12 e FIGURA 13).

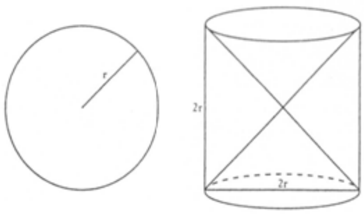


FIGURA 12 − ANTICLEPSIDRA
Fonte: (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

> Observemos que, cortando a esfera e o espaço entre o cone e o cilindro por um plano que dista h do centro, obtemos, em ambos os casos, uma área que é dada por $p(r^2 - h^2)$. O corte da esfera gera círculos de raio $r^2 - h^2$ (pelo Teorema de Pitágoras) e, portanto, tem área $p(r^2 - h^2)$, enquanto o corte do espaço entre o cilindro e os

> cones gera anéis circulares, cuja área é a área do círculo maior pr^2 menos a área do círculo menor ph^2, ou seja, $p(r^2 - h^2)$.
> Pelo Princípio de Cavalieri, temos que o volume da esfera será igual ao volume do sólido obtido do cilindro após a remoção dos dois cones; ou seja, o volume da esfera é igual a $pr^2.2r - 2\left(\frac{1}{3}.pr^2.r\right) = \frac{4}{3}pr^2$. (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

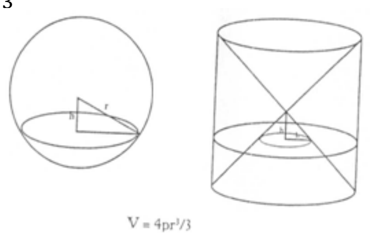


FIGURA 13 − ESFERA E ANTICLEPSIDRA
Fonte: (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

Considerando que $V = \frac{4pr^3}{3} = 4\,r\left(\frac{pr^2}{3}\right)$ pode representar quatro vezes o volume do cone de base igual a um grande círculo da esfera $\left(\frac{pr^2}{3}\right)$ e com altura igual ao raio da esfera $\left(\frac{r.pr^2}{3}\right)$, temos que, o volume da esfera equivale a quatro vezes o volume do cone de base igual ao diâmetro da esfera e altura igual ao raio dessa esfera.

Esses conhecimentos matemáticos, presentes nos textos da *Coleção do Professor de Matemática* e de Brolezzi e Druck (2002), e dos quais podemos obter uma noção intuitiva a partir dessas breves explicações, têm suas origens nos trabalhos dos matemáticos da antiguidade que já mencionamos anteriormente.

Para Brolezzi e Druck (2002), o Princípio de Cavalieri é uma ferramenta matemática que possui diversas aplicações práticas. Uma delas é na estereologia. Usada nas pesquisas biomédicas, a estereologia consiste em um método estatístico para determinar propriedades morfológicas de estruturas tridimensionais, a partir de imagens bidimensionais ou de secções finas de sólidos, com base no Princípio de Cavalieri e na utilização de recursos computacionais.

A estereologia em pesquisas biomédicas é usada para verificar alterações no organismo humano que podem ser indícios da presença de doenças. Para dar um exemplo, a estimação da diminuição da quantidade de neurônios em nosso cérebro, que se faz por estereologia, é um dos instrumentos que permitem auxiliar no diagnóstico da doença de Alzheimer. (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

> A Estereologia também é utilizada na Geologia, para o estudo de cristais e rochas, através de cortes finos. A Estereologia utiliza resultados da Geometria, da Estatística e recursos computacionais, e tem como metodologia central a ideia de tirar conclusões sobre objetos espaciais a partir da análise de suas seções planas, ideia essa presente no Princípio de Cavalieri. Essa ciência mostra que ideias matemáticas podem encontrar aplicações séculos depois de seu surgimento e podem contribuir para os avanços científico e tecnológico em diversas áreas do conhecimento. (BROLEZZI, DRUCK, 2002)

Essas aplicações, de acordo com Lima (2007), também devem fazer parte do ensino da Matemática. Portanto, o texto de Brolezzi e Druck (2002), nos parece que possui um alinhamento com as ideias de Lima quando traz essa questão das aplicações dos conhecimentos Matemáticos no texto voltado para formação de professores.

Outros conceitos, considerados fundamentais no ensino de volumes pelos referidos autores, são a noção de semelhança e a composição e decomposição tanto de figuras planas quanto de figuras espaciais.

Um dos problemas que Brolezzi e Druck (2002) assinalam com respeito aos conceitos mencionados está relacionado com a duplicação da área do quadrado, mencionada no diálogo *Menon* de Platão. O problema consiste em determinar o lado de um quadrado que tenha o dobro da área de outro quadrado preestabelecido.

> Sócrates o propunha em banquetes nos quais filósofos discutiam sobre tudo e dizia que ele podia ser resolvido mesmo por quem nunca tivesse estudado Geometria. Para provar isso, chamava um servo que atendia à mesa.
> A primeira opinião do servo era que o novo quadrado deveria ter o lado medindo o dobro do lado do quadrado dado. Sócrates, então, fazia o servo verificar, através de desenhos, que tinha obtido um quadrado com quatro vezes - e não duas - a área do quadrado dado. O passo seguinte seria fazê-lo indicar como tomar a metade desse novo quadrado. O servo concluía que bastava tomar metades de cada um dos quatro quadrados que compunham o quadrado maior. (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

Os autores destacam que “com esse método de abordagem da Geometria, Sócrates introduziu uma técnica muito útil pedagogicamente: o tratamento de áreas e volumes com a ideia de composição e decomposição de figuras e sólidos.”

> Ao resolver este problema, o aluno pode descobrir que a razão de semelhança entre as áreas das figuras é igual à razão entre os quadrados de seus lados.
> Outra ideia importante, referente ao problema de Sócrates, é que a relação de semelhança entre figuras implica uma determinada relação entre áreas. No problema proposto por ele, fica claro que, dobrando os lados do quadrado, obteremos um outro quadrado, com quatro vezes a área do quadrado original. Esse fato, na verdade, se generaliza. Temos sempre que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança entre elas. (BROLEZZI e DRUCK, 2002)

A noção de semelhança é bastante presente no cotidiano. Podemos entendê-la como a mudança de escala, ou seja, a ampliação e redução proporcional de uma figura ou de um objeto. Em sala da aula, uma primeira ideia sobre esse assunto poderia ser abordada por meio de um vídeo do Ministério da Educação intitulado "*Matemática na vida – razão e proporção*" (MEC, 2011). Esse vídeo possui uma parte dedicada à noção de semelhança relacionada ao conceito de proporcionalidade direta. O vídeo traz como exemplos a ampliação e redução de fotografias e a razão de semelhança entre um prédio e sua maquete. Mais detalhes sobre o vídeo são apresentados no capítulo 3.

Os livros didáticos, em geral, adotam uma visão do conceito de semelhança baseada nos livros de Euclides de Alexandria. Entretanto, é possível adotar uma visão mais abrangente e ainda assim conceitualmente correta. Lima (2009) nos traz uma noção de semelhança de uma forma que possibilita o entendimento desse conceito.

> "Seja $B(x, y, z)$ um bloco retangular de dimensões x, y e z. Os blocos $B(x, y, z)$ e $B'(x', y', z')$ são semelhantes se, e somente se, $x' = kx$, $y' = ky$ e $z' = kz$ para algum número real positivo k, chamado razão de semelhança (ou fator de ampliação). Os volumes de B e B' são tais que $v(B') = kx \cdot ky \cdot kz = k^3 xyz = k^3 v(B)$, ou seja, multiplicando as arestas de B por k, seu volume ficou multiplicado por k^3" (FIGURA 14). "Este resultado vale naturalmente para poliedros retangulares semelhantes P e P', e levando em conta a definição de volume, vale também para sólidos semelhantes quaisquer."
> "*A razão entre os volumes de sólidos semelhantes é o cubo da razão de semelhança.*" (LIMA, 2009)

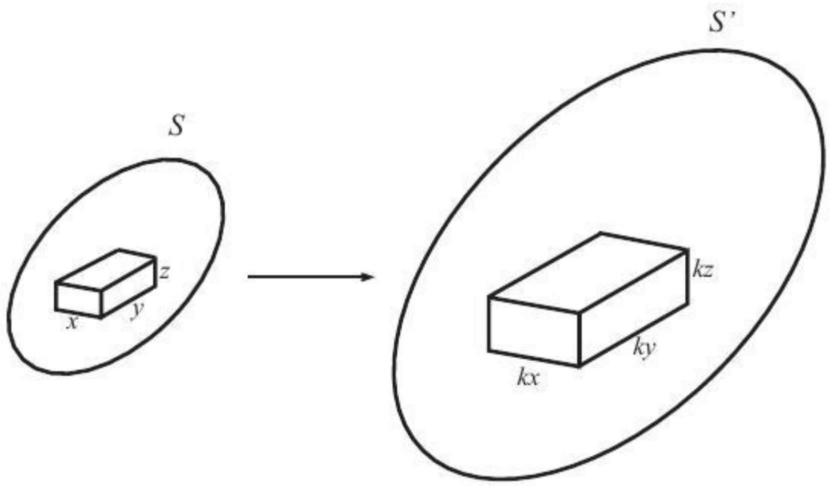


FIGURA 14 − SEMELHANÇA
Fonte: (LIMA *et al.*, 2003)

A combinação das abordagens, com o vídeo do MEC (2011) apresentando questões de aplicação do conceito de semelhança, o raciocínio estimulado pelo problema da duplicação da área do quadrado, que pode ser resolvido com auxílio da construção de desenhos, e, por fim, a noção de semelhança apresentada com certo formalismo, parece-nos propícia a aprendizagem conceitual. Isso porque ela contempla certo equilíbrio entre conceituação, manipulação e aplicação, além de também envolver raciocínio, visão e construção.

O presente capítulo foi dedicado à apresentação dos conceitos sobre a forma peculiar da aprendizagem da Matemática segundo as ideias de Duval (1999, 2003, 2009). Aqui apareceram conceitos como de registros de representação semiótica, de tratamento, de conversão e de visualização. Como aspectos importantes para a aprendizagem da Matemática, surgiram atividades de construção, de raciocínio, de conceituação, de manipulação e de aplicação. Foi visto que a epistemologia da Matemática também é relevante para o ensino dessa área de conhecimento. A partir dos conceitos discutidos no presente capítulo, passaremos doravante à análise do *Caderno do Professor* (SÃO PAULO, 2009).

2 ANÁLISE DA PROPOSTA CURRICULAR DE SÃO PAULO

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo."

Nélson Mandela

Acreditamos poder estabelecer relações entre as atividades propostas no *Caderno do Professor* com o tratamento epistemológico conforme Brolezzi e Druck (2002) e os textos da *Coleção do Professor de Matemática* descritos no Capítulo 2. Por meio dessas relações, e ainda recorrendo, na medida do necessário, às ideias de Duval (2009, 2003), acreditamos poder obter uma proposta de trabalho conceitual sobre volumes. Esse tratamento poderia levar a uma maneira de ensino rica em representações, em recursos didáticos, e que podem proporcionar uma aprendizagem dos conceitos Matemáticos relacionados ao volume de sólidos.

Na sessão de orientações gerais do *Caderno do Professor* temos algumas indicações de que o material oferecido visa a uma abordagem conceitual e contextualizada:

> Os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar de cada bimestre não se afastam, de maneira geral, do que é usualmente ensinado nas escolas, ou do que é apresentado pelos livros didáticos. As inovações pretendidas referem-se à forma de abordagem desses materiais, sugerida ao longo dos Cadernos de cada um dos bimestres. Em tal abordagem, busca-se evidenciar os princípios norteadores do presente currículo, destacando-se a contextualização dos conteúdos, as competências pessoais envolvidas, especialmente as relacionadas com a leitura e a escrita matemática, bem como os elementos culturais internos e externos à Matemática. (SÃO PAULO, 2009, p. 8)

O que nos parece é que, ao buscar contextualizar os conteúdos Matemáticos, as atividades desse material devem se aproximar do que para Lima (2009) seriam as aplicações. As competências de leitura e escrita, possivelmente, venham a viabilizar o trabalho com variedade de representações indicadas por Duval. Enquanto que os elementos culturais, mencionados no texto citado, certamente se apoiarão na história da Matemática.

Verificaremos se são apresentados materiais disponíveis**,** como textos, *softwares*, *sites*, vídeos, dentre outros que poderiam ajudar o professor a enriquecer suas aulas, consoante prevê o *Caderno do Professor*. O uso desses diversos materiais pode fornecer ao aprendiz recursos para a visualização dos conceitos matemáticos.

> Sabemos que uma das dificuldades que os alunos enfrentam no estudo da geometria espacial é a representação e a interpretação de figuras tridimensionais desenhadas no plano. Neste sentido, propomos, no início de cada Situação de Aprendizagem, atividades de manipulação e exploração dos sólidos geométricos. (SÃO PAULO, 2009, p. 8)

O trecho citado evidencia a preocupação com a compreensão das representações planas das figuras tridimensionais e aponta como solução a exploração heurística de sólidos geométricos. Isso demonstra um alinhamento com o aspecto da teoria de Duval no que se refere a essas dificuldades inerentes à aprendizagem da Matemática, bem como, a importância das construções e da manipulação para favorecer a visualização.

2.1 VOLUME DO PRISMA

Assim como nas referências, trazidas no capítulo 1, a proposta curricular do estado de São Paulo (2009) parece trazer um enfoque dinâmico, que não se restringe a fórmulas, mas valoriza o entendimento dos conceitos. Segundo os autores da Proposta, a estruturação dos volumes procurou favorecer a harmonia entre o que é necessário aprender e a maneira mais adequada, significativa e motivadora de ensinar aos alunos.

Na primeira das quatro situações de aprendizagem, a saber, “Prismas: uma forma de ocupar o espaço”, prevista no *Caderno do Professor* para o quarto bimestre do segundo ano do ensino médio, são apresentados o conceito de prisma, suas relações métricas e o cálculo de seu volume.

O Caderno do Professor traz algumas orientações para o docente:

> De maneira geral, a abordagem inicial sobre volume de prismas é aquela em que se toma um paralelepípedo reto e se determina quantos cubinhos de aresta de uma unidade de comprimento cabem no sólido.

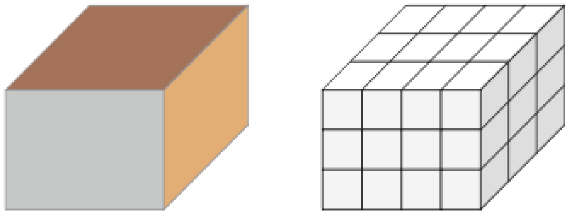


FIGURA 15 – CÁLCULO DO VOLUME DO PRISMA
Fonte: (SÃO PAULO, 2009)

> Com isso, conclui-se que a quantidade de cubinhos no paralelepípedo reto é igual ao produto da área da base (A_{base}), que corresponde à quantidade de cubos apoiados na base, pela altura (H), que corresponde à quantidade de camadas de cubos que preenchem completamente o sólido.
> Dessa forma, temos que o volume do paralelepípedo é: $V = A_{base} . H$
> Embora a generalização para o cálculo do volume de qualquer prisma possa ser uma passagem simples para os alunos, observamos a importância de, neste momento, apresentarmos e aplicarmos o Princípio de Cavalieri. O objetivo é a caracterização dos prismas como uma sobreposição de placas idênticas, o que será também explorado nos cilindros e na comparação entre o volume de diferentes sólidos. (SÃO PAULO, 2009)

Essa abordagem pela divisão do cubo em cubinhos menores é apresentada apenas no *Caderno do Professor*. O *Caderno do Aluno* não contém essa abordagem. Mas, ao aplicar a abordagem proposta em São Paulo (2009), seria adequado considerar as explicações da validade desses cálculos de volume citados, tanto para os números inteiros quanto para os racionais e irracionais, sugeridos por Lima (2009).

> Para iniciar a discussão, o professor pode comentar com os alunos que na Geometria é mais simples calcular o comprimento de uma linha reta do que obter o comprimento de uma curva. Da mesma forma, é mais fácil calcular a área de um polígono convexo do que obter a área de uma região não poligonal, ou calcular o volume de um paralelepípedo do que de um sólido geométrico com outro formato. A busca de métodos generalizados para se calcular volumes levou matemáticos, como o geômetra italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647), a imaginarem os sólidos como se fossem formados por camadas infinitamente finas (os indivisíveis). (SÃO PAULO, 2009)

Esse trecho revela a preocupação, compartilhada por Brolezzi e Druck (2002) e pelos textos da *Coleção do Professor* de Matemática, em posicionar a Matemática como uma construção cultural humana e que tem, assim, uma história de desenvolvimento. Ao longo dessa história surgiu a diversidade de registros de representações que caracterizam os objetos Matemáticos.

Além de estudarmos os sólidos geométricos mais simples por serem mais fáceis, a partir deles podemos estabelecer relações para conhecermos outras formas. Podemos também efetuar estimativas e aproximações que, dependendo da necessidade, podem ser suficientes para resolver certo problema. Por exemplo, contando os quadrados internos da figura irregular (Figura 16), teríamos um valor aproximado de sua área em comparação aos quadrados. Mas se somarmos a quantidade de quadrados que estão sob a linha e dividirmos o resultado por dois, considerando que em média a linha divide cada quadrado ao meio, e a esse resultado somarmos a quantidade de quadrados internos, teríamos ainda uma melhor aproximação da área da figura irregular. Assim sendo as formas simples servem como ponto de partida para o entendimento das formas mais complexas.

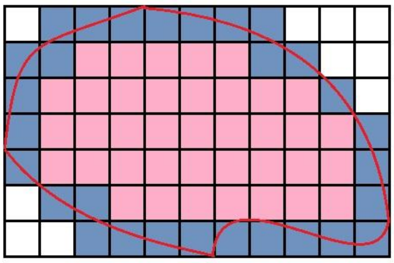


Figura 16 − adaptado de Brolezzi e Druck (2002)

Esse assunto evidencia também a importância já mencionada da composição e decomposição das figuras tão importante para o estudo da geometria.

Agora vejamos a atividade da primeira *Situação de Aprendizagem*, que trata especificamente sobre o volume do prisma, presente em São Paulo (2009). Para tratar do volume desse sólido em primeiro lugar é apresentado um texto e algumas figuras geométricas, reproduzidos a seguir (Figura 17):

O volume do prisma e o Princípio de Cavalieri
O desenvolvimento das embalagens de produtos tornou-se um tema relevante nos dias de hoje, particularmente quando o assunto é preservação do meio ambiente. Além do tipo de material com que são fabricadas, elas devem ser bem dimensionadas, isto é, devem

> ter a melhor relação entre o volume interno e a quantidade de material utilizado. Além disso, na escolha do seu formato, deve-se considerar que, quando embaladas coletivamente, o espaço vazio entre elas seja o menor possível. Na natureza, encontramos uma situação similar: a construção dos alvéolos das abelhas.
> Observando-se a forma prismática dos alvéolos, percebe-se que eles respeitam uma exigência: a de permitir que, com uma mesma quantidade de cera, se construa um recipiente com maior volume para acondicionar o mel. O fato de as paredes dos alvéolos serem comuns, permitindo que não haja espaços vazios entre elas, remete-nos ao problema da pavimentação do plano, solucionado quando usamos triângulos regulares, quadrados e hexágonos regulares. Como a nossa situação é espacial, podemos imaginar a “pavimentação do espaço” com poliedros, particularmente com os prismas regulares retos de base triangular, quadrangular e hexagonal.
> Mas qual deles comporta o maior volume, supondo que tenham a mesma área lateral?

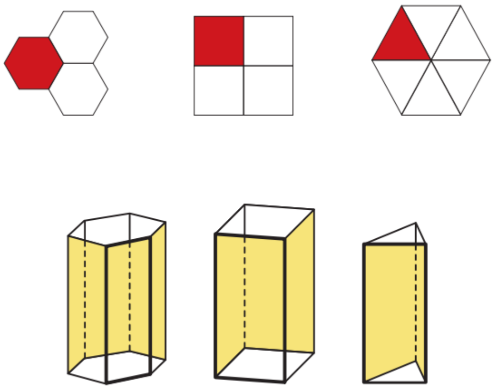


Figura 17 − (SÃO PAULO, 2009)

Podemos perceber que essa atividade ilustra a intenção desse material em apresentar atividades contextualizadas. Nesse caso, essa contextualização aparece de diversas formas, tais como, por exemplo, no problema produtivo da fabricação de embalagens e também no modo como, na natureza, as abelhas constroem seus alvéolos.

Além disso, estabelece relações internas à Matemática entre o volume dos sólidos e sua área, entre os diferentes formatos de prisma e também às questões de pavimentação do plano.

Ainda que aparentemente por coincidência, essa atividade apresenta uma questão provocativa e de aplicação como é recomendado por Lima (2009) ao iniciar o ensino de conteúdos Matemáticos.

Para a investigação do cálculo do volume dos prismas os *Cadernos* apresentam a seguinte atividade:

> Atividade em grupo – A solução das abelhas
> A finalidade das abelhas, quando constroem seus alvéolos de cera, é apenas fazer o recipiente para o mel que fabricam, e isso não é produto do pensamento, mas de seu instinto. Nessa atividade, as abelhas utilizam importantes recursos naturais que o ser humano busca de forma consciente por meio de conceitos geométricos. É interessante perceber que, no instinto animal, podemos identificar soluções para problemas humanos, como o da economia de material na produção de embalagens. Essa é, sem dúvida, uma forma instigante de promover a investigação científica.
> Vamos, então, investigar a solução das abelhas!
> Cada grupo receberá duas folhas de sulfite e terá uma tarefa diferente: alguns grupos construirão os alvéolos na forma de um prisma triangular regular; outros, na forma quadrangular regular; e o restante, na forma hexagonal regular. Cada grupo trabalhará com as duas folhas. A primeira será utilizada para a construção da lateral do alvéolo. Essa folha deve ser trabalhada com o maior lado apoiado sobre a mesa. A segunda folha será utilizada para formar a base do alvéolo. Para alcançar a forma desejada, vocês podem utilizar dobraduras. Terminada essa etapa, meçam com uma régua as arestas da base e da altura do alvéolo e calculem seu volume com base nas medidas aproximadas.
> Concluída a tarefa, o professor abrirá o debate coletivo recolhendo os dados dos grupos e comparando-os, para concluir qual dos formatos estudados tem o maior volume.
> Registre, no espaço a seguir, tanto os dados do seu problema como as conclusões tiradas em sala de aula. (SÃO PAULO, 2009)

Formato do prisma investigado: ______	
Medida da aresta da base	
Medida da altura	
Área da base	
Volume do prisma	
Área lateral	

A realização dessa atividade envolve aspectos que são salientados na teoria de Duval (2009), pois demanda a construção dos prismas, utilizando folhas de sulfite, a aferição das medidas com régua e o tratamento algébrico das medidas obtidas para calcular a área da base e o volume desses sólidos. Assim se faz presente a exploração heurística o raciocínio e a visualização, bem como, os registros figurais, o algébrico e a língua natural para registrar as conclusões discutidas em sala de aula.

Esta atividade também consegue abarcar aspectos da manipulação, dos conceitos Matemáticos e sua aplicação. Ao que nos parece trata-se, portanto, de uma abordagem dinâmica.

A atividade imediatamente posterior a essa que apresentamos presente no material analisado é a seguinte:

> Dois vasos de mesma altura H têm formatos diferentes e estão apoiados sobre uma mesa. Colocando-se água em ambos os vasos até a altura h, constata-se que, para qualquer valor de h, sendo 0 ≤ h ≤ H, as superfícies da água nos dois vasos têm áreas iguais. Que relação você acredita que existe entre os volumes dos dois vasos? Justifique sua resposta. (SÃO PAULO, 2009)

Figura 18 (SÃO PAULO, 2009)

Podemos notar que essa atividade pode ser resolvida pelo princípio de Cavalieri, antes mesmo que isso seja explicitado no material. Na atividade anterior, entre os diferentes formatos dos prismas o perímetro se mantinha constante. Já nesta última atividade, são as áreas de cada uma das secções planas dos vasos paralelas às bases que se mantêm constantes. Por conseguinte os volumes dos vasos também se mantêm constantes. Destacamos que nessas variações entre as atividades estão em jogo variáveis cognitivas que, segundo Duval (2009), são fundamentais para a compreensão dos objetos matemáticos.

Outro aspecto dessa atividade se refere ao sentido da conversão. Parece-nos que a conversão se dá do registro figural para a língua natural, ou pelo menos no interior da própria língua natural, com o auxílio do registro figural. O mais comum é que as atividades apresentem o sentido da conversão do registro em língua natural para o registro figural e/ou algébrico. Duval (2009) considera que a aprendizagem dos objetos matemáticos necessita desse trabalho de conversão entre representações nos diferentes sentidos de conversão.

Essa atividade também tem a característica de necessitar de um conceito matemático sem que ele esteja explicitamente presente no enunciado. Esse tipo de atividade é encorajado por Lima (2009).

Subsequentemente a essa atividade é apresentado um texto que enuncia o princípio de Cavalieri e seu contexto histórico, como segue:

> **Princípio de Cavalieri**
> Na Geometria é mais simples calcular o comprimento de uma linha reta do que obter o comprimento de uma curva. Da mesma forma, é mais fácil calcular a área de um polígono convexo do que obter a área de uma região não poligonal, ou calcular o volume de um paralelepípedo do que o de um sólido geométrico com outro formato.
> A busca por métodos generalizados para calcular volumes levou matemáticos, como o geômetra italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647), a imaginar os sólidos como se fossem formados por camadas infinitamente finas (os indivisíveis).
> Para Cavalieri, seguindo uma linha de raciocínio análoga à de Arquimedes, Galileu e Kepler, a linha era formada por pontos sem comprimento, a superfície por infinitas linhas sem largura e os sólidos eram interpretados por uma reunião de superfícies sem profundidade. No seu entendimento, era evidente concebermos as figuras planas como tecidos compostos de fios paralelos e os sólidos como livros, que são pilhas de folhas paralelas.
> De forma simplificada, o Princípio de Cavalieri pode ser compreendido a partir de um maço de cartas. Dispondo as cartas, uma a uma, no formato da Figura 1, o sólido final foi construído pela sobreposição de figuras planas, no caso, retângulos. Qual será o seu volume? Deslizando as cartas, uma sobre a outra, encontramos outro formato, agora mais conhecido: um paralelepípedo oblíquo (Figura 2). Afinal, houve ou não alteração do volume do sólido? A forma mudou, mas não seu volume, pois o volume do sólido corresponde ao total de cartas, e este não muda quando as cartas deslizam umas sobre as outras. Vamos deslizar novamente as cartas, criando a forma de um paralelepípedo reto (Figura 3), cuja expressão do volume é conhecida: produto da área da base pela altura.

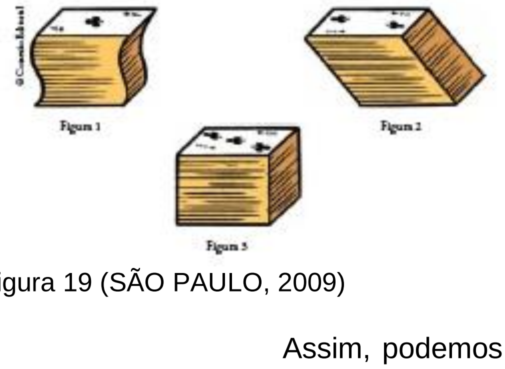


Figura 19 (SÃO PAULO, 2009)

> Assim, podemos concluir que, de forma geral, tomados dois sólidos com bases de mesma área e sobre um mesmo plano, se todas as

> seções paralelas à base dos dois sólidos têm a mesma área, então, os dois sólidos têm o mesmo volume (Figura 4). (SÃO PAULO, 2009)

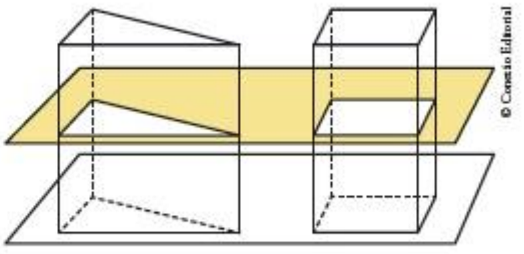


Figura 4

Figura 20 (SÃO PAULO, 2009)

O Princípio de Cavalieri também é apresentado explitamente nos *Cadernos do Aluno e do Professor,* e de uma maneira semelhante àquela de Brolezzi e Druck (2002), ou seja, embasada no desenvolvimento epistemológico e histórico, recorrendo até mesmo ao exemplo das cartas de baralho.

Percebemos também aqui argumentos que procuram justificar a importância e a razão de estudar, primeiramente, as formas mais simples e, a partir delas, procurar maneiras de generalização para o entendimento de formas mais complexas.

Podemos notar que o Princípio de Cavalieri aparece em todos os textos aqui analisados que tratam do ensino de volume. Vimos que ele também se aplica às figuras planas e pode ser utilizado, analogamente para determinar área de figuras. Sendo assim, parece reconhecida sua importância para o ensino e para a compreensão dos conceitos Matemáticos a que ele se aplica. Isso se explica sobretudo por três fatores. Em primeiro lugar, pela ideia intuitiva, e de certo movimento que o Principio de Cavalieri proporciona. Em segundo lugar pela importância histórica desse princípio. Por fim, pelas aplicações práticas que se utilizam dessa ideia.

Esse último texto fecha a primeira *Situação de Aprendizagem* que trata do volume dos prismas. A *Situação de Aprendizagem* 2 de ambos os *Cadernos*, do *Caderno do Aluno* e do *Caderno do Professor*, traz atividades sobre o volume do cilindro.

Verificamos até aqui que as atividades destacadas cumprem o que se propõem, ou seja, são atividades que tratam dos conteúdos de uma maneira contextualizada pela história, por aplicações práticas, possibilitando a construção e manipulação de objetos. As atividades se apresentam em textos relativamente longos, se comparados àqueles que se baseiam apenas na aplicação de fórmulas. Certamente isso visa estimular a habilidade leitora dos alunos. A resolução de algumas atividades também solicita justificativa por escrito, estimulando o desenvolvimento dessa habilidade nos alunos.

As atividades, de certo modo, cumprem determinados aspectos das recomendações dadas pelos textos que apresentamos no capítulo 1, conquanto esse não seja seu objetivo explícito. Dentre aqueles aspectos satisfeitos pelas referidas atividades podemos mencionar a exploração heurística, a construção por instrumentos, o uso de diferentes tipos de representação, a variação do sentido das conversões entre registros, o estímulo ao raciocínio e a visualização dinâmica, a conceituação, a manipulação de objetos e de registros algébricos, as aplicações dos conceitos matemáticos, a contextualização histórica desses conceitos. Enfim, consideramos por isso que a abordagem de ensino presente nos *Cadernos* analisados é dinâmica, voltada a compreensão dos conceitos e não apenas das fórmulas.

Vejamos agora algumas atividades da *Situação de Aprendizagem* 2 do *Caderno do Professor* e do *Caderno do Aluno*, que trata sobre cilindros.

2.2 VOLUME DO CILINDRO

Ao tratar do volume do cilindro o material analisado também recorre ao Princípio de Cavalieri. Vejamos como isso é apresentado:

> **O volume do cilindro**
>
> Uma estrutura atualmente muito comum e significativa para a exploração da ideia do volume do cilindro pode ser encontrada em um porta-CDs. De maneira intuitiva, podemos considerar o cilindro como uma figura espacial formada pela sobreposição ou empilhamento, em uma mesma direção, de círculos iguais uns sobre os outros.

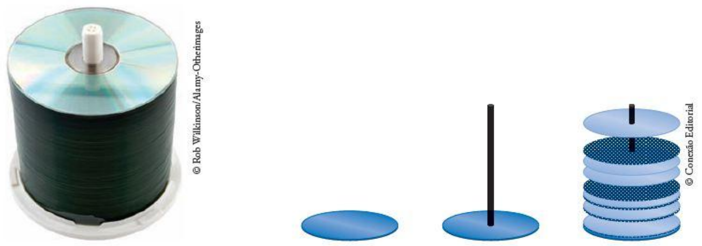


Figura 21 (SÃO PAULO, 2009)

Essa forma de interpretação pode ser explorada como análoga ao volume dos prismas, concluindo-se que o volume de um cilindro é produto da área da sua base pela altura: $V = A_b.h$.
Nesta situação também pode ser aplicado o Princípio de Cavalieri. Considerando um prisma e um cilindro de mesmas áreas de base, apoiados sobre um mesmo plano, qualquer plano que passar paralelo à base deve interceptar os dois sólidos, formando duas superfícies S1 e S2, paralelas às bases do prisma e do cilindro, de mesma área. Podemos concluir que o volume de um cilindro, como no prisma, é determinado pelo produto da área de sua base pela altura. Nesse caso, a base é um círculo, cuja expressão da área será $A_b = \pi.r^2$. Logo, o volume será dado por: $V = \pi r^2 h$. (SÃO PAULO, 2009)

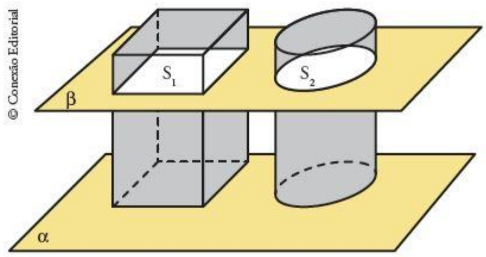


Figura 22 (SÃO PAULO, 2009)

Podemos observar que o texto, similarmente ao texto de Brolezzi e Druck (2002) e também ao de Lima (2009), se apóia no princípio de Cavalieri para relacionar o volume do prisma reto-retângulo ao volume do cilindro de base circular. Entretanto, aparentemente, existe uma diferença no entendimento do conceito de cilindro. Nos *Cadernos* analisados, o cilindro é entendido como um prisma de base circular, ao passo que, para os outros autores mencionados, o cilindro seria caracterizado, digamos assim, como um prisma modificado, com qualquer formato da base.

Mais uma vez destacamos aqui a utilização, ou a menção, de materiais concretos, neste caso o porta-CDs, para ilustrar o Princípio de Cavalieri. O que consideramos uma estratégia que fornece a visão dos objetos físicos e podem favorecer a visualização dos objetos matemáticos associados aqueles.

Vejamos a atividade subsequente:

> Latas de molho de tomate têm, geralmente, forma cilíndrica. Um consumidor encontrou duas marcas de seu interesse e observou os seguintes fatos:
> • a embalagem da marca A possuía o dobro da altura da embalagem da marca B;
> • a embalagem da marca B possuía o dobro do diâmetro da embalagem da marca A.
> Sabendo que a primeira custa R$ 2,30 e a segunda, R$ 3,40, qual será a compra mais econômica? (SÃO PAULO, 2009)

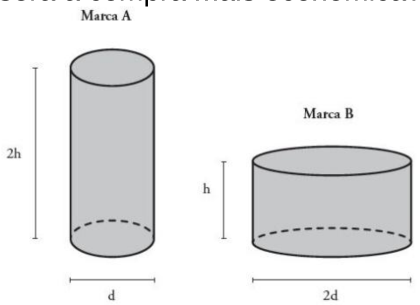


Figura 23 (SÃO PAULO, 2009)

Agora vejamos as considerações sobre essa atividade presentes em São Paulo (2009):

> O cilindro A tem raio da base igual a d/2 e altura igual a 2h.
> Logo, $V_A = \pi r^2 . 2h = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 . 2h = \pi \frac{d^2}{4} 2h \Rightarrow V_A = \frac{d^2 h\pi}{2}$
> O cilindro B tem raio da base igual a d e altura igual a h.
> Logo, $V_B = A_b . h = \pi\, d^2 h$.
> O volume da marca B tem o dobro do volume da marca A. Como o preço da marca A é maior que a metade do preço da marca B, é mais vantajoso comprar a marca B.

Uma característica que nos chama a atenção nessa atividade é que, subjacente à sua resolução existe uma questão relacionada à semelhança. Ora, se dobramos o diâmetro do círculo da base temos uma área quatro vezes maior que a original – como já visto no capítulo 1, quando tratamos da duplicação do quadrado e também da semelhança. Por sua vez, isso quadruplicará também o volume, já que mantivemos a mesma altura. Mas quando dobramos a altura do cilindro, dobramos também o seu volume. Sendo assim, se tivéssemos um cilindro *C* de altura *h* e diâmetro *d*, o cilindro *A* teria o dobro do volume de *C* e o cilindro *B* teria quatro vezes o volume de *C*.

Essas relações nos parecem bastante enriquecedoras do ponto de vista cognitivo, como um auxílio no raciocínio discursivo e na compreensão integrativa dos objetos matemáticos. Entretanto, o conceito de semelhança não é tratado explicitamente nos *Cadernos* analisados.

Podemos notar que as atividades dos *Cadernos* se apoiam, regularmente, nas aplicações práticas dos conhecimentos Matemáticos, mas não deixam de lado aspectos de conceituação e de manipulação. Sendo assim, parece-nos que os autores desse material compartilham, nesse sentido, com as preocupações de Lima (2007).

Analisemos a atividade subsequente (SÃO PAULO, 2009):

> Os reservatórios de gasolina dos postos geralmente são tanques no formato de um cilindro reto. Para avaliar o volume de combustível que ainda resta no cilindro enterrado no solo, o funcionário do posto utiliza uma régua, colocada verticalmente na boca do tanque até atingir o nível do combustível. Ao retirar a régua do tanque, o funcionário lê a graduação e determina a altura do nível do combustível consumido. Admitindo que o tanque tenha sido enterrado no sentido vertical, como ilustra a figura, e que tenha raio da base R = 1 m e altura H = 2 m, qual é o volume de combustível do tanque quando a régua registra altura d = 40 cm?

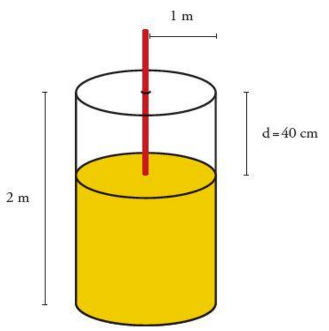


Figura 24 (SÃO PAULO, 2009)

Com base nessa atividade ainda aparecem essas outras questões: (SÃO PAULO, 2009)

> a) Encontre a expressão que relaciona o volume V do combustível contido no tanque com a medida d da régua.
> b) Construa e analise o gráfico da função V(d).

> c) É possível graduar uma régua para que, ao ser usada, permita a conversão da medida em centímetros para o volume de litros armazenados no tanque? Se afirmativo, explique como fazê-lo.

A resolução dessas atividades contempla algumas características da teoria dos registros de representação semiótica, nomeadamente, a utilização da diversidade de registros, pois, além da utilização da língua natural, das figuras geométricas e dos registros algébricos, aparecerão também as representações de função e do gráfico da função.

Não percebemos no material a observação do fato de que cada conversão entre registros poderá estar sujeita aos fenômenos de incongruência entre as representações. Esses fenômenos permitem explicitar a complexidade do conhecimento matemático. E poderão acarretar o insucesso dos alunos na resolução correta das atividades, caso eles não possuam ainda a compreensão integrativa dos objetos matemáticos envolvidos no problema.

Após essa atividade, São Paulo (2009) traz mais algumas relacionadas ao volume de cilindros de base circular em situações de aplicação prática. Uma dessas atividades é, por exemplo, calcular o volume de ar de um pneu ou o volume do cilindro “deitado” que armazena a gasolina dos postos de combustível que merecem as mesmas considerações já realizadas até aqui.

Seguiremos para as análises dos conteúdos relacionados a volume na *Situação de Aprendizagem* 3 de São Paulo (2009).

2.3 VOLUME DA PIRÂMIDE

Para trabalhar com as pirâmides os materiais disponibilizados iniciam com um texto introdutório, vejamos:

Figura 25 (SÃO PAULO, 2009)

> Talvez a manifestação mais contundente do interesse humano pela ascensão possa ser encontrada no Egito. A pirâmide de Quéops representa esse sonho do ser humano de alcançar o céu e as estrelas. Vendo de perto, observa-se que as pirâmides são construídas como uma enorme escadaria, que tem sua estrutura no conhecimento da forma prismática. Foi apoiado nesse conhecimento que o ser humano realizou sua fantasia e representou o movimento de ascensão na Geometria, criando, assim, a pirâmide.
> Não é sem motivo que, em muitas definições etimológicas da palavra pirâmide, destaca-se o prefixo *pira*, cujo significado é “fogo”, igualmente alusivo à ascensão. (SÃO PAULO, 2009)

Preservando a preocupação em contextualizar os conceitos, o texto dos *Cadernos* traz um pouco de informação sobre as pirâmides, o que favorece o aprendizado, já que, conforme sublinha Lima (2009), o uso da história suaviza a aprendizagem, tornando-a mais agradável. Já verificamos que esse recurso é usado para tratar de volumes nos *Cadernos do Professor* e *Cadernos do Aluno*.

Após o texto introdutório, e antes de trabalhar com o volume da pirâmide, o *Caderno do Professor* sugere a manipulação e a construção de pirâmides usando, por exemplo, planificações, linhas e canudos, ou bolinhas de isopor e palitos de churrasco.

Depois da manipulação dessas pirâmides, os autores aconselham que sejam discutidas as semelhanças e diferenças entre esses sólidos e o prisma. A partir daí temos mais uma atividade de manipulação de material concreto, reproduzida na Figura 26 “que tem por objetivo facilitar a compreensão do cálculo do volume da pirâmide” (SÃO PAULO, 2009).

Brolezzi e Druck (2002) sugeriram a utilização do sabão, ou de outro material fácil de cortar, para decompor o prisma de base triangular em três pirâmides. A diferença para a atividade ilustrada na Figura 26 é que ela decompõe um prisma reto-retângulo.

Encontrando o volume da pirâmide em uma barra de sabão

Gravura/Instrução	Gravura/Instrução
 **1.** Tomamos por base uma barra de sabão no formato de um paralelepípedo reto-retângulo. Fazemos um corte na diagonal das bases, obtendo, assim, dois prismas de bases triangulares. Cada aluno deve ficar com um desses prismas.	 **2.** Seccionamos o prisma de base triangular com uma faca, segundo o plano que passa por um vértice da base e pela diagonal das faces laterais.
 **3.** Separando as partes, o pedaço menor será uma pirâmide de base triangular (P_1) e o pedaço maior uma pirâmide de base quadrangular (P_2). Indicamos pela letra **x** as faces obtidas na seção. Isso nos ajudará a compor o prisma novamente.	 **4.** Apoiando a pirâmide (P_2) sobre sua base (que é um retângulo), fazemos um corte que parte do seu vértice e encontra a diagonal da base.
 **5.** As duas pirâmides obtidas por esse corte terão o mesmo volume, pois elas têm a mesma altura (vértice comum) e área da base igual (metade da área do retângulo). Indicamos as faces obtidas pela seção pela letra **y**. Observe que uma delas terá as indicações **x** e **y** e a outra somente a **y**.	 **6.** Comparando a pirâmide de base triangular obtida no primeiro corte (P_1) com a pirâmide que só possui a etiqueta **y**, verificamos que elas têm a mesma altura e área da base igual. Seus volumes, portanto, também são iguais.

Figura 26 (SÃO PAULO, 2009)

Assim, temos que:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_1 \,.\, H + \frac{1}{3}A_2 \,.\, H + \frac{1}{3}A_3 \,.\, H$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} H\,(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \,.\, H$$

Lima (2007), também se utilizou da decomposição do prisma triangular para demonstrar que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma de que a pirâmide se decompôs.

Acreditamos que essas atividades de construção, que possibilitam ver os objetos, realmente podem auxiliar a compreensão dos conceitos, pois, relembrando as palavras de Duval (1999), nada é tão convincente quanto aquilo que vemos.

É importante ressaltar aqui a utilização do Princípio de Cavalieri para estabelecer que duas pirâmides de mesma altura e cujas bases têm mesma área possuem o mesmo volume.

A fim de generalizar o cálculo do volume das pirâmides, as orientações ao professor, no texto analisado, mostram que toda pirâmide pode ser decomposta em pirâmides de bases triangulares justapostas.

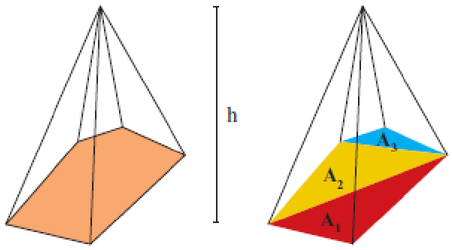


Figura 27 (SÃO PAULO, 2009)

A partir dessas construções e generalizações, é sugerido que os alunos redijam um relatório das atividades desenvolvidas, com desenhos e as conclusões obtidas. Acreditamos que com isso deseja-se trabalhar as capacidades de leitura e de escrita anunciadas nos objetivos dos *Cadernos*.

A criação de desenhos e planificações, como foi sugerida, também é considerada por Duval (1999), Lima (2009) e Brolezzi e Druck (2002) um expediente importante para a aprendizagem.

2.4 VOLUME DO CONE

Ao tratar do volume do cone, como costumeiramente ocorreu nas atividades que analisamos até aqui, também é sugerida a construção e a manipulação de objetos que têm o seu formato. São empregados, então, cones de sorvete e chapéus de festa de aniversário infantil.

Para construí-los pede-se que sejam desenhados, em folha de papel, círculos de 10cm de raio e, a partir desses círculos devem ser construídos setores circulares de 60, 90, 120 e 270 graus.

A seguir cada um desses setores circulares deve ser unido pelos seus próprios raios que delimitam o setor, com fita adesiva por exemplo. E então serão tomadas algumas medidas, quais sejam: a área do setor circular, o raio da base e a altura do cone.

Exemplifica-se a obtenção desses resultados assim:

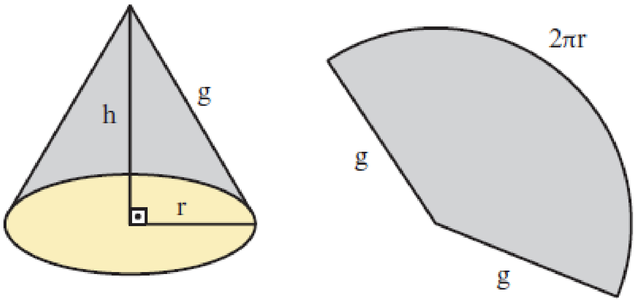
> Aqui, professor, o aluno é levado a investigar as relações entre a geratriz, o raio da base e o comprimento do setor circular. Todos os cálculos são obtidos com o uso de proporcionalidade.
> Vamos detalhar os cálculos para o setor de 120º:
> A área do círculo original é: A = 100 π e seu comprimento é C = 20 π logo, a área do setor será 1/3 deste valor, portanto $A_{setor} = \frac{1}{3}.100\pi\ cm^2$ e seu comprimento será $C_{setor} = \frac{1}{3}.20\pi\ cm$.
> Como o comprimento do arco representará o comprimento da base, podemos concluir que $C_{base} = C_{setor} = \frac{1}{3}.20\pi$ logo, se r é o raio da base, $2\pi r = \frac{1}{3}.20\pi$ e, portanto, $r = \frac{10}{3}cm$.
> [...] observamos que a altura, o raio da base e a geratriz são lados de um triângulo retângulo em que a geratriz é a hipotenusa. Aplicando o teorema de
> Pitágoras, teremos $10^2 = h^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2$, do que se conclui que: $h = \frac{20\sqrt{2}}{3}cm^2$.

Como resultado dos cálculos para cada cone, temos a seguinte tabela:

Ângulo central α (graus)	**Área do setor circular A (cm²)**	**Raio da base r (cm)**	**Altura do cone h (cm)**
60º	$\frac{50\pi}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{100-\frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{875}{9}} = \frac{5\sqrt{35}}{3}$
90º	25π	$\frac{5}{2}$	$\sqrt{100-\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{375}{4}} = \frac{5\sqrt{15}}{2}$
120º	$\frac{100\pi}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\sqrt{100-\frac{100}{9}} = \sqrt{\frac{800}{9}} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$
270º	75π	$\frac{15}{2}$	$\sqrt{100-\frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{175}{4}} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$

A partir desses resultados o texto sugere que se busque generalizar essa situação, mas sem a preocupação com a memorização das fórmulas. Nesse momento, o objetivo é facilitar a compreensão das relações a partir de expedientes visuais, com o emprego das ideias de proporcionalidade.

A forma generalizada é apresentada da seguinte forma: (SÃO PAULO, 2009)



$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \begin{cases} r^2 = g^2 - h^2 \Rightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \\ h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \end{cases}$$

> Sendo α o ângulo central do setor circular, os alunos podem identificar a expressão:
>
> $$2\pi r = \frac{\alpha}{360°} 2\pi g \Rightarrow r = \frac{\alpha g}{360}° \Rightarrow \alpha = \frac{360°.r}{g}$$

Destacamos essa atividade porque consideramos relevante o trabalho com a proporcionalidade relacionada aos sólidos geométricos, já que essa ideia pode favorecer a visualização, nesse caso, das relações da área do setor circular com o raio da base e com a altura do cone, formados por esse setor.

Nessa atividade os autores declaram explicitamente que o objetivo visado não é a memorização da fórmula deduzida a partir da generalização, mas sim o entendimento das ideias. Ainda assim, o trabalho algébrico não é deixado de lado.

O conceito de proporcionalidade e de semelhança aparece em outra atividade que utiliza uma questão selecionada do vestibular da Universidade Estadual de São Paulo de 2007:

> (Vestibular Unesp, 2007) – Em uma região muito pobre e com escassez de água, uma família usa para tomar banho um chuveiro manual, cujo reservatório de água tem o formato de um cilindro circular reto de 30 cm de altura e base com 12 cm de raio, seguido de um tronco de cone reto, cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 12 cm e 6 cm, respectivamente, e altura 10 cm, como mostrado na figura.

Por outro lado, em uma praça de uma certa cidade há uma torneira com um gotejamento que provoca um desperdício de 46,44 litros de água por dia. Considerando a aproximação π = 3, determine quantos dias de gotejamento são necessários para que a quantidade de água desperdiçada seja igual à usada para 6 banhos, ou seja, encher completamente 6 vezes aquele chuveiro manual. Dado: 1000 cm^3 = 1 litro. (SÃO PAULO, 2009)

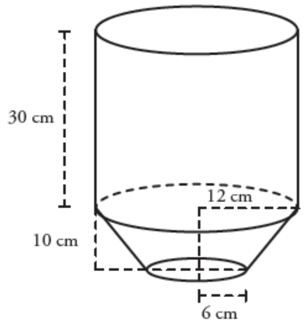


Figura 28 (SÃO PAULO, 2009)

Vejamos o desenvolvimento dessa questão que contrapõe a escassez e o desperdício de água.

Inicialmente, devemos analisar os dados da atividade. O trabalho com troncos de cone sugere que completemos o desenho, reconstruindo o cone que o gerou. Esse procedimento permite aplicar a proporcionalidade nas semelhanças de triângulos observadas. (SÃO PAULO, 2009)

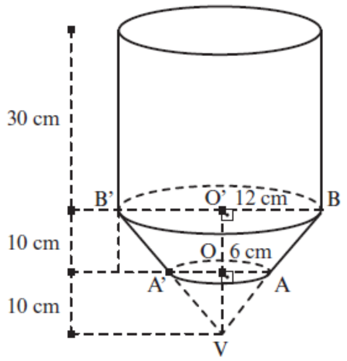


Figura 29 (SÃO PAULO, 2009)

Os triângulos VOA e VO'B são semelhantes pelo caso AA, com razão de semelhança $k = \frac{OA}{O'B} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Assim, os cones VAA' e VBB', de volumes v e V, respectivamente, são semelhantes, com razão entre os volumes $\frac{v}{V} = k^3 \Rightarrow \frac{v}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow v = \frac{1}{8}V$

Como $V = \frac{1}{3}\pi . 12^2 . 20 = 960\pi\, cm^3, temos\ v = \frac{1}{8}.960\pi = 120\pi\, cm^3$.

Assim, o volume do tronco é $960\pi - 120\pi = 840\pi\, cm^3$.

> Finalmente, o volume do chuveiro é igual ao volume do cilindro de raio da base 12 cm e altura 30 cm mais o volume do tronco, ou seja, $\pi . 12^2 . 30 + 840\pi = 5160\pi\ cm^3$.
> Adotando π = 3, obtemos $5160 . 3 = 15480\ cm^3 = 15{,}48\ litros$.
> Logo, o número de dias de gotejamento necessários para se desperdiçar o volume de 6 chuveiros é $\frac{6\ .\ 15{,}48}{46{,}44} = 2\ dias$. (SÃO PAULO, 2009)

Ao desenvolver essa atividade, os autores pressupõem que os alunos já dominam conhecimentos de semelhança de triângulos e de semelhança de sólidos. Entretanto, em nenhum momento esse segundo assunto foi abordado nos *Cadernos*. Quanto à semelhança de triângulos é possível que já tenha sido tratada em anos anteriores do ensino.

Como esses *Cadernos* têm como objetivo trazer atividades complementares ao trabalho do professor, seria necessário que eles contivessem atividades que tratam da semelhança dos sólidos geométricos. Lima et al. (2001) considera de fundamental importância o ensino dos conceitos de semelhança.

A resolução dessa atividade também envolve a ideia da decomposição. Nesse caso o chuveiro se decompõe em um cilindro de base circular e em um tronco de cone, também de base circular. Por sua vez, para obter o volume do tronco da pirâmide utiliza-se a ideia de recompor o cone, que contém esse tronco, para estabelecer a proporção entre o volume do cone e o volume do tronco desse cone. Essa capacidade de compor e decompor as figuras não é trivial, conforme afirma Duval (1999).

Sendo assim, essa atividade é bastante oportuna, pois envolve ideias consideradas pelos autores que nos serviram de referencial teórico de fundamental importância na aprendizagem da Matemática. Dentre essas ideias podemos mencionar os conceitos de semelhança, de composição e decomposição, tanto de figuras planas quanto de figuras espaciais.

Como já salientado anteriormente, percebemos que, assim como nas atividades relacionadas aos cilindros, nos *Cadernos do Aluno* e *Cadernos do Professor*, os cones são considerados como, digamos assim, pirâmides de base circular. Entretanto, para Lima (2009) e para Brolezzi e Druck (2002), os cones são caracterizados de forma mais genérica, ou seja, o cone seria como pirâmides com qualquer formato de base.

Vale observar que a passagem do volume da pirâmide para o cone, segundo o *Caderno do Professor*, deve ser orientada pelo uso do Princípio de Cavalieri. Assim como foi feita a passagem do volume do prisma para o do cilindro.

Verifiquemos agora como é tratado o volume da esfera.

2.5 VOLUME DA ESFERA

O texto do *Caderno do Professor* (SÃO PAULO, 2009) que introduz a abordagem do volume da esfera estabelece uma comparação entre um cilindro circunscrito em uma semi-esfera, e entre um cone inscrito nessa semi-esfera. Sugere-se a utilização de cartazes ou transparências com imagens dessas figuras, cada uma isoladamente e sobrepostas.

Com a exibição do cilindro e do cone, pede-se que sejam calculados os seus respectivos volumes para figuras de Altura R e raio da base também R (Figura 30).

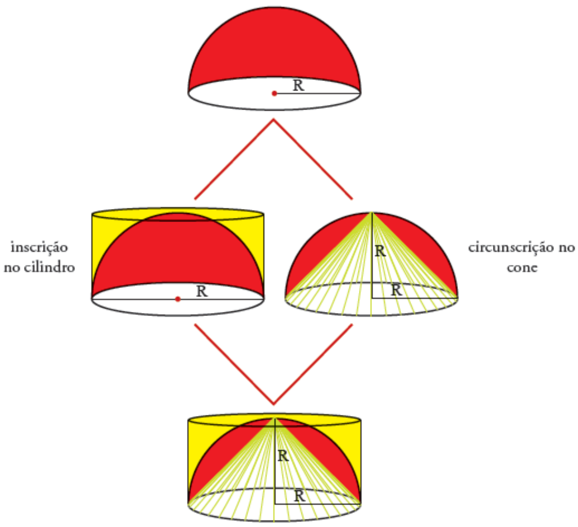


Figura 30 (SÃO PAULO, 2009)

Volume do cilindro: $V_{cilindro} = \pi R^3$.

Volume do cone: $V_{cone} = \left(\frac{1}{3}\right) \pi R^3$.

A partir da imagem e dos volumes calculados temos que o volume da semiesfera está entre o volume do cone e o volume do cilindro: $\left(\frac{1}{3}\right)\pi R^3 < V_{semiesfera} < \pi R^3$.

Com essas informações é solicitado que sejam feitas estimativas para a expressão que se aproxime do volume da esfera.

Depois disso temos um texto direcionado aos alunos:

O volume da esfera

Vamos acompanhar a dedução da expressão do volume da esfera. Inicialmente, fazemos, como mostra a 1ª Figura, uma composição das três figuras, de modo que o hemisfério fique inscrito no cilindro e o cone circular fique invertido.

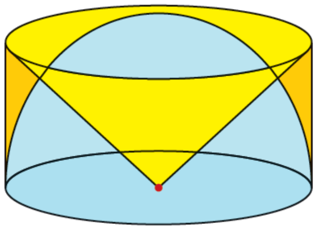


Figura 31 (SÃO PAULO, 2009)

Fazendo uma seção paralela à base do hemisfério e do cilindro, observamos que a área formada no hemisfério, que é desconhecida, pode ser calculada pela diferença das áreas das seções formadas no cilindro (3ª Figura) e no cone (2ª Figura). Supondo que a seção foi feita a uma altura d da base do hemisfério, temos:

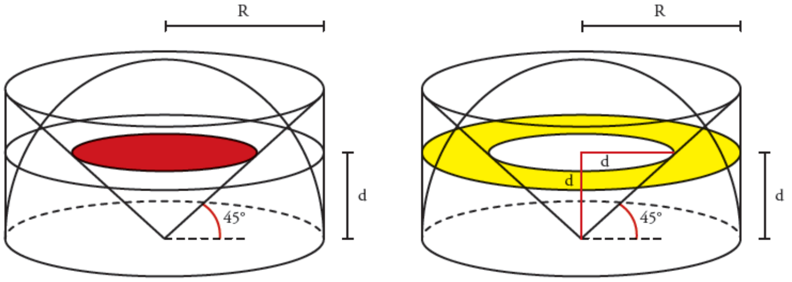


Figura 32 (SÃO PAULO, 2009)

Vamos calcular a área de cada seção determinada por um plano, conforme a figura a seguir, em que cada seção foi individualizada:

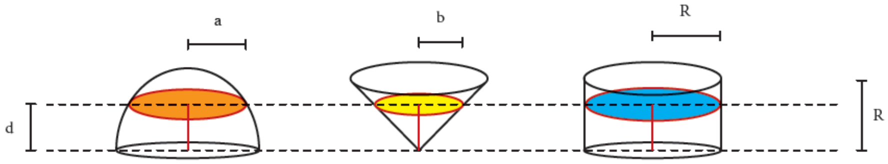


Figura 33 (SÃO PAULO, 2009)

Vamos ampliar o hemisfério para observar melhor as relações entre as medidas de **a**, **d** e **R**.

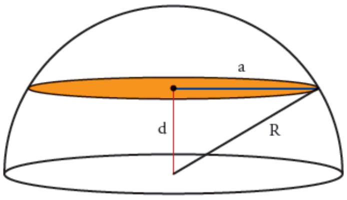


Figura 34 (SÃO PAULO, 2009)

Comparando essas grandezas, percebemos que há uma relação entre as áreas:

Seção no hemisfério	Seção no cone	Seção no cilindro
$A_1 = \pi \cdot a^2$	$A_3 = \pi \cdot b^2$	$A_2 = \pi \cdot R^2$
$R^2 = d^2 + a^2$ $a^2 = R^2 - d^2$ $A_1 = \pi \cdot (R^2 - d^2)$ $A_1 = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot d^2$	$b = d$ triângulo retângulo isósceles $A_3 = \pi \cdot d^2$	$A_2 = \pi \cdot R^2$

$$A1 = A2 - A3$$
$$A_{seção\ no\ hemisfério} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot d^2$$

De maneira geral, como a distância d é arbitrária, podemos concluir que toda área da seção do hemisfério é igual à diferença entre as áreas das seções do cilindro e do cone.
Desse modo, podemos considerar que o hemisfério é formado pela sobreposição de círculos com raios cada vez menores, enquanto o sólido, resultante da diferença cilindro-cone, é formado pela sobreposição de coroas circulares com “furos” cada vez maiores, isto é, com coroas cada vez mais finas. Pela expressão que encontramos, podemos deduzir que a área de cada círculo no primeiro sólido é igual à área de cada coroa circular do segundo.
Aplicando o Princípio de Cavalieri, podemos concluir que, completando a altura R, o volume dos dois sólidos será equivalente. Logo:

$$V_{hemisfério} = V_{cilindro} - V_{cone}$$
$$V_{hemisfério} = \pi \cdot R^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot R^3$$
$$V_{hemisfério} = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$$

Dessa forma, temos:

$$V_{esfera} = 2 \cdot V_{hemisfério}$$
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Retomando os três sólidos inicialmente estudados, podemos fazer uma comparação entre seus volumes e observar a relação que existe entre eles:

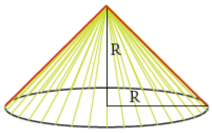
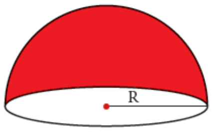
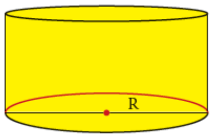
Sólido	Volume
	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3$
	$V = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$
	$V = \frac{3}{3}\pi \cdot R^3 = \pi \cdot R^3$

Figura 35 (SÃO PAULO, 2009)

Vemos que o volume da esfera é apresentado também por meio do uso do Princípio de Cavalieri, assim como nos textos apresentados no capítulo 1. Mas aqui temos uma abordagem um pouco diferente, pois são relacionados os volumes da semiesfera com os do cone e do cilindro, enquanto que Lima (2009) e Brolezzi e Druck (2002) estabelecem a relação do volume da esfera com o do sólido chamado de anticlepsidra. É claro que, se seccionarmos a anticlepsidra na metade da sua altura, teremos comparações como as que são apresentadas no *Caderno do Aluno* e no *Caderno do Professor*.

Nesses cadernos, ao tratar do volume da esfera, não se recorreu a informações de cunho histórico. Mas, nas indicações de material complementar ao caderno, temos a indicação de um artigo publicado na *Revista do Professor de Matemática* que apresenta o método da alavanca (SILVA, 2005), aplicado por Arquimedes para determinar o volume da esfera.

Verificamos nas nossas análises que o *Caderno do Professor* e o *Caderno do Aluno*, enviados aos professores do estado de São Paulo, realmente apresentam uma forma de abordagem para ensino de volume que consideramos dinâmica. Com efeito, as atividades neles propostas não têm como objetivo a pura e simples memorização das fórmulas para o cálculo de volumes, pelo contrário, elas são primordialmente direcionadas à construção, à visualização, à manipulação e ao raciocínio que pretendem proporcionar a compreensão dos conceitos matemáticos subjacentes a essas atividades.

3 SUGESTÕES PARA O TRABALHO COM VOLUMES

> *"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo."*
>
> *Albert Einstein*

As orientações veiculadas nos *Cadernos* incentivam que o professor as utilize como um complemento do seu programa de ensino. Sendo assim, julgamos conveniente apresentar outras sugestões que não são contrárias às dos cadernos, mas que se somam a elas.

Considerando importante explorar a diversidade de recursos de ensino, selecionamos as atividades sugeridas dentre aquelas que tivemos oportunidade de conhecer ao investigar visando obter subsídios tanto para o aprimoramento da nossa atividade como docente quanto também para a presente pesquisa.

3.1 ATIVIDADE DE SENSIBILIZAÇÃO

Ao iniciar o ensino de um tema podemos apresentar um texto introdutório onde exploramos, por exemplo, o contexto histórico. A seguir apresentamos apenas um trecho de texto extraído de uma revista:

> Da Pré-História aos dias de hoje, as medidas de espaço, volume e massa foram de tal forma incorporadas às nossas vidas que é impossível imaginar a civilização sem elas. Conheça os bastidores dessa história de erros, acertos e acirradas disputas de poder: Elas fazem parte da vida cotidiana. Estão na reforma da casa, nas compras do supermercado, na ida ao posto de gasolina. Têm presença garantida nos laboratórios de pesquisa e nas indústrias, e são usadas nas transações comerciais entre os países. Você já não consegue mais conceber o mundo sem considerá-las; basta pensar nos metros, quilos e litros que permeiam as suas atividades mais corriqueiras. Essas personagens tão prestigiosas são as medidas, grandezas de espaço, massa e volume que acompanham a evolução intelectual e tecnológica da humanidade desde a Antiguidade... (VOMERO, 2003)

Esse tipo de introdução ao trabalho escolar poderá servir como uma motivação inicial no sentido de despertar o interesse. E fundamentalmente poderá trazer reflexões e questões acerca dos assuntos matemáticos.

A partir dessa leitura introdutória, poderíamos seguir a linha de trabalho presente nas atividades analisadas no capítulo 2, trabalhando com atividades que chamaremos de exploratórias. Os próximos parágrafos apresentam uma atividade em que poderão ser investigadas experimentalmente as relações de volume entre a esfera o cone e o cilindro.

3.2 ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

Para uma atividade exploratória consideramos apropriada uma proposta feita por Martins e Bracarense (2010), que será reproduzida a seguir, parcialmente e com algumas adaptações.

Material necessário:

• Uma semiesfera plástica oca. (uma bola de plástico cortada ao meio, por exemplo)

• Um cone oco com raio da base e altura iguais ao raio da semiesfera. (pode ser construído em cartolina, por exemplo)

• Material para encher os recipientes, tais como água, areia ou grãos.

Procedimento de execução:

Encher o cone com o material escolhido como, por exemplo, a água. Passar essa água para a semiesfera até que a semiesfera fique completamente cheia, mas sem transbordar. A partir dessa atividade algumas questões podem ser propostas, tais como:

a) Quantos cones de água foram necessários para encher completamente a semiesfera?
b) Quantos cones de água serão necessários para encher completamente uma esfera?
c) Qual a relação de volume entre o cone e a esfera inteira?

Durante o desenvolvimento dessa atividade ficará evidente a necessidade de transferir o conteúdo de dois cones para encher a semiesfera. Sendo assim, para encher uma esfera seriam necessários quatro cones de água. De modo que o volume da esfera equivale a quatro vezes o volume do cone ($V_{esfera} = 4V_{cone}$).

Seguindo essa mesma linha de atividades outras comparações poderiam ser feitas como, por exemplo, entre o cone e um cilindro de medidas da base e da altura equivalentes aos do cone. Essas comparações auxiliariam a conclusão de que o volume desse cilindro é igual a três vezes o volume do cone.

Além dessa atividade poderia ser explorado o método do equilíbrio desenvolvido por Arquimedes. Em sua obra *O Método* ele apresenta várias situações em que é usado o raciocínio físico para prever resultados matemáticos. Pinto (2005) explora as alavancas para equilibrar um cilindro e uma esfera, de mesmo material. A esfera de raio r e o cilindro de altura *r* e círculo da base de raio *r* (Figura 36).

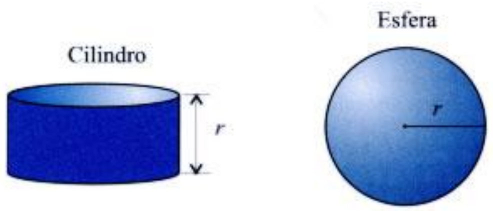


Figura 36 (PINTO, 2005)

Todas as alavancas seguem o mesmo princípio: com uma força *P* aplicada no braço maior *b* é possível equilibrar uma força *R*, que esteja na ponta do braço menor *a*, já que o produto *P·b* é igual ao produto *R·a* (veja Figura 37). (BARCO, 1989)

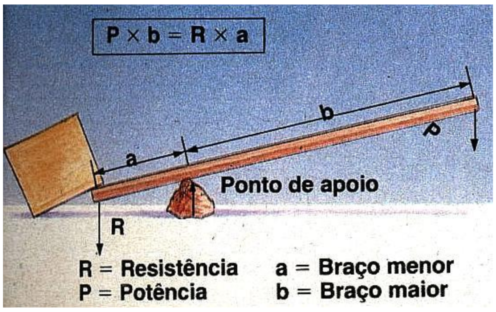


Figura 37 (BARCO, 1989)

> Pois bem, para usar o princípio das alavancas, procuramos o ponto de apoio, em uma barra de madeira que sustentava os dois corpos, esfera e cilindro, de modo a equilibrar os dois corpos. Notamos que o ponto não era equidistante do cilindro e da esfera. Chamamos de *Lc*

> a distância do centro da base do cilindro a esse ponto e de *Le* a distância do centro da esfera ao ponto.

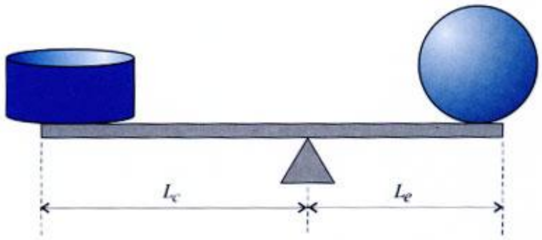


Figura 38 (BARCO, 1989)

> Assim, denotando por *mc=Vc* a massa e o volume do cilindro e por *me=Ve* a massa e o volume da esfera, respectivamente, e usando o princípio das alavancas o produto da massa do cilindro pela sua distância ao ponto de apoio é igual ao produto da massa da esfera pela sua distância ao mesmo ponto, obtivemos *mc.Lc=me.Le* ou *VcLc=VeLe*. Como *Vc=p/r3* chegamos a *Ve=pr3Lc/Le*. Medimos então a razão *Lc/Le*, obtendo 4/3, aproximadamente, pois toda medida tem sua margem de erro. Com efeito, o fato de que o valor dessa constante é exatamente 4/3 exige uma prova teórica. (BARCO, 1989)

Como podemos observar pelas atividades sugeridas em Pinto (2005) e em Barco (1989), existem maneiras criativas para se trabalhar em sala de aula as relações de volume entre diferentes formas geométricas. Essa diversificação de formas de trabalho poderia propiciar também a diversidade de tipos de representação e contribuir para a aprendizagem conceitual. Podem contribuir para isso também o uso de recursos multimídia, como pretendemos mostrar nos próximos parágrafos.

3.3 O USO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

O uso de recursos computacionais no ensino de matemática tem sido de interesse de pesquisadores dessa área de educação. Por essa razão, apresentamos aqui algumas informações sobre esse assunto que pudemos captar ao longo do nosso trabalho de levantamento bibliográfico.

Miranda (2006) pesquisou sobre o ensino e a aprendizagem das secções do cubo aplicando uma série de três experimentos de ensino, quais sejam: o manuseio de material concreto, a utilização livre do aplicativo *Cabri-Géomètre II*, e um micro mundo criado a partir das ferramentas de macro construção do software. As análises do autor indicam que o maior número de secções foi identificado no experimento envolvendo o micro mundo de Geometria Descritiva, com a maioria de alunos usando as propriedades evidentes nas representações na tela do computador para construir o conjunto de todas as secções possíveis no cubo.

Aqui temos um indício de que o uso de *softwares* de geometria pode servir como um recurso de ensino que proporciona resultados positivos na aprendizagem dos alunos, ao menos, no que se refere às secções do cubo. Note-se que seccionar o cubo é uma forma de decompor figuras espaciais que, como já vimos, constitui um aspecto importante na aprendizagem.

Pesquisando sobre geometria Euclidiana espacial, em um curso de formação de professores a distância, Santos (2008) investigou como se dá a produção matemática desses alunos-professores. O curso, de extensão universitária, relaciona-se a "Tendências em Educação Matemática" e ao desenvolvimento de atividades de geometria euclidiana espacial.

Nesse curso, para as construções geométricas utilizou-se o aplicativo de geometria *Wingeom*, além de outros recursos, tais como materiais manipulativos e outras estratégias de resolução.

O autor aponta que, as mídias (lápis e papel, materiais manipulativos, *Wingeom*, Internet e suas diferentes interfaces), em um ambiente virtual de aprendizagem, determinam a forma com que os participantes discutem as conjecturas durante as construções geométricas e transformam a produção matemática.

Borba e Villareal (2005) defendem que o conhecimento deve ser sempre visto como sendo produzido por coletivos de seres humanos com mídias. Segundo os autores, seres humanos e meios de comunicação social são inseparáveis. A tecnologia está impregnada pela humanidade, e os seres humanos são rodeados pela tecnologia. Constantemente são criadas novas ferramentas tecnológicas. Essa tecnologia produzida não apenas nos influencia, mas também, se torna um agente na construção de novos conhecimentos. Como foi constatado por Miranda (2006), a experiência com aplicativos computacionais possibilita formar conjecturas, que depois podem ser provadas como verdadeiras.

Verificamos que as atividades propostas no *Caderno do Professor* (SÃO PAULO, 2009) exploram em abundância o uso de materiais manipulativos. Se explorarmos, também, o uso de *softwares*, os alunos terão a possibilidade de estabelecer novas conjecturas possibilitadas por esses recursos, como apontam Borba e Villareal (2005).

Borba e Penteado (2001) defendem que privilegiar diferentes representações para um mesmo objeto matemático, tais como expressão algébrica, gráfico e tabela, bem como trazer a visualização para o centro da atividade matemática e a experimentação e o uso das novas tecnologias constituiriam um caminho a ser seguido pela educação matemática. Nesse mesmo sentido, Oliveira (2009) defende o uso de estratégias de ensino acompanhadas do uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).

Pesquisas recentes foram dedicadas ao uso de aplicativos de geometria no ensino de conceitos matemáticos relacionados à visualização e ao volume de figuras tridimensionais.

Salazar (2009) observou que estudantes do segundo ano do Ensino Médio apropriam-se das transformações geométricas no espaço quando interagem com o ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*. Ele examinou também o raciocínio que mobilizam quando desenvolvem atividades que abrangem esse conteúdo e quais conteúdos mobilizam no desenvolvimento de uma sequência de atividades.

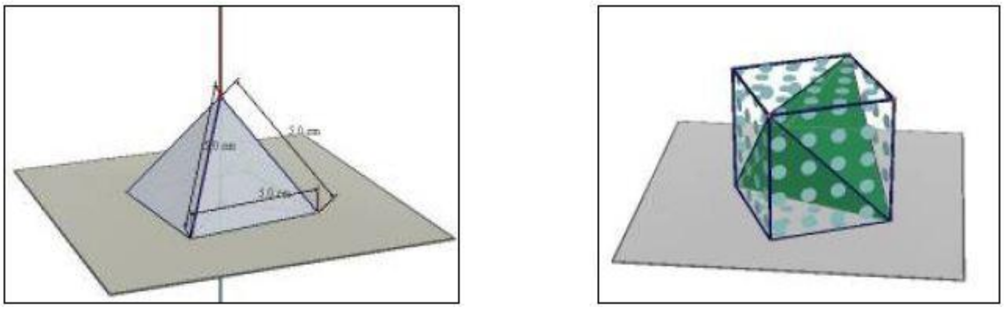


Figura 39 Exemplos de construções com *Cabri 3D* (SALAZAR, 2009)

A Figura 39 exemplifica algumas construções que podem ser feitas com o *Cabri 3D*. O uso dessas diferentes representações fica enriquecido com o uso de TICs o que pode favorecer a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Ferraz (2010) elaborou duas sequências de atividades. Uma delas para introduzir o uso do aplicativo *Cabri 3D* e outra para a aprendizagem de algumas propriedades de prismas e de pirâmides. A título de ilustração, a primeira atividade da primeira sequência de ensino proposta por Ferraz (2010) consiste em um roteiro para a criação de pontos, de retas e de planos. A primeira das ilustrações do roteiro aparece na Figura 40. A partir dessa figura inicial são apresentadas as funcionalidades básicas do aplicativo e outras figuras ilustrando passo a passo o acionamento de cada funcionalidade.

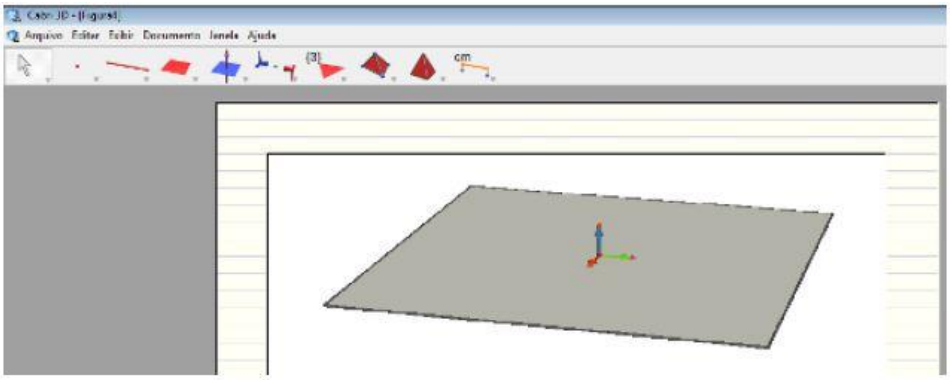


Figura 40 Tela inicial do aplicativo *Cabri 3D* (FERRAZ, 2010)

Outro recurso computacional que poderíamos utilizar, por exemplo, seria o aplicativo gratuito de geometria dinâmica espacial denominado "*Calques 3D"*. A proposta do aplicativo é permitir ao aluno ou ao professor testar suas conjecturas através de exemplos e contra exemplos que ele pode gerar com o aplicativo. Uma vez feita a construção, pontos, retas, planos, cilindros e esferas podem ser deslocados na tela mantendo-se as relações geométricas previamente estabelecidas. Isso permite que o estudante se concentre na associação existente entre os objetos. Uma mesma cena pode ser visualizada de ângulos diferentes, possibilitando uma visualização tridimensional.

Como vimos, existem diversas ferramentas computacionais para o trabalho com a geometria espacial, dentre as quais temos o *Wingeom,* o *Calques 3D*¸ o *Cabri 3D* e o *Sketchup*. Assim como existem as ferramentas, também existem pesquisas das quais podem ser extraídas atividades para o trabalho em sala de aula. Como exemplo dessas pesquisas, temos: Ferraz (2010), Salazar (2009), Miranda (2006) e Machado (2010). Outras referências podem ser encontradas no trabalho de Rosa (2009), que relaciona dissertações referentes ao uso de recursos computacionais para o ensino de geometria no período de 1994 até 2007.

3.4 O USO DE VÍDEO

No que concerne à utilização de vídeo para o ensino de Matemática, Carneiro (2009) investigou o processo de sistematização das relações matemáticas no cilindro com uso de um vídeo explorando o cilindro e as relações matemáticas nele existentes. Dessa forma, se propôs a apresentar a professores de matemática um instrumento que possa auxiliá-los em sua prática docente e concluiu que o uso desse instrumento pode facilitar a aprendizagem do aluno e melhorar a visualização dos conteúdos geométricos.

Sabendo-se dos benefícios que o uso desse recurso pode trazer, temos duas sugestões de vídeo, relacionados ao conceito de semelhança, já que, esse conceito foi menos explorado no material analisado no capítulo 2.

O primeiro vídeo intitula-se “Semelhança”. Ele pertence à série “Matemática na vida – razão e proporção”, criada pelo Ministério da Educação e cultura (MEC, 2011). Neste vídeo são apresentadas noções intuitivas de semelhança, por exemplo, a semelhança entre um bebê e um adulto ou entre um bezerro e um boi (Figura 41). No sentido matemático não ocorre semelhança nesses casos, pois existem algumas diferenças, por exemplo, um bezerro não tem ainda os chifres.


Figura 41

Por outro lado, entre um prédio e sua maquete ou uma foto e sua ampliação existe a relação de semelhança, Figuras 43 e 44.

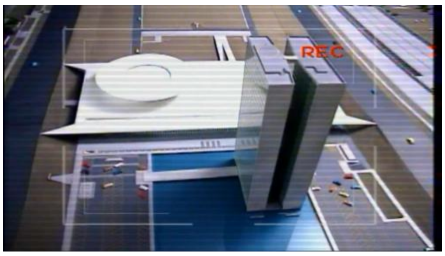


Figura 42


Figura 43

Assim, a proporcionalidade intrínseca à noção matemática de semelhança é ressaltada no vídeo mencionando-se, por exemplo, que, se tomarmos a medida da largura da construção original e da maquete e a dividirmos, teremos como resultado um valor que chamamos de razão de semelhança. No vídeo se ressalta ainda que, para figuras semelhantes esse resultado será sempre o mesmo se, em vez da largura, tomarmos as medidas da altura ou de qualquer outra das medidas respectivas da construção e de sua maquete.

O segundo vídeo chama-se "*Um certo fator de escala*". Ele integra a série "*Matemática na Escola*", e foi produzido pela Universidade de Campinas (UNICAMP, 2010). O vídeo apresenta o conceito de semelhança de maneira contextualizada na construção de uma maquete (Figura 45) de uma das obras do arquiteto Oscar Niemeyer (Figura 44). Com cerca de dez minutos de duração, o vídeo traz várias representações gráficas, das quais algumas se relacionam à semelhança de figuras planas e de figuras tridimensionais.

Figura 44


Figura 45

O vídeo ainda traz a informação de que a maquete é 100 vezes menor do que a construção original, que tem 76 metros de diâmetro e 18 metros de altura. Ele facilita, assim, que se conclua que ela possui 76 centímetros de diâmetro e 18 centímetros de altura. A relação entre as áreas da maquete e da construção original é de 100^2 e entre seus volumes é de 100^3.

Ao exibir o vídeo aos alunos caberia uma discussão quanto à veracidade da semelhança entre a construção e a maquete. Pois, podemos perceber pelas imagens (Figuras 44 e 45) que elas não têm a mesma forma. Entretanto esse fato não tira o mérito desse material.

Além do vídeo, esse material também traz um texto com orientações ao professor, fazendo inclusive referência a livros da *Coleção do Professor de Matemática*. Ele ainda traz sugestões de atividades a serem aplicadas nas aulas de matemática que exploram os conceitos apresentados no vídeo.

Materiais como esses estão disponíveis em sites de compartilhamento de vídeos, tais como o youtube.com. É possível encontrá-los realizando buscas com palavras chave do tipo “volume do paralelepípedo” animações elucidativas, da mesma forma utilizando outras palavras chaves nas buscas encontramos animações sobre o princípio de Cavalieri e outros conteúdos matemáticos.

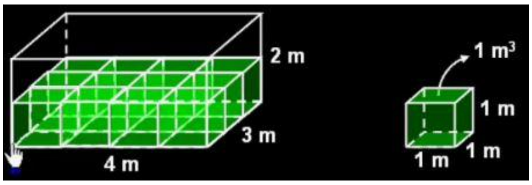


Figura 46 Imagem extraída da animação (GUIMARÃES, 2010)

A Figura 46 foi capturada no vídeo que aparece em uma das primeiras posições no site de busca de vídeos com a expressão “volume do paralelepípedo”. Esse vídeo, na verdade consiste em uma animação com narração explicando como a unidade de volume de 1 metro cúbico é usada para compor um paralelepípedo de 4m x 3m x 2m equivalendo a $24m^3$ (GUIMARÃES, 2010).

É importante ressaltar que o uso dos recursos tecnológicos não garante a construção do conhecimento. Conforme salienta Carneiro (2009), é necessário que o professor planeje bem as atividades a serem desenvolvidas em sala de aula. Não basta apenas criar condições para o professor simplesmente dominar os recursos tecnológicos. É preciso auxiliá-lo a desenvolver conhecimento sobre o próprio conteúdo e sobre como os recursos podem ser integrados no desenvolvimento desse conteúdo. Essas ideias, corroboram as de Oliveira (2009), que sustenta que é necessário usar os recursos tecnológicos integrados em uma estratégia de ensino.

No que concerne à Geometria Espacial, foi constatado, pelos resultados obtidos por Carneiro (2009) que os alunos apresentam dificuldades de percepção espacial e de visualização, que, como já discutido anteriormente, são estimados aqui elementos fundamentais para a construção de conceito e do conhecimento geométrico.

Assim sendo, é possível compor uma estratégia apoiada no material elaborado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (2009) e, seguindo suas sugestões, apresentar também, quando possível, vídeos compondo uma estratégia com variedade de recursos que se complementam também pela variedade de seus conteúdos e modos de abordagem. Esses vídeos sugeridos tratam do conceito de semelhança, considerado de importância fundamental por Lima et. al. (2001) e que foi pouco explorado no material analisado no capítulo 2.

Acreditamos que a apresentação da composição e decomposição das figuras geométricas de maneira dinâmica, na forma de vídeo, pode ajudar também na visualização mental dinâmica, ou seja, na compreensão integrativa dos objetos matemáticos.

3.5 PRODUÇÃO INVESTIGATIVA E CRIATIVA

Propõe-se que o trabalho da matemática em sala de aula pode ser realizado por meio de investigações, assemelhando-se ao trabalho do matemático. *“Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”.* (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009)

Esses autores sustentam que a matemática pode ser vista tanto como uma ciência rigorosa com certezas estabelecidas, quanto como uma ciência em construção, experimental e indutiva. Embora ela geralmente seja trabalhada na escola como algo pronto e acabado, essa abordagem não é a única possível, nem é necessária. Podemos abordar a matemática de maneira investigativa, na sua forma experimental.

Desse ponto de vista, poderíamos apresentar a matemática como uma floresta infinita que, não obstante encerre trilhas bem definidas, correspondentes à parte já construída da matemática, ainda conserva muitas extensões virgens a serem exploradas. Poderíamos acrescentar, além disso, que, por mais extensas que sejam as trilhas já construídas, sempre é possível encontrar um novo caminho que conduza a um lugar já conhecido.

Muitas vezes o professor em sala de aula se depara com a pergunta: para que serve isso que estamos estudando?

> Quando o aluno pergunta “para que serve”, em geral, é sinal de que é preciso reestruturar o curso para que o ensino tenha significado. E isso pode ser feito com um bom estudo de História da Matemática. A história não mostra por que cada coisa foi criada. Muitas vezes, o que é surpreendente até mesmo para o professor, a matemática se desenvolveu sem muito sentido prático. É uma grande falsidade pensar que a Matemática nasceu das necessidades práticas do dia a dia. A matemática é abstrata, esse é seu grande valor. Não serve para nada. E ao mesmo tempo serve para tudo. Toda a tecnologia atual está embasada em muita matemática. Mas não que a matemática sirva para isso ou aquilo. (BROLEZZI, 2003)

Brolezzi (2003) acredita que o trabalho investigativo, na forma de projetos, abre espaço para o estudo e a atividade criativa, tanto por parte do professor quanto por parte do aluno. A diversidade de indivíduos, com suas características e realidades distintas presentes nas escolas, é um campo fértil para o surgimento de desafios que podem gerar investigações matemáticas. Uma atividade escolar sensível a esse contexto, e que levasse em consideração o interesse e a curiosidade dos alunos, não desembocaria em questões como esta: “para que serve?”.

> Trata-se de desenvolver o conteúdo na perspectiva dos alunos que querem o tempo todo saber “para que servem” as coisas que estão aprendendo. Os projetos, aqui entendidos como uma organização de uma busca ou investigação de uma coisa que se quer conhecer melhor, seriam criados em conjunto com os alunos, em atenção com o que eles manifestam que querem saber. (BROLEZZI, 2003)

Assim sendo, o autor propõe que poderíamos trabalhar com micro-projetos de pesquisa. Tal trabalho envolveria as fases comumente presentes nos projetos de pesquisa, tais como a identificação de um problema, o levantamento de hipóteses sobre a solução do problema, o estabelecimento dos objetivos que se relacionam à confirmação das hipóteses, a metodologia para alcançar os objetivos, a bibliografia e as conclusões obtidas com o trabalho.

> ...estamos propondo que o professor de matemática, junto aos seus alunos, proponha-se fazer pesquisas sobre temas de matemática das suas aulas, que partindo da pergunta mais comum “Para que serve isso?”, ou outras que aparecerem, desenvolva um projetinho visando a obtenção da resposta a essa pergunta. Para isso, pode fazer uso da biblioteca, da Internet e outras fontes informacionais, desde que tomados alguns cuidados de saber que nem tudo que está lá pode ser confiável. O final desse trabalho pode ser disponibilizado também na página da Internet da escola, se houver, ou na página do professor. Ou pode resultar em um produto, como um cd-rom elaborado pela classe. A avaliação do trabalho deve levar em conta o nível de interatividade alcançado pelos alunos, se eles se conectaram, se perambularam e redefiniram seus conceitos iniciais. (BROLEZZI, 2003)

Consideramos que assim podemos valorizar os trabalhos dos alunos, e também dos professores, colocando-os como protagonistas e construtores de conhecimentos e trabalhos matemáticos.

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, oralmente, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. Essas fases podem ser concretizadas de muitas maneiras. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009)

Como lemos na citação, a atividade de investigação é composta por três fases que podem se concretizar de diferentes formas. Pode-se recorrer, por exemplo, ao uso dos recursos da tecnologia da informação, como a internet, as *wikis* e até mesmo as comunidades sociais, tais como grupos nos sites do *yahoo*, do *google*, *orkut* e outras ferramentas de trabalho colaborativo. De modo que os trabalhos realizados poderiam ser colocados numa dessas ferramentas e gerar portfólios de trabalhos.

Tais recursos já são utilizados amplamente pelos alunos e também por professores principalmente na busca de respostas a exercícios e para realização de trabalhos escolares. A ideia aqui proposta seria então institucionalizar essa prática e construir um trabalho mais sistemático e voltado para a investigação e a realização de projetos. Seria possível, inclusive, ao invés de meramente consumir esses recursos, colaborar, por exemplo, editando conteúdo das enciclopédias livres de conteúdos matemáticos.

> A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009)

Observamos que a forma investigativa de trabalho escolar se relaciona diretamente com as concepções apresentadas no capítulo 1 nos aspectos referentes às representações dos conceitos, à contextualização histórica e à visualização.

> Ao aproximar o professor das novas mídias, abrem-se novas possibilidades. A visão dinâmica do conhecimento matemático, uma das consequências importantes do uso da História, é típica do uso das novas mídias. [...] É neste sentido que no atual momento da Educação Matemática devemos testar essas metáforas teóricas geradas por diferentes pesquisas, para que consigamos desenvolver novas práticas pedagógicas que permitam que mais estudantes tenham acesso a estudar matemática (...)(BROLEZZI, 2003)

No trecho citado podemos observar como o autor relaciona a visualização dinâmica dos conceitos matemáticos com o uso das tecnologias da educação e da História da Matemática bem como a importância de experimentar e desenvolver novas práticas pedagógicas.

> As redes informacionais. Para além do livro didático, temos a biblioteca física, e também as diversas mídias e a grande biblioteca que é a Internet. Uma das diferenças importantes é que as bibliotecas, e em menor grau os jornais e revistas, trazem informações de alguma forma selecionadas. Já a Internet não tem controle algum. Qualquer pessoa pode disponibilizar conteúdo na rede. Isso requer a habilidade do pensamento criativo que deve detectar pistas falsas, selecionar os caminhos. Novas habilidades, que os alunos devem desenvolver junto aos professores. Se antes bastava abrir uma enciclopédia para obter dados sobre um tópico considerado, agora é preciso ver se o que lemos e vemos tem realmente valor. Nesse sentido, o uso de projetos de pesquisa na educação adquire mais essa função, a de preparar o aluno para o exercício da seleção das informações, uma habilidade necessária para o cidadão de hoje. (BROLEZZI, 2003)

É preciso estar atento também para as problemáticas que envolvem essas tecnologias. Como sugere o autor, nem sempre o material do acervo imensurável que se encontra na internet contém aquilo que se procura da forma como se espera. Porém, até mesmo os livros podem cair nessa problemática, como evidenciado nas análises de Lima et al. (2001). Todavia, o trabalho escolar por meio de pequenos projetos pode exercitar a habilidade de selecionar informações.

Podemos notar que os trabalhos de investigação e de projetos são bastante diferentes da resolução de exercícios ou de problemas matemáticos. Normalmente esses últimos têm uma única resposta considerada correta. Enquanto que os primeiros assemelham-se ao desbravamento de uma floresta, podem-se usar trilhas já existentes ou criar novas. Queremos dizer com isso que nas investigações poderão surgir resultados não previstos pelo professor, que podem ser enriquecedores, e exigirão dele uma postura diferente daquela a que está acostumado.

> ...além de saber matemática, o professor deve conhecer história da matemática, deve saber usar computadores no ensino, usar e criar materiais didáticos diversos, conhecer aplicações da matemática, problemas interessantes e não-rotineiros, jogos, curiosidades. (BROLEZZI, 2003)

Observamos assim, que o professor de matemática da atualidade encontra-se numa posição desafiadora, que exige dedicação ao estudo dessa disciplina bem como de métodos adequados para seu ensino, isto é, métodos que, como já salientado, conjugassem os conceitos abordados de visualização e aplicação com a curiosidade dos estudantes e o contexto eclético da escola.

No caso da geometria, um exemplo de atividades que se ajustariam a essas preocupações metodológicas seria a proposta de construção de cubos de diferentes dimensões a partir de cubos unitários. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009)

Imagine agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, se decidiu pintá-lo exteriormente de vermelho. Quantos cubinhos ficam com uma única face pintada? E com duas? E com três?...

E com nenhuma?

Investigue o que aconteceria se pintássemos o cubo de aresta 4. E se pintássemos um de aresta 5? E de aresta 10?

> A possibilidade de usar cubinhos apoia o trabalho inicial de recolha de dados. Mas, também, apoia a justificação dos valores encontrados mesmo para os casos em que se torna pouco viável a efetiva construção do cubo (como nos casos de aresta 5 e 10). Por exemplo, para perceber que o número de cubinhos com zero faces pintadas corresponde ao número de cubinhos necessários para construir um cubo cuja aresta tem menos dois cubinhos que o cubo inicial, é importante olhar para os modelos construídos e imaginar o que fica no interior. Daqui pode facilmente justificar-se que a expressão $(n-2)^3$ corresponde ao número de cubinhos com zero faces pintadas. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009, p. 88)

A atividade com o material concreto funciona para a obtenção de dados de forma experimental a partir da qual o aprendiz poderá elaborar generalizações.

Podemos também realizar projetos e investigações que incluem a utilização de aplicativos de geometria dinâmica. Machado (2010) recomenda a utilização de um aplicativo chamado *Sketchup*. O *software* apresenta uma interface amigável que viabiliza que os alunos rapidamente criem trabalhos tridimensionais. O autor explorou o uso desse recurso no estudo de prismas e cilindros relacionando-as àquelas encontradas na observação de obras e edifícios da construção civil.

Em certa oportunidade de uso livre do laboratório, um de nossos alunos a que apresentamos o aplicativo mencionado criou a imagem da Figura 47.

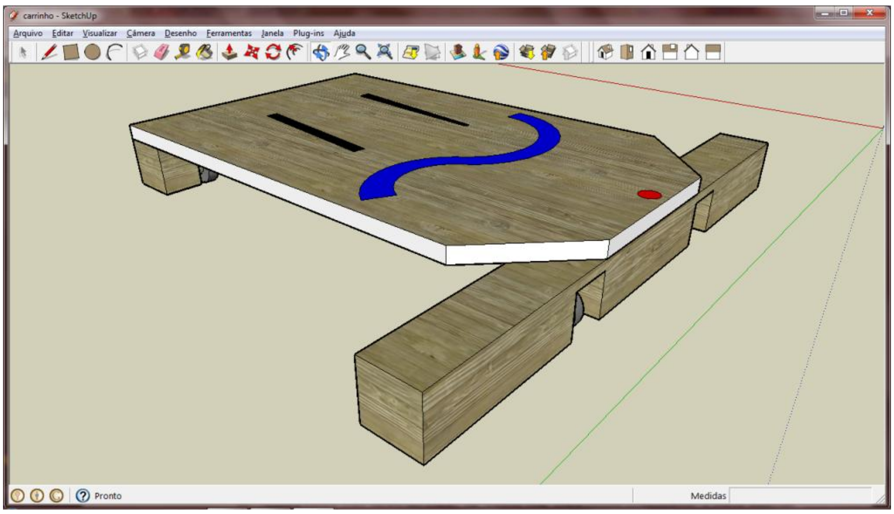


Figura 47 Carrinho de rolimã

Como exemplo de projeto de pesquisa, poderíamos propor o cálculo da quantidade de material necessário para a construção desse modelo de brinquedo (Figura 47), ou mesmo para a construção de 50 brinquedos. Outras questões poderiam surgir como, o tamanho da tábua vendida pela madeireira e as dimensões da parte superior do carrinho de rolimã, para o melhor aproveitamento de material.

Por fim, nosso intuito ao propor tais atividades é fomentar a diversidade em diferentes aspectos, seja dos tipos de registros, seja dos tipos de recursos pedagógicos e até mesmo das estratégias, guarnecendo professores e alunos com o maior conjunto possível de recursos para otimizar as condições de compreensão da estereometria. Esperamos, ainda, que os benefícios que esses recursos trazem para o aprendizado sirvam de estímulo e paradigma para que essa maneira de pensar possa se estender a outros temas no ensino da matemática.

Pretendemos também trazer à tona a importância da reflexão, da pergunta pelos porquês, que deve sempre estar presente quando se fala em educação. A busca de perguntas e respostas com a investigação e com a experimentação, bem como com o trabalho por meio de projetos, certamente pode ser de grande ajuda para a aprendizagem. E pode, além disso, gerar produtos ricos em termos materiais e em termos do desenvolvimento cognitivo tanto do professor quanto do aluno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

"Na vida o que mais se aprende é a fazer mais maiores perguntas."

Grande Sertão: Veredas
João Guimarães Rosa

Buscamos no presente trabalho verificar se os materiais disponíveis para os professores de ensino médio direcionados ao ensino da estereometria, isto é, da disciplina que se ocupa do volume das formas tridimensionais, possibilitam uma abordagem conceitual.

Consideramos que uma abordagem de ensino conceitual, seguindo os pressupostos teóricos apresentados do Capítulo 1, deve envolver atividades de construção e raciocínio, composição e decomposição das figuras geométricas, a conceituação das ideias matemáticas, a manipulação dos objetos e dos registros, a aplicação e a contextualização epistemológica dos conceitos, a utilização de recursos variados, como material concreto e recursos multimídia (aplicativos computacionais, vídeos, etc.). Certamente não esgotamos os aspectos necessários para sanar as dificuldades do ensino da matemática. Contudo, acreditamos que um direcionamento, fundado nas pesquisas dos autores em que nos apoiamos, pode trazer resultados positivos à aprendizagem dos alunos.

Analisamos o *Caderno do Professor e do Aluno* enviados às escolas estaduais de São Paulo pela Secretaria de Estado da Educação em 2008 e 2009. Verificamos que esses materiais trazem atividades que contemplam grande parte dos aspectos elencados no parágrafo anterior. Em face dessa constatação, concluímos que o referido *Caderno* possibilita uma abordagem conceitual do volume dos sólidos geométricos.

Foi verificado, por outro lado, que o *Caderno do Professor* para o segundo ano do ensino médio, quarto bimestre, não contém atividades que utilizem aplicativos computacionais ou vídeos. Essa falha frustra as expectativas em relação ao referido *Caderno*, visto que esse mesmo material promete que traria esse tipo de atividade.

Além disso, o *Caderno do Professor*, como uma proposta complementar, não contempla o conceito de semelhança, apontado como de fundamental importância por pesquisadores como Lima (2009).

Sendo assim, trouxemos sugestões de atividades para serem somadas àquelas constantes em São Paulo (2009), de modo a complementá-las em aspectos relacionados ao conceito de semelhança de figuras espaciais, ao uso de aplicativos computacionais e vídeo. Isso foi feito com vistas a promover um modelo de ensino que contemple múltiplas representações de um mesmo conceito matemático, para que não se confunda esse objeto com suas representações. E também a fim de possibilitar aos aprendizes a visualização dinâmica e a compreensão integrativa ou *noésis*, desses conceitos.

Consideramos que as relações tecidas entre os diferentes textos, discutidos principalmente no capítulo 1, foram de grande valia para o desenvolvimento da nossa compreensão sobre as características da matemática e de seu ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARCO, L. A alavanca de Arquimedes. **Super Interessante**, v. 3, n. 1, 1989.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2009.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

______.; VILLAREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation an visualization. New York: Springer, 2005.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasilia. 1999.

______. **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasilia. 2002.

______. Matriz de Referência para o ENEM 2009, Brasilia, 2010. Disponivel em: <http://www.enem.inep.gov.br/pdf/Enem2009m atriz.pdf>. Acesso em: fev. 2011.

BROLEZZI, A. C. Atividade criativa na sala de aula de Matemática. In: MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. **Linguagem, Conhecimento, Ação:** ensaios de epistemologia didática. São Paulo: Coleção Ensaios Transversais, 2003.

______; DRUCK, I. D. F. Áreas, semelhanças, volumes e o método da exaustão. In: CERRI, C. **Matemática**. São Paulo: Fundação Vanzolini, 2002. p. 33-44.

CAMARGO JÚNIOR, L. D. **Um estudo sobre a abordagem de Matrizes no Caderno do Professor do Programa "São Paulo faz Escola"**. PUC. São Paulo. 2010.

CARNEIRO, L. D. O. **O Video no Ensino De Geometria Espacial: Construindo o Cilindro**. UNEB. Bahia. 2009.

CARVALHO, L. C. D. **Análise da organização didática da geometria espacial métrica nos livros didáticos**. PUC. São Paulo. 2008.

COLOMBO, J.A.A. **Representações semióticas no ensino:** contribuições para reflexões acerca dos currículos de Matemática Escolar. Florianópolis, 2008.

D'AMORE, B. Pipas, caballos, triángulo y significados. Contribución a una teoría problemática Del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. **Números**, Tenerife, n. 61, p. 3-18, 2005.

DUVAL, R. **Signe et objet (I):** trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. Annales de Didactique et des Sciences Cognitives. [S.l.]: [s.n.]. 1998. p. 139-163.

______. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: HITT, F.; SANTOS, M. **Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Mexico: [s.n.], v. I, 1999. p. 3-26.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**. 7ª. ed. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

______. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages intellectuels.). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, v. I, 2009.

FERRAZ, M. C. **Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional**. PUC. São Paulo. 2010.

GRANDO, N. I. Conceito de volume: referências de diferentes cotidianos para a escola. In: MARANHÃO, C. **Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio**. São Paulo: Musa, 2009.

GUIMARÃES, T. **Volume do Paralelepípedo**. youtube, 2010. Disponivel em: <http://www.youtube.com/watch?v=oeHCucU_dXA>. Acesso em: dez. 2010.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

______. **Medida e Forma em Geometria**. 4ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

______. et al. **Exame de Textos:** Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

______. et al. **Temas e Problemas**. 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

______. et al. **A matemática no ensino médio**. 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2006.

MARTINS, J.B.J.; BRACARENSE, J.C. **Construção de uma metodologia para ensinar e aprender matemática:** um estudo de caso da terceira série do ensino médio. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/929-4.pdf>. Acesso em: dez. 2010.

MEC. Semelhança (Matemática na vida - razão e proporção). Disponivel em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=20850>. Acesso em: jun. 2011.

MIRANDA, S. S. **O papel da Geometria Descritiva nos Problemas da Geometria Espacial: um estudo das secções de um cubo**. PUC. São Paulo. 2006.

OLIVEIRA, G. P. D. Transposição didática: aportes teóricos e novas propostas. In: WITTER, G. P.; FUJIWARA, R. **Ensino de Ciências e Matemática:** análise de problemas. São Paulo: Ateliê, 2009.

PINTO, F. D. A. Arquimedes, as alavancas eo volume da esfera. **RPM**, São Paulo, n. 58, 2005.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 152p.

ROSA, K. C. **Ambientes computacionais no contexto da geometria: panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUC/SP de 1994 a 2007**. PUC. São Paulo. 2009.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço**. PUC. São Paulo. 2009.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.

______. **A teoria geral dos signos:** como as linguagens significam as coisas. 2ª. ed. São Paulo: Pioneira, 2000.

SANTOS, S. C. A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial. **Bolema**, 20, n. 27, 2008.

SÃO PAULO. **Caderno do Professor:** Matemática, ensino médio - 2ª série. São Paulo: SEE, v. 4, 2009.

SILVA, A. P. D. **Arquimedes e o volume da esfera**. UFMG. Belo Horizonte. 2005.

VOMERO, M. F. Medidas extremas. **Super Interessante**, São Paulo, n. 186, p. 43-46, Março 2003.