SILVIO BARBOSA DE OLIVEIRA

AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES E O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

SILVIO BARBOSA DE OLIVEIRA

AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES E O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado.***

PUC/SP
São Paulo
2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

Dedico este trabalho à Fabiana,

que é o Sol da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Quero expressar a minha gratidão a todos que, direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

Primeiro a *DEUS,* por iluminar meus caminhos e por ter-me dado forças para superar os momentos difíceis permitindo que eu concluísse este trabalho.

À *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado* pela orientação, paciência, dedicação, amizade e, acima de tudo, por contribuir na minha formação de pesquisador.

Às Professoras *Doutoras Cileda de Queiroz e Silva Coutinho* e *Regina Flemming Damm* que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, pelas valiosas contribuições oferecidas.

Aos *Professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP*, pela contribuição para a minha formação.

Aos funcionários e amigos *Ana*, *Ângela*, *D.Bina*, *Paulo*, *Talita* e *Francisco* pela maneira cordial como sempre me trataram.

Aos *meus colegas de mestrado* pelo convívio e amizade, em especial, *Carlos*, *Cícera*, *Olga* e *Wilson*.

Às minhas amigas, *Eliane*, *Raquel*, *Leila* e *Conceição* pelo apoio e incentivo de sempre.

À minha *família*, em especial, *minha mãe*, pelo apoio e amor incondicionais dedicados a mim, durante toda a minha vida.

À minha noiva *Fabiana*, a quem dedico este trabalho, que muito me incentivou. Foi uma grande companheira nos momentos difíceis e compreensiva durante minhas necessárias ausências.

Por fim, à *CAPES* pelo fornecimento da bolsa de estudos que garantiu o sustento necessário à realização desta pesquisa.

Muito Obrigado!

O Autor

RESUMO

Neste trabalho apresento um estudo qualitativo sobre a abordagem dada pelo livro didático do Ensino Médio ao tema “equações diofantinas lineares”. Por meio de uma análise de conteúdo, segundo Bardin (1977), busquei o assunto em sua forma explícita e implícita em duas coleções de Matemática para o Ensino Médio, aprovadas no último PNLEM. Embora a Teoria Elementar dos Números venha sendo tratada por pesquisadores de Educação Matemática, como Campbell e Zazkis (2002), como assunto propício para a introdução e desenvolvimento de idéias matemáticas fundamentais, no Ensino Básico, os resultados desta investigação indicam a pouca exploração do assunto por parte das coleções analisadas.

Palavras-Chave: Teoria Elementar dos Números, equações diofantinas lineares, livro didático, Ensino Médio, educação algébrica.

ABSTRACT

This work involves a qualitative study of how the theme of linear Diophantine equations is approached in mathematics textbooks for high school students. Using the methods associated with content analysis (Bardin, 1977), I search for references, in both explicit and implicit forms, to these equations in two different sets of high school mathematics textbooks, both of which had been approved in the last PNLEM (a national project for the assessment of high school textbooks). Although elementary number theory has been highlighted by researchers in mathematics education, such as Campbell and Zazkis (2002), as a subject apt for the introduction and development of fundamental mathematical ideas in compulsory education, the results of this investigation indicate that it receives little attention in the textbooks analysed.

Keywords: Elementary number theory, linear Diophantine equations, mathematics textbooks, High school, algebra education.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.. 10

CAPÍTULO I.. 12
JUSTIFICATIVA.. 12

CAPÍTULO II.. 18
QUADRO TEÓRICO.. 18
Revisão Bibliográfica.. 18
Quadro teórico didático.. 29
A equação diofantina como objeto de estudo.. 33
A equação diofantina como “ferramenta”.. 36

CAPÍTULO III.. 40
QUADRO METODOLÓGICO.. 40
Procedimentos metodológicos.. 41

CAPÍTULO IV.. 44
A INVESTIGAÇÃO.. 44
Alguns Documentos Oficiais:.. 44
PCN do Ensino Médio.. 45
PCN+.. 47
Análise dos livros didáticos:.. 51
Coleção “Matemática: Ciências e Aplicações”.. 52
Coleção “Matemática”.. 74

CAPÍTULO V.. 90
CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 90

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.. 95

Anexos.. 98

INTRODUÇÃO

A idéia de desenvolver uma pesquisa sobre o tema "equações diofantinas lineares" no Ensino Médio surgiu após meu contato com o projeto "O que se entende por Álgebra" que tem sido levado a cabo pelos membros do grupo de pesquisa sobre Educação Algébrica da PUC-SP.

Esse projeto supõe pesquisas que visem investigar o que se entende por Álgebra no campo institucional (PCN, Programas nacionais e estrangeiros, Livros Didáticos,...) no campo docente (professores do Ensino Superior, Médio, Fundamental e Infantil) e no campo discente (alunos de todos os segmentos de ensino).

Sendo professor do Ensino Médio – e convencido da importância dos assuntos de Teoria Elementar dos Números para esse nível de ensino – decidi, a partir das leituras propostas pelos membros do projeto, investigar se o objeto do saber "equações diofantinas lineares" é considerado um objeto de ensino nas propostas curriculares oficiais relativas ao Ensino Médio e nos livros didáticos de Matemática destinados a esse nível de escolaridade. A escolha dessas propostas recaiu em dois dos mais recentes documentos norteadores da educação nacional: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e Parâmetros Curriculares Nacionais "Mais" (PCN+). Em relação aos livros didáticos, foram selecionadas duas coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM/2004).

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, descritos da seguinte forma:

No capítulo I, apresento a justificativa de investigar o tema “equações diofantinas” nos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, as questões que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa e o objetivo pretendido.

- No capítulo II, destaco alguns trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática e em áreas correlatas a respeito da Teoria Elementar dos Números e das equações diofantinas lineares. Incluí, ainda, o referencial teórico em que fundamentei o desenvolvimento desta pesquisa, além do estudo do objeto matemático, que se apresenta como sugestão de abordagem do assunto no Ensino Médio.

- No capítulo III, apresento a metodologia da pesquisa, baseada nos procedimentos de Bardin, que é constituída de três fases: 1) pré-analise; 2) exploração do material; e 3) tratamento dos resultados obtidos e interpretação. Também são explicitados os procedimentos metodológicos que incluem os aspectos considerados para a seleção dos livros didáticos.

- No capítulo IV analiso as propostas curriculares oficiais relativas ao Ensino Médio e os livros didáticos de Matemática indicados para esse nível de ensino.

- As considerações finais são expostas no capítulo V, destacando alguns resultados obtidos a partir da análise dos livros didáticos. Neste capítulo faço minhas considerações e recomendações.

CAPÍTULO I

JUSTIFICATIVA

Em 1996, concluí o Ensino Médio em uma escola pública da capital de São Paulo. As aulas de Matemática desse período foram ministradas por um mesmo professor que invariavelmente utilizava a mesma “didática”: escrevia na lousa as definições de um dado assunto matemático, apresentava alguns exemplos em seguida, explicava a matéria escrita na lousa e indicava algum exercício para ser resolvido em classe. Passado o tempo predeterminado para a resolução, o professor corrigia na lousa e indicava uma série de exercícios semelhantes para serem feitos em casa. Eis o que se pode chamar de didática tradicional do ensino de Matemática.

Nessa época, enquanto estudante do Ensino Médio, eu acreditava que a aplicação correta das regras e dos procedimentos, nas resoluções dos exercícios propostos pelo professor, garantiria minha compreensão dos assuntos e, conseqüentemente, bons resultados nas provas e trabalhos. Por isso meu estudo se resumia em refazer, mecanicamente, os exercícios de acordo com a correção feita pelo professor na lousa.

Agindo dessa forma, eu conseguia boas notas e meus colegas julgavam-me o aluno que "entendia de Matemática". Por isso, muitos deles procuravam-me para auxiliá-los nas tarefas dessa disciplina quando não conseguiam resolver os exercícios.

Iludido pelo que pensava ser "fazer Matemática" e pela idéia de que era conhecedor da matéria, resolvi ingressar em um curso superior nessa área do saber.

Assim, dois anos depois, em 1998, ingressei no curso de Bacharelado em Matemática, da PUC-SP. Durante a graduação, deparei-me com uma metodologia de ensino diferente da tradicional a qual estava habituado. A ênfase dada pela maioria dos professores estava na compreensão dos conceitos e na interpretação dos resultados dos problemas e não na aplicação de algoritmos sem significado, conforme me acostumara anteriormente.

Isso de certa forma me desestabilizou, pois, como já apontei, pensava que aplicar corretamente as regras e os procedimentos em exercícios padronizados constituía a essência do "fazer Matemática".

Percebi então que "fazer Matemática" não era exatamente aquilo que eu pensava ser durante o Ensino Médio. O contato com alguns professores da graduação, que também lecionavam no curso de Pós Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, doravante chamado apenas de Programa, levou-me a concluir que os assuntos tratados no Ensino Médio poderiam e deveriam ser ensinados de forma diferente daquela que vivi.

Desse modo, interessei-me pela área de Educação e, após concluir, em 2001, o curso de bacharelado, iniciei, no ano seguinte, o curso de Licenciatura Plena em Matemática, na mesma Universidade. Sendo aluno do curso de licenciatura, tive a oportunidade de atuar como monitor no projeto "Construindo Sempre Matemática"[1]. Minha função como monitor era acompanhar as aulas dos alunos-professores e depois atender individualmente àqueles que tivessem dúvidas.

Constatei então que, ao se trabalhar o módulo "Resolução de equações", alguns alunos-professores do projeto procuravam-me para auxiliá-los a descobrir quais propriedades dos números justificavam as transformações operadas na equação para sua resolução. Dessa forma pude perceber as dificuldades que o trabalho com resolução de equações pode apresentar. Isso levou-me a decidir, ao concluir o curso de licenciatura, estudar os problemas do processo ensino-aprendizagem de Álgebra.

[1] Projeto de formação continuada de professores de Matemática, realizado em 2002, parceria entre a PUC-SP e SEE/SP.

Em agosto de 2003, ingressei no Programa e fui convidado por minha orientadora a participar do grupo de pesquisas intitulado “Educação Algébrica”, de agora em diante designado por G5. O principal objetivo do G5 é investigar: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática. De início, as leituras propostas aos participantes do G5, como as do livro “Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching”[2] levaram-me a verificar que as dificuldades dos estudantes com a Álgebra eram mundiais e estavam merecendo a atenção de vários pesquisadores de renome como, por exemplo, John Mason, Lesley Lee, Carolyn Kieran, Alan Bell, Teresa Rojano.

Outra leitura proposta a todos do G5 foi a do livro “Learning and Teaching Number Theory – Research in Cognition and Instruction”[3]. O motivo para a atenção a temas da Teoria dos Números no grupo de “Educação Algébrica” justifica-se porque, nesse grupo, considera-se a Aritmética, parte inicial da Teoria dos Números, como parte da Álgebra. Entende-se que a Aritmética dá origem à Álgebra contendo suas idéias de modo implícito, idéias essas que serão explicitadas quando do estudo do que na escola se chama de Álgebra.

Ao tomar contato com as idéias expostas nesse livro, recordei o curso de Teoria dos Números que tive na minha graduação lembrando o quanto ele pareceu-me esclarecedor, motivador e agradável na época. Isso levou-me a decidir participar do projeto “O que se entende por Álgebra” levado a efeito por alguns membros do G5.

Apesar de a Teoria dos Números abranger um vasto campo da Matemática englobando a Aritmética, sua parte mais elementar é considerada pelo G5 como parte comum a Álgebra, com a compreensão de que essa parte comum trate principalmente do estudo das propriedades dos números inteiros. Marilene Resende, participante do projeto “O que se entende por Álgebra”, estabeleceu, em seu texto de qualificação de doutorado, o que denomina de Teoria Elementar dos Números. A autora descreve que concebe a Teoria Elementar dos Números como sendo assunto a ser trabalhado em um primeiro curso de Teoria dos Números, do qual constaria o estudo de:

[2] “Abordagens para a Álgebra: Perspectivas para a Pesquisa e Ensino”, tradução do autor.
[3] “Aprendendo e Ensinando Teoria dos Números: Pesquisa em Cognição e Instrução”, tradução do autor.

> **Números Inteiros**: operações e propriedades, princípio da indução finita; **Divisibilidade**: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; **equações diofantinas lineares.** (RESENDE, 2005, p.109)

A definição dada por Resende para a Teoria Elementar dos Números passou a ser adotada como definição “oficial” do G5.

Alguns pesquisadores de Educação Matemática como Campbell e Zazkis (2002) têm enfatizado que a Teoria dos Números constitui-se em um contexto feliz para introduzir e desenvolver idéias fundamentais da Matemática, como: conjecturar, argumentar e demonstrar. Estudos como os de Machado *et al* (2005) confirmam o potencial da Teoria dos Números para ajudar os estudantes a reconhecer e reparar limitações em seu entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros.

No entanto, apesar das possibilidades que o estudo da Teoria dos Números propicia, os autores citados apontam a ausência ou pouca ênfase dada à Teoria Elementar dos Números nos currículos dos diferentes níveis de ensino e destacam, ainda, que as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse tema têm sido relativamente esparsas e desconectadas. Na mesma direção, Ferrari (2002, p. 97) afirma que, em alguns países como a Itália, a Teoria Elementar dos Números é um assunto muitas vezes esquecido no currículo do Ensino Médio[4].

Ciente da importância da Teoria Elementar dos Números para o Ensino Básico, e considerando que, como professor do Ensino Médio, dei conta da inexistência desse assunto em meus cursos, perguntei-me: qual a causa desse descaso? Quem seriam os responsáveis: os professores? Os livros didáticos? Os programas? A falta de situações-problema que necessitam desses conhecimentos para sua resolução e que sejam acessíveis aos alunos?

Na realidade, essas questões originam-se da hipótese de que as equações diofantinas lineares não são contempladas no atual currículo de matemática do Ensino Médio no Brasil. Mas resta a esperança de que esse assunto esteja presente de modo implícito no currículo, na forma de resolução de problemas que envolvam

[4] “Elementary number theory is a subject often disregarded in high school curricula; in some countries, such as Italy, […]”

esse tipo de equação, ou em comentários sobre a sua resolução, mesmo que o termo esteja omisso.

O projeto “O que se entende por Álgebra”, no qual esta investigação está inserida, supõe pesquisas que visem a investigar o que se entende por Álgebra no campo institucional (PCN, Programas nacionais e estrangeiros, Livros Didáticos,...) no campo docente (professores do Ensino Superior, Médio, Fundamental e Infantil) e no campo discente (alunos de todos os segmentos de ensino).

Para responder às questões feitas, levando em conta os objetivos desse projeto, decidi investigar como o livro didático do Ensino Médio trata assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números.

Porque investigar o livro didático? Lajolo (1996) afirma que o Brasil, por sua precária situação educacional, faz com que o livro didático “acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, *o que* se ensina e *como* se ensina...” (Lajolo 1996, p. 3).

A minha prática discente e, atualmente, docente corrobora a observação de Lajolo sobre a influência e a importância do livro didático, principalmente no ensino de Matemática. Considero que o livro didático exerce grande influência no processo de ensino, pois, além de determinar o currículo a ser desenvolvido em sala de aula, constitui-se como importante instrumento pedagógico para o professor, já que lhe sugere conteúdo, metodologia e atividades.

Por outro lado, o interesse em compreender as causas das dificuldades enfrentadas pelos professores em relação a equações, apresentadas na época que realizei a monitoria citada anteriormente, levou-me a focalizar, dentre os assuntos da Teoria Elementar dos Números, as equações diofantinas lineares. Optei por verificar esse assunto nos livros didáticos para o Ensino Médio, porque julguei ser o *locus* mais adequado para seu desenvolvimento além de ser o nível em que trabalho como docente.

Isso posto, adeqüei as questões anteriores a fim de torná-las específicas viabilizando, assim, minha pesquisa:

- Os documentos oficiais sobre o Ensino Médio consideram aspectos da Teoria Elementar dos Números, mais especificamente das equações diofantinas lineares?

- Os livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio abordam as equações diofantinas lineares e/ou situações que sugiram, para sua solução, o uso de conhecimentos sobre resolução de equações diofantinas lineares?

Estas questões determinaram meu objetivo de pesquisa que é o de investigar se e como é abordado o tema “equações diofantinas lineares” em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio.

CAPÍTULO II

QUADRO TEÓRICO

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira, foi realizada uma apreciação de alguns trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática e de áreas correlatas. Na segunda parte, abordei o referencial teórico que embasa o estudo didático.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta parte, apresento a revisão bibliográfica focalizando alguns estudos que considero relevantes, cujos resultados e considerações contribuíram efetivamente para o desenvolvimento desta pesquisa. Contemplo os estudos a respeito da Teoria Elementar dos Números de Campbell e Zazkis (2002), Ferrari (2002), além de artigos de membros do grupo de pesquisa Educação Algébrica e de Guzmán (1992). Também foram contemplados os estudos e artigos correlatos ao tema "equações diofantinas lineares" dos autores: Rama (2005), Barros (1998), La Roque e Pitombeira (1991) e Silva (2002).

Campbell e Zazkis (2002) editaram o livro "Learning and Teaching Number Theory – Research in Cognition and Instruction". Os trabalhos, divulgados nesta obra, tratam de assuntos da Teoria Elementar dos Números, como divisibilidade, números primos e compostos, decomposição em fatores primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, relações entre quocientes e restos, além de incluir estratégias de resolução de problemas, prova de alguns teoremas sobre números inteiros, formulação de conjecturas e provas por indução e dedução.

Esses trabalhos foram conduzidos nos Estados Unidos, Canadá, Reino Unido e Itália e seus resultados indicam o potencial da Teoria Elementar dos Números para auxiliar o estudante na compreensão da Matemática Fundamental.

Ao discutirem o papel da Teoria Elementar dos Números no ensino da Matemática, Campbell e Zazkis citam argumentos que o NCTM de 1989 já trazia, como o seguinte:

> A Teoria dos Números oferece muitas e ricas oportunidades para explorações que são interessantes, prazerosas e úteis. Estas explorações têm desfecho na resolução de problemas, na compreensão e desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, na ilustração da beleza da matemática, e na compreensão dos aspectos humanos do desenvolvimento histórico do número[5]. (NCTM, 1989, p. 91 apud Campbell e Zazkis, 2002; p.2).

Além disso, os autores ressaltam o fato de a Teoria dos Números constituir-se num contexto feliz para introduzir o formalismo matemático, uma vez que os objetos examinados (números) são familiares aos estudantes há muito tempo.

Um dos autores do livro citado acima, Pier Luigi Ferrari (2002), enfatiza que os assuntos de Teoria Elementar dos Números, como divisibilidade e números primos, oferecem várias oportunidades pedagógicas que contribuem para a construção do raciocínio matemático. O autor argumenta que há duas razões para trabalhar com esses assuntos, primeira razão: o trabalho com Teoria Elementar dos Números não requer um amplo conhecimento teórico, pois o assunto depende de idéias e métodos normalmente aprendidos no Ensino Básico. Além disso, a quantidade relativamente pequena de pré-requisitos conceituais em Teoria Elementar dos Números fornece boas oportunidades para realmente entender os significados envolvidos por meio de vários processos tais como: indução, dedução, tentativa e erro, verificação numérica de resultados, entre outros. Segunda razão: <u>a Teoria Elementar dos Números envolve algumas propriedades e algoritmos diferentes daqueles praticados no Ensino Médio e, em particular, fornece uma escolha de problemas simples que não podem ser resolvidos por aplicação direta de algoritmos, mas requerem interpretação dos dados</u>, grifo meu. Por exemplo, um

[5] Number theory offers many rich opportunities for explorations that are interesting, enjoyable, and useful. These explorations have payoffs in problem solving, in understanding and developing other mathematical concepts, in illustrating the beauty of mathematics, and in understanding the human aspects of the historical development of number.

problema simples como: *Ache um inteiro x tal que mdc (x, 6) = 2* não requer nada além do conhecimento do significado de mdc e de algum método que possa determiná-lo; no entanto, não pode ser resolvido por meio de transformações algébricas porque tem muitas soluções e x não pode ser representado como uma função algébrica de 6 e de 2.

Em outras palavras, Ferrari (2002) afirma que o estudo da Teoria Elementar dos Números propicia ao estudante uma melhoria de suas habilidades matemáticas, pois a possibilidade de uma ampla escolha de problemas acessíveis à compreensão do aluno força-o a usar conhecimentos e heurísticas e desencoraja-o de aplicar algoritmos sem referência ao significado[6]. (p. 99).

O grupo de Educação Algébrica da PUC-SP em vários de seus artigos, por exemplo, em Maranhão *et al* (2004) e Machado *et al* (2003), têm alegado que uma das razões da importância da Teoria Elementar dos Números repousa no fato de que essa teoria está subjacente a quase todos os domínios da Matemática e também de outras áreas, tais como: Ciências da Computação, Engenharia e Física, entre outras. Daí o fato de ser imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento, tenham domínio sobre seus principais conceitos.

Considerando as múltiplas aplicações da Teoria Elementar dos Números com o advento da era da informática, Guzmán (1992), citado por Carneiro (1998), afirma que:

> A Matemática dos séculos XIX e XX tem sido predominantemente a Matemática do contínuo... [mas]... o advento dos computadores, com suas... possibilidades para a modelização sem passar pela formulação matemática de feitio clássico, abriu uma multidão de campos diversos, com origem já não mais na Física, como os desenvolvimentos dos séculos anteriores, mas em muitas outras ciências, como a Economia, as ciências da organização, ... A predominância dos algoritmos discretos, usados nas ciências da computação e na informática,... deu lugar a um deslocamento da ênfase da Matemática atual na direção da Matemática discreta, que apresenta alguns conteúdos suficientemente elementares para poderem figurar com sucesso em um programa inicial de Matemática. ... A teoria elementar dos números, que nunca chegou a desaparecer dos programas de alguns países, poderia ser uma delas. (GUZMÁN, 1992 apud Carneiro 1998, p. 28).

[6] [...], in elementary number theory there is a wide choice of problems that will force students to use knowledge and heuristics and discourage them from applying algorithms with no reference to meaning.

Aguinaldo Rama (2005), colega do G5 trabalhando no mesmo projeto “O que se entende por Álgebra”, elaborou sua dissertação de mestrado intitulada “Números Inteiros nos Ensinos Fundamental e Médio”, com o objetivo de compreender o papel específico do estudo dos números inteiros na formação de alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Para atingir seu objetivo, o autor analisou a forma como os autores de livros didáticos de Matemática abordam os números inteiros, em particular o conceito de divisibilidade. Rama voltou sua atenção para quatro aspectos: a) as estratégias adotadas para demonstrações referentes aos números inteiros; b) o uso de situações-problema desafiadoras; c) as articulações entre números inteiros e outras áreas da matemática, em particular a álgebra e a geometria; d) a articulação de conteúdos novos e as conseqüentes retomadas dos assuntos, levando em consideração o suposto amadurecimento dos estudantes.

Rama analisou três coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, dentre as indicadas pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), e todas as onze coleções recomendadas pelo guia do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNELM).

Dentre os resultados apresentados pelo autor, focalizei particularmente aqueles que dizem respeito aos conceitos relativos à divisibilidade, dada a sua importância nesta pesquisa.

Nos três livros didáticos do Ensino Fundamental analisados, Rama encontrou o tema da divisibilidade introduzido por meio de situações-problema e explicou que o conceito de divisor de um número natural é trabalhado principalmente nas seções sobre resolução de problemas e cálculo mental. O autor indica que propriedades importantes da divisibilidade, como “se a e b são múltiplos de m, então $(a + b)$ é múltiplo de m”; ”se a divide b, e b divide c, então a divide c” foram discutidas em duas coleções, em que se acrescentam justificativas informais ilustradas com vários exemplos. Rama descreve, ainda, que os conceitos de mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc) são introduzidos a partir de situações-problema nas três coleções analisadas.

Os conceitos de números primos e compostos aparecem nas três coleções e são introduzidos nos livros destinados à 5ª série. O autor observa que a unicidade da decomposição em fatores primos é apresentada, nas três coleções, por meio de diversos exemplos discutidos. Após os exemplos iniciais sobre a fatoração em primos, duas das coleções apresentam o algoritmo usual da decomposição. Os cálculos do mmc e mdc são utilizados na simplificação e operações com frações.

É interessante notar que Rama chama a atenção para o fato de que, em uma das coleções, há uma descrição do algoritmo de Euclides para a obtenção do mdc de dois números inteiros. No entanto, tal descrição é feita numa seção que assume caráter de curiosidade histórica, ficando a critério do professor a possibilidade de abordar o conteúdo com mais detalhes.

Quanto aos livros didáticos do Ensino Médio, o autor analisou apenas as seções dedicadas ao estudo dos conjuntos numéricos. Rama descreve que a revisão dos inteiros é superficial e é feita apenas no início do primeiro livro de cada coleção analisada. O autor indica que o conceito de divisibilidade entre inteiros aparece somente em poucos exercícios.

Rama destaca alguns problemas sobre números inteiros que foram propostos nas listas de exercícios que encerram as seções sobre conjuntos numéricos ou nos testes de vestibulares inseridos no final dos livros. Dentre esses problemas, dois deles envolvem equações diofantinas lineares para sua resolução. Porém o autor não fez considerações sobre suas resoluções, posto que não era esse seu intento.

Convém destacar que, dentre as sugestões de Rama, consta a importância de se apresentar em livros didáticos algumas observações interessantes sobre equações de reta. O autor exemplifica com o caso da equação $2x + 4y = 5$ que, apesar de ter coeficientes inteiros não intercepta nenhum ponto com ambas as coordenadas inteiras, pois as parcelas do primeiro membro da igualdade são pares, o mesmo ocorrendo com a soma, e o segundo membro da igualdade é ímpar. O autor sugere que se demonstre que a equação $ax + by = c$; com a, b e c sendo números inteiros, apresentará soluções inteiras x e y, se c for múltiplo de mdc (a, b). Dessa forma, observa-se que, mesmo sem dizer que se tratava de uma equação diofantina linear, Rama chamou a atenção para o assunto.

Concluindo, Rama torna evidente que os conceitos-chave em Teoria Elementar dos Números, como divisibilidade, estão presentes nos livros didáticos do

Ensino Fundamental. Isso quer dizer que os conhecimentos necessários ao estudo das equações diofantinas lineares estão disponíveis aos alunos nesses livros didáticos do Ensino Básico, possibilitando assim um trabalho mais explícito sobre o assunto. Nos livros do Ensino Médio, Rama apresentou dois problemas que podem ser resolvidos via equações diofantinas lineares, porém, não há considerações a respeito deles. A leitura desse trabalho sugere as seguintes questões: nos demais capítulos dos livros didáticos, existem outros problemas que envolvem o uso de equações diofantinas lineares para suas resoluções? Existe o assunto “equações diofantinas lineares”?

Alayde Barros (1998) realizou a monografia de título “Equações Diofantinas e suas Aplicações”, em que apresenta o desenvolvimento didático de equações diofantinas lineares e problemas aritméticos que envolvem, em suas resoluções, conhecimentos do assunto.

Em seguida, apresentou algumas definições, teoremas e proposições que foram utilizadas para o estudo das equações diofantinas lineares, com um maior destaque para as definições de máximo divisor comum, congruência e congruência linear.

A autora apresenta, ainda, um estudo sobre as condições de existência das soluções inteiras de uma equação diofantina linear e de como determiná-las.

A monografia de Barros (1998) é um trabalho feito como finalização de um curso de especialização em Matemática e como tal não apresenta considerações do ponto de vista da Educação Matemática. No entanto, os problemas abordados cujas resoluções se beneficiam do uso dos conhecimentos sobre equações diofantinas lineares são muito interessantes. A seguir exponho alguns desses problemas:

Problema 1 – Compra de um cachecol:

> Um cachecol custa, na Rússia, 19 rublos, mas o caso é que o comprador só tem notas de 3, e o caixa, só de 5. Nessas condições, será possível pagar a importância da compra, e de que modo? (BARROS, 1998, p. 41).

O interesse desse problema reside no fato de que a equação diofantina linear que o traduz $3x - 5y = 19$ possui infinitas soluções inteiras e positivas. Dentre as infinitas possibilidades, pode-se efetuar o pagamento do cachecol com 8 notas de 3 rublos, recebendo de troco, uma de 5. Ou pagar com 13 notas de 3 rublos, recebendo de troco, 4 notas de 5 rublos. De modo mais geral, para o pagamento utiliza-se $5n + 8$ notas de 3 rublos, recebendo de troco $3n + 1$ notas de 5 rublos, para valores de $n \in N$. Esse problema, teoricamente, possui uma infinidade de soluções, porém o contexto supõe que a pessoa considere a menor solução.

Problema 2 – Adivinhar o aniversário:

> Propõe-se a uma pessoa que multiplique a data do dia do seu nascimento, por 12, e o número que indica o mês correspondente, por 31. Com a soma desses produtos é possível calcular-se a data do aniversário da dita pessoa.
>
> Se, por exemplo, ela nasceu em 09 de fevereiro, efetuar-se-ão os seguintes cálculos:
>
> 9 . 12 = 108;   2 . 31 = 62;   108 + 62 = 170.
>
> Como se deduzirá a data do aniversário com o conhecimento dessa soma? (BARROS, 1998, p. 43).

O caráter lúdico desse problema pode ser um importante recurso didático. Estimula o estudante a tentar adivinhar uma data de aniversário quando fornecida a soma dos produtos do dia de nascimento por 12 e do número que indica o mês correspondente por 31. Além disso, desperta a curiosidade do aluno para verificar o porquê de o "truque" nunca falhar induzindo-o a uma tentativa de demonstração.

Problema 3 – Uma compra de eletrodomésticos:

> Por R$ 5 000,00 compraram-se 100 unidades de eletrodomésticos. Os preços deles eram os seguintes:
>
> | | |
> |---|---|
> | TELEVISOR 14 POLEGADAS | R$ 500,00 cada |
> | BATEDEIRA | R$ 100,00 cada |
> | RÁDIO DE PILHA | R$ 10,00 cada |
>
> Quantos eletrodomésticos de cada espécie puderam ser comprados? (BARROS, 1998, p. 45).

É importante observar que os valores dos eletrodomésticos apresentados no problema são próprios da época, o que sugere uma adaptação aos dias de hoje. Esse é um problema interessante, pois o modelo matemático que o descreve pode ser expresso pelo sistema linear que envolve um número de equações inferior ao de incógnitas. Assim, em face das condições do problema, cujo contexto exige soluções inteiras, o aluno deverá perceber que de todas as soluções possíveis, ao considerar o conjunto dos números reais, haverá somente uma solução determinada e única no caso do conjunto dos números inteiros positivos.

Esses problemas são resolúveis via equações diofantinas lineares. O conhecimento do assunto permite tornar as resoluções dos problemas mais simples, ao contrário de métodos como o de tentativa e erro. Esses são problemas próprios para serem trabalhados tanto com os alunos do Ensino Médio, quanto com os do Ensino Fundamental, pois apresentam enunciados simples e são resolvidos por meio de conceitos aprendidos no Ensino Básico. Isso gera a esperança de encontrar em livros didáticos problemas semelhantes a esses.

A seguir apresento algumas das idéias do texto “Uma equação diofantina e suas soluções” de Gilda La Rocque e João Bosco Pitombeira (1991). Este artigo foi o primeiro a me chamar a atenção para a importância do estudo de equações diofantinas lineares no Ensino Médio. Após lê-lo pela primeira vez, fui instigado a resolver os problemas apresentados, o que me alertou sobre a eficiência da resolução de problemas que envolvem somente números inteiros via conhecimentos sobre o assunto: equações diofantinas lineares.

O artigo foi elaborado pelos autores a partir de atividades realizadas com professores do Ensino Médio do Rio de Janeiro, no “Projeto de Matemática, Comunidade e Universidade”, do Departamento de Matemática da PUC/RJ.

La Roque e Pitombeira introduzem o assunto por meio de três problemas, sendo que um deles será resolvido por mim e apresentado posteriormente. A seguir exponho os outros dois problemas:

Problema 1: O problema das quadras

> Quantas quadras de basquete e quantas de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se forem 77 alunos? (La Rocque e Pitombeira, 1991, p. 39) ·.

Sabendo que o basquete e vôlei são jogados, respectivamente, por duas equipes com 5 e 6 jogadores em cada uma, a primeira equação que descreve o problema é 10x + 12y = 80 e apresenta duas soluções: x = 2 e *y* = 5 ou x = 8 e y = 0; enquanto a segunda equação é 10x + 12y = 77 e não apresenta soluções.

Problema 2: O problema dos aviões

> Para agrupar 13 aviões em filas de 3 ou de 5, quantas filas serão formadas de cada tipo? (LA ROCQUE e PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

Os autores afirmam que este é um problema que pode ser apresentado desde muito cedo às crianças. A equação que o traduz é 3x + 5y = 13 e apresenta uma única solução (sendo x e y números inteiros e positivos) x = 1, y = 2.

É importante ressaltar que La Rocque & Pitombeira afirmam que, ao propor um desses problemas, a escolha dos coeficientes *a*, *b* e *c* da equação diofantina linear *ax* + *by* = *c* importa, não só para maior ou menor dificuldade nos cálculos, como também para a existência de uma, várias ou nenhuma solução (desde que sejam inteiras ou inteiras positivas). Dessa forma, os autores sugerem que um conhecimento mais vasto da situação envolvida é fundamental.

Esse artigo, além de ter despertado minha atenção para a importância desse assunto no Ensino Básico, contribui, como o trabalho de Barros, para que haja esperança de que problemas acessíveis como esses possam estar presentes nos livros didáticos para o Ensino Médio.

Em artigo publicado na Revista da Olimpíada do Estado de Goiás, Edméia Silva (2002) lembra que exemplos de equações diofantinas lineares também surgem em problemas da natureza (Física, Química, Biologia). Silva dá como exemplo o fato de que a molécula de hidrogênio (H_2) reage com a de oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O), ou seja, *x* moléculas de H_2 reagem com *y* moléculas de O_2 para produzir *z* moléculas de H_2O, ou $xH_2 + yO_2 = zH_2O$.

Como os átomos não são alterados, o número de átomos de cada elemento do início da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento no fim da reação. Dessa forma tem-se: $\begin{cases} 2x = 2z \\ 2y = z \end{cases}$. Este sistema é equivalente à equação diofantina linear $2x - 4y = 0$.

Dessa forma, percebe-se que uma situação simples e conhecida da Química pode ser representada por uma equação diofantina linear.

A autora apresenta, ainda, uma questão que consta na Prova Nível 1 da X Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, que é um caso de equação diofantina linear. A questão é a seguinte:

Um número natural divisível por 3 deixa resto 5 quando dividido por 100.

(a) Coloque em ordem crescente todos os números de três algarismos com a propriedade acima;

(b) Qual o menor número de 4 algarismos com a propriedade acima? E o maior número de 4 algarismos com a propriedade?

Nesse caso, pode-se indicar um destes números por n. Como n é divisível por 3, tem-se que $n = 3x$, com x inteiro. Por outro lado, quando dividido por 100, n deixa resto 5, logo $n = 100y + 5$, com y inteiro. Logo $3x = 100y + 5$. A resolução desta questão consiste em encontrar soluções inteiras e positivas da seguinte equação diofantina linear: $3x - 100y = 5$.

O artigo de Silva mostra que o estudo das equações diofantinas lineares também é eficaz para resolver problemas de outras áreas do conhecimento, como a Química. Além disso, o fato de que tenha sido proposto em uma prova da Olimpíada de Matemática indica a atribuição de importância ao conhecimento desse assunto para a resolução de problemas que envolvem números inteiros.

A presente revisão bibliográfica permite concluir que pesquisadores brasileiros e estrangeiros, de Educação Matemática e de ramos correlatos, concordam que a Teoria Elementar dos Números se constitui em um meio importante para o desenvolvimento das compreensões dos conceitos e dos procedimentos matemáticos, na medida em que oferece diversas oportunidades pedagógicas que auxiliam a construção do raciocínio matemático. Além disso, dada a importância que os conceitos da Teoria Elementar dos Números desempenham na formação matemática dos indivíduos e nas ciências que utilizam a Matemática, torna-se indispensável possuir o domínio de seus principais conceitos.

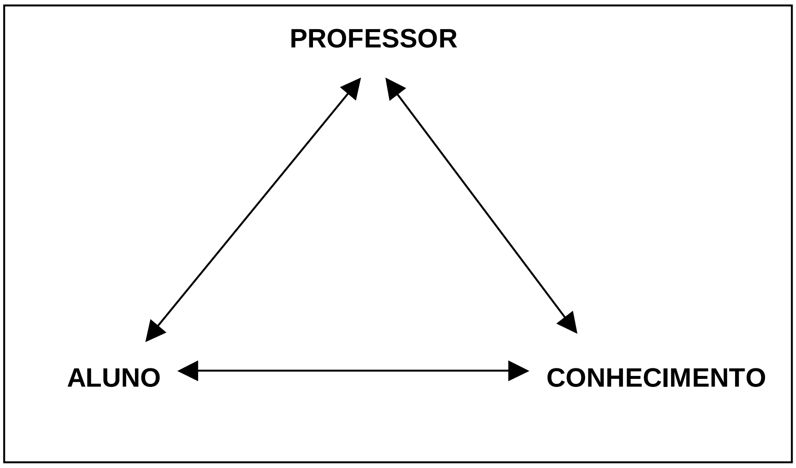
É importante destacar que a pertinência do estudo da Teoria Elementar dos Números também está associada à realidade atual, que enfrenta problemas provenientes das Ciências da Computação e da informática, bem como o de outras áreas do conhecimento, uma vez que quase todos os campos da Matemática têm alguma conexão com a Teoria Elementar dos Números.

Destaca-se, ainda, a diversidade dos problemas de Teoria Elementar dos Números que são acessíveis à compreensão do estudante e que contribuem para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio matemático. Esses problemas permitem que se formulem questões cuja solução completa requer manejo de conceitos de forma integrada. Muitos deles são propícios ao desenvolvimento da compreensão funcional e, também, estrutural da Matemática, propiciando, inclusive, a introdução ao formalismo matemático, além de possibilitar a investigação das habilidades do estudante para generalizar e fazer conjeturas – e para encontrar maneiras de justificar essas conjeturas – por meio do desenvolvimento de estratégias de prova indutivas e dedutivas. É fundamental ressaltar que a resolução de problemas de Teoria Elementar dos Números envolve conceitos e métodos aprendidos no Ensino Básico e exigem a interpretação de seus dados.

É o caso dos problemas que envolvem o uso de conhecimentos sobre resolução de equações diofantinas lineares. Esse é um assunto importante a ser trabalhado no Ensino Básico por dois motivos: primeiro, os conhecimentos relativos à resolução de equações desse tipo estão presentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Segundo, já existem diversas situações-problema que são acessíveis à compreensão do estudante e cujas soluções são facilitadas com o conhecimento dessa "ferramenta" de resolução de problemas. Dessa forma, justifica-se a presença do tema "equações diofantinas lineares" no Ensino Básico.

QUADRO TEÓRICO DIDÁTICO

Segundo a Didática da Matemática Francesa, o estudo dos fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem da Matemática pressupõe a análise de variáveis envolvidas nesse processo: professor, aluno e conhecimento; assim como as relações entre elas. Tais relações são entendidas como uma via de mão dupla, isto é, não se aceita uma visão puramente objetivista e muito menos subjetivista desse processo.



Para o entendimento de uma situação didática, deve-se considerar esses três elementos didáticos. No entanto, sabe-se que eles não são suficientes para traduzir toda a complexidade do processo de ensino-aprendizagem da Matemática e, dessa forma, associados às extremidades desse triângulo estão alguns procedimentos que vão oportunizar todo o processo como: os recursos didáticos, o planejamento, a metodologia, a avaliação, entre outros.

Os recursos como, por exemplo, os livros didáticos, revistas, jornais, computadores, vídeos, entre outros, devem interagir com professores e alunos de acordo com os objetivos e os métodos anteriormente planejados.

Nesse sentido, deve-se destacar a influência que os livros didáticos exercem na relação professor-aluno, fato reconhecido por vários autores como Lajolo (1996) e pelos autores dos PCN (1998, p. 21), que afirmam: “... os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos...”. Isto quer dizer, dentre outras coisas, que o conhecimento produzido em sala de aula por professor e aluno é fortemente influenciado pelo livro didático, sendo o livro muitas vezes, o responsável pela definição do roteiro de trabalho para o ano letivo e pela delimitação das atividades a serem utilizadas em sala de aula pelo professor, além de ocupar os alunos em classe e nos deveres de casa.

Pires (2001, p. 6), referindo-se particularmente ao livro didático de Matemática, afirma que ele:

> [...] tem se constituído em um elemento fortemente determinante do saber escolar, no que se refere à seleção dos conteúdos, à transposição didática, ou seja, a re-elaboração e organização destes conteúdos para adequá-los ao ensino básico, à sua distribuição por séries ou ciclos, à ênfase dada a certos tópicos em detrimento de outros.

Assim, é possível afirmar que o saber transmitido pelo professor aos alunos, em sala de aula, é, em grande parte, orientado pelos tópicos selecionados e estabelecidos pelos conteúdos programáticos dos livros didáticos. É o livro didático que dita aos professores "qual" é o objeto do saber e "como" este deve ser ensinado aos alunos. Portanto é ele que, de maneira geral, estabelece os saberes a serem ensinados no âmbito escolar.

Dessa forma, o livro didático é um forte indicador dos saberes que são considerados importantes para serem ensinados. O que me remete à questão da Transposição Didática, acima mencionada por Pires, e que é tratada de forma profunda por Chevallard (1991) em sua teoria da "Transposição Didática".

De acordo com Chevallard (1991), quando um conteúdo do saber é designado como um saber a ensinar, este deve sofrer uma série de transformações adaptativas que irão habilitá-lo a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. E esse "trabalho" que faz um objeto do saber transformar-se em um objeto de ensino é chamado, então, de transposição didática.

Segundo o autor, o objeto do saber está associado ao saber que normalmente é desenvolvido nas universidades ou institutos de pesquisas, mas que não está diretamente vinculado ao Ensino Fundamental e Médio. Esse saber é aferido e comprovado como lógico e verdadeiro por meio de métodos científicos e, por isso, considerado válido e legítimo pela sociedade de maneira geral. Chevallard identifica como objeto do saber as noções matemáticas como, por exemplo, a adição, o círculo, as equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, etc. Essas noções matemáticas apresentam definições, propriedades e ocasiões de emprego. Assim, de acordo com o autor, somente esses objetos do saber são plenamente candidatos a se tornar objetos de ensino.

O tema "equações diofantinas lineares" é um objeto do saber e, conseqüentemente, uma noção matemática, na medida em que possui a seguinte definição: "Uma equação polinomial com qualquer número de incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras é chamada de equação diofantina"; possui propriedades como, por exemplo: "A equação diofantina linear ax + by = c tem solução se, e somente se, o mdc (a, b) divide c"; além de possuir várias ocasiões de emprego, conforme os problemas apresentados na revisão bibliográfica.

Nesse sentido, como o tema "equações diofantinas lineares" figura entre os objetos do saber, de acordo com a teoria de Chevallard, ele reúne condições para tornar-se um objeto de ensino.

O objeto de ensino, já transformado pela transposição didática, é apresentado geralmente pelo professor ao aluno, segundo Pais (2002), da mesma forma em que aparece nos livros didáticos, programas e outros materiais de apoio, o que reforça o argumento de se procurar no livro didático se o estudo das equações diofantinas lineares é objeto de ensino no Ensino Médio.

Minha questão de pesquisa, à luz da teoria da Transposição Didática de Chevallard, passa a versar fundamentalmente sobre:

> **O objeto do saber, equações diofantinas lineares, é considerado um objeto de ensino no livro didático para o Ensino Médio?**

A revisão bibliográfica mostra que o tema "equações diofantinas lineares" foi objeto de ensino em cursos de formação continuada de professores no Rio de

Janeiro, e que esse tema, com uma devida transposição didática, foi exposto na Revista do Professor de Matemática como sugestão de assunto a ser tratado por professores no Ensino Médio. No entanto, os resultados da pesquisa de Eduardo Costa (2006), integrante do G5, apontam que professores do Ensino Médio, entrevistados por ele em 2005, não trabalhavam com o tema e alguns até mesmo o desconheciam.

Por isso, creio que a questão de pesquisa é relevante e atual.

O tema “equações diofantinas lineares” já passou por uma transposição didática em sua apresentação nos livros didáticos de Teoria dos Números do Ensino Superior, mas isso poderia levar o leitor a pensar que não é tão simples desenvolver esse tema com os alunos do Ensino Médio, por isso apresento, à guisa de sugestão, uma proposta de transposição didática do tema para o Ensino Médio. Essa apresentação é feita por três razões: 1) esclarecer que realmente o desenvolvimento do tema não implica amplos conhecimentos teóricos, isto é, envolve conhecimentos já tratados no Ensino Fundamental e, portanto, trata-se de um objeto do saber passível de se tornar um objeto de ensino; 2) possibilitar uma abordagem que poderia constar nos livros didáticos para o Ensino Médio; 3) sensibilizar professores do Ensino Médio a incorporar esse conhecimento em suas aulas, dada a sua utilidade e a simplicidade de seu desenvolvimento.

Muitos problemas de Matemática são provenientes de situações concretas que envolvem número de pessoas, peças, etc. e requerem **soluções inteiras** positivas. Nesses casos, deve-se buscar entre as soluções possíveis do modelo matemático, aquelas que satisfaçam as condições do problema proposto.

Uma equação polinomial com qualquer número de incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas **soluções inteiras** é chamada de equação diofantina. Uma equação deste tipo pode ter uma ou mais soluções, mas pode também, não ter solução.

As equações diofantinas levam esse nome em homenagem ao célebre matemático Diofanto de Alexandria, que viveu provavelmente no século III d. C., e tratou de problemas que envolviam equações desse tipo, com soluções racionais.

A seguir apresento o estudo do caso mais simples de equação diofantina – a linear com duas incógnitas, **x** e **y:**

$$ax + by = c$$

onde **a**, **b** e **c** são inteiros dados. Pode-se dizer que esta equação tem solução inteira se existem inteiros x_0 e y_0 tais que:

$$ax_0 + by_0 = c$$

A equação diofantina linear como objeto de estudo

Dado que uma equação diofantina linear pode ou não ter solução, a primeira questão que surge é: existe uma forma de saber se uma equação desse tipo tem solução?

É a Teoria Elementar dos Números que trata desse assunto, utilizando resultados da teoria da divisibilidade.

Considere-se a equação diofantina **ax + by = c.** Para saber se existe solução x_0 e y_0, deve-se observar os seguintes resultados da divisibilidade:

- Se um número inteiro **d** divide **a**, então dividirá **am**, para qualquer inteiro **m**;
- Se **d** divide **a** e divide **b**, então dividirá **a + b**;
- Teorema de Bézout: Se **d** é o máximo divisor comum de **a** e **b**, então existem inteiros **m** e **n** tais que: **d** = **am + bn** (I)

O teorema de Bézout lança uma pista sobre como elaborar uma estratégia para responder à questão posta: em que condições a equação diofantina

ax + by = c admite ou não solução?

Se **c** for o **mdc (a, b)** a equação **ax + by = c** tem solução: **x = m** e **y = n** **m, n** de (I).

Se **c = dt**, isto é, **d** é um divisor de **c,** onde **d =** mdc **(a, b)** e **t** é um número inteiro, existem inteiros **m** e **n** tais que **am + bn = d**. Assim,

$$c = dt = (am + bn)t = a(mt) + b(nt)$$

e se conclui que existe ao menos essa solução $x_0 = mt$ e $y_0 = nt$.

Por outro lado, supondo que exista uma solução x_0 e y_0 para a equação considerada tal que $ax_0 + by_0 = c$, admitindo que **d = mdc (a, b)** então **d** divide **a** e **d** divide **b** o que implica que **d** divide $ax_0 + by_0$ e desta forma **d** divide **c.**

Essas deduções permitem enunciar o seguinte teorema:

Uma equação diofantina $ax + by = c$*, em que* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*, admite solução se, e somente se,* ***d = mdc (a, b)*** *divide* ***c****.*

Esse teorema apresenta a condição necessária e suficiente para que uma equação diofantina $ax + by = c$ possua solução inteira; nesse caso, resta saber: como determinar sua solução?

Encontrar uma solução inteira dessa equação é equivalente a determinar números inteiros **m** e **n** tais que $d = am + bn$, onde **d = mdc (a, b)** (teorema de Bézout).

Um modo de encontrar esses números **m** e **n** é por meio do algoritmo de Euclides, ou algoritmo das divisões sucessivas, para o cálculo do **mdc (a, b)**.

Observa-se que, se **a** e **b** são inteiros, com $b > 0$, existem inteiros **q** e **r**, com $0 \leq r < b$, únicos, tais que $a = bq + r$ (algoritmo da divisão). Supondo-se que **x** é um divisor comum de **a** e **b**, então, **x** divide **a** e **x** divide **b**. Mas $r = a - bq$ e como **x** divide cada um dos somados, tem-se que **x** divide **r**, ou seja, **x** é um divisor comum de **b** e **r**.

Da mesma forma, se **x** divide **b** e **r**, como $a = bq + r$, segue que **x** divide **a**. Desse modo, mostrou-se que o conjunto dos divisores comuns de **a** e **b** é igual ao conjunto dos divisores comuns de **b** e **r**.

Assim, o problema de achar o **mdc (a, b)** se reduz a achar o **mdc (b, r)**. Repetindo esse processo, fazendo as divisões sucessivas, tem-se:

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, & 0 \le r_1 < b \\
b &= r_1q_2 + r_2, & 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 \le r_3 < r_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1}
\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Uma vez que o resto diminui a cada passo, o processo é finito e alguma das divisões será exata. Supondo então que $\mathbf{r_{n+1}}$ seja o primeiro resto nulo, tem-se:

$$\mathbf{mdc\ (a, b) = mdc\ (b, r_1) = mdc\ (r_1, r_2) = ...= mdc\ (r_{n-1}, r_n) = r_n}$$

Desse modo, verifica-se que, nesse processo, o **mdc (a, b)** é o último resto diferente de zero.

Esse processo também permite determinar inteiros **m** e **n** nas condições do Teorema de Bézout. Vejamos

A partir das divisões, em (II) tem-se, pela primeira linha, que $\mathbf{a = bq_1 + r_1}$, $0 \le r_1 < b$:

Dessa forma, $\mathbf{r_1 = a - q_1b}$, com $0 \le r_1 < b$, ou seja, $\mathbf{r_1}$ foi escrito como combinação linear de **a** e **b**. Substituindo $\mathbf{r_1}$ pelo seu valor na segunda linha de (II), tem-se: $\mathbf{b = (a - q_1b)q_2+r_2}$ com $0 \le r_2 < r_1 < b$, logo, $\mathbf{r_2 = - q_2a + (1+q_1q_2)b}$ com $0 \le r_2 < b$.

Outra vez, o resto, r_2, foi escrito como combinação linear de **a** e **b**. Substituindo, na terceira linha seguinte de (II), os valores de $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ pelas expressões encontradas, pode-se escrever $\mathbf{r_3}$ em função de **a** e **b**. Repetindo o processo, obtém-se uma expressão para $\mathbf{r_n}$ como combinação linear de **a** e **b**:

$$\mathbf{r_n = ma + nb}$$

Determinada uma solução para $\boldsymbol{ax + by = c}$, novas perguntas surgem: Será que esta solução é a única? Existirão outras? Para responder a estas questões, pode-se supor que exista mais do que uma solução. Supõe-se que **x' e y'** e $\mathbf{x_0}$ **e** $\mathbf{y_0}$ sejam soluções de $\boldsymbol{ax + by = c}$, e **d = mdc (a, b)**, tem-se então:

$$\mathbf{ax' + by' = c \quad e \quad ax_0 + by_0 = c}$$

logo,

$$\mathbf{ax' + by' = ax_0 + by_0}$$

o que equivale a afirmar que

$$\mathbf{a(x' - x_0) = b(y_0 - y')} \qquad \text{(III)}$$

Como **d** divide **a** e **b**, existem inteiros **r** e **s** tais que **a = dr** e **b = ds,** mas **d** é o **mdc (a, b),** dessa forma **mdc (r, s) = 1,** pois se **mdc (r, s)** $\neq$ **1** existiria um inteiro **d' > 1** tal que **dd'** dividiria **a** e **b** e então **d** não seria o **máximo divisor comum** entre **a** e **b.** Dividindo ambos os membros de (III) por **d**, tem-se:

$$\mathbf{r(x' - x_0) = s(y_0 - y')} \qquad \text{(IV)}$$

Da igualdade (IV), tem-se que **r** divide $\mathbf{s(y_0 - y')}$ e, por isso **r** divide $\mathbf{y_0 - y'}$, portanto $\mathbf{y_0 - y' = rt}$ para algum **t** inteiro. Assim,

$$\mathbf{r(x' - x_0) = s(y_0 - y') = srt}$$

mas **r = a/d** e **s = b/d**, dessa forma substituindo pelos valores iguais:

$$\mathbf{y' = y_0 - rt = y_0 -} \frac{a}{d}\mathbf{t}$$

e

$$\mathbf{x' = x_0 + st = x_0 +} \frac{b}{d}\mathbf{t}$$

Dessa forma, provou-se o seguinte teorema:

Seja $\boldsymbol{x_0}$ ***e*** $\boldsymbol{y_0}$*, uma solução particular da equação* ***ax + by = c****, onde* $\boldsymbol{a \neq 0}$ *e* $\boldsymbol{b \neq 0}$ *e o* ***d = mdc (a, b)****. Então o conjunto solução dessa equação é:*

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t \right) \mid t \in \mathbb{Z} \right\}$$

A equação diofantina linear como "ferramenta"

A seguir apresento uma situação-problema, proposta por La Rocque e Pitombeira (1991), para cuja solução é conveniente apelar ao estudo teórico feito anteriormente que justifica e inspira a resolução de equações diofantinas lineares, que agora passa a ser aplicado como ferramenta de resolução de problemas.

> Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue. Uma delas examina 15 amostras de cada vez, enquanto a outra examina 25. Quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar 2 mil amostras? (LA ROCQUE e PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

Designando, por x e y, o número de vezes que a primeira e a segunda máquinas, respectivamente, foram acionadas, basta resolver a seguinte equação diofantina linear para responder à pergunta proposta:

$$15x + 25y = 2000 \tag{I}$$

essa equação é equivalente a

$$3x + 5y = 400 \tag{II}$$

como mdc (5, 3) = 1, esta equação (diofantina) tem solução.

Tem-se agora que encontrar uma solução particular para $3x + 5y = 400$.

Utilizando o método sugerido, primeiramente deve-se encontrar a solução da equação $3x + 5y = 1$, pelo algoritmo de Euclides:

	1	1	2
5	3	2	1
	2	1	0

Este algoritmo permite construir as seguintes expressões:

$$5 = 3.1 + 2 \tag{III}$$

$$3 = 2.1 + 1 \tag{IV}$$

$$2 = 1.2 + 0 \tag{V}$$

A partir da expressão IV:

$$1 = 3 - 2.1 \qquad \text{(VI)}$$

A partir da expressão III obtém-se:

$$2 = 5 - 3.1 \qquad \text{(VII)}$$

Substituindo VII em VI

$$1 = 3 - (5 - 3.1).1$$

aplicando a propriedade distributiva obtém-se

$$1 = 3.2 + 5.(-1) \qquad \text{(VIII)}$$

A expressão VIII indica que $x = 2$ e $y = -1$ é uma solução particular da equação $3x + 5y = 1$. Multiplicando ambos os lados da expressão VIII por 400:

$$1.(400) = 3.2.400 + 5.(-1).400$$

$$400 = 3.800 + 5.(-400) \qquad \text{(IX)}$$

Logo 800 e – 400 é uma solução particular da equação (II) e também será da equação original (I) : $2000 = 15.800 + 25.(-400)$. Conseqüentemente, a solução geral da equação (I) que apresenta mdc (25,15) = 5 se expressa por:

$$x = 800 + 25/5\ t \qquad \text{(X)}$$

$$y = -400 - 15/5\ t, \quad \text{para } t \in Z.$$

Considerando o problema que levou a essa equação, vê-se que só interessam respostas não-negativas para x e para y, assim, deve-se impor que:

$$800 + 5\ t \geq 0, \text{ isto é, } t \geq -160$$

$$-400 - 3\ t \geq 0, \text{ isto é, } t \leq -133,3$$

portanto,

$$-160 \leq t \leq -133, \text{ para } t \in Z$$

substituindo os valores de t em X, obtêm-se 27 soluções (que apresentam valores x e y inteiros positivos) para o problema, desde a primeira máquina parada e a outra sendo acionada 80 vezes, até o caso em que a primeira trabalha 130 vezes e a outra só 2.

No caso deste trabalho de pesquisa, observa-se, a partir do exposto, que os conhecimentos necessários ao desenvolvimento do tema "equações diofantinas lineares" são úteis e adequados ao nível intelectual dos alunos do Ensino Básico.

Para responder à questão desta pesquisa, analisei os livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio segundo o método de Análise de Conteúdo descrito por Bardin (1977).

CAPÍTULO III

QUADRO METODOLÓGICO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar se o objeto do saber, equações diofantinas lineares, é considerado um objeto de ensino nos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio. Essa investigação embasou-se na visão qualitativa de pesquisa e utilizou o método de Análise de Conteúdo descrita por Bardin (1977) para alcançar o seu objetivo.

Esse método de investigação é compreendido não apenas como "um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens", mas principalmente com a "intenção de inferência de conhecimentos relativos às condições de produção e de recepção das mensagens, inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não)" (Bardin, 1977, p. 38).

Como passos metodológicos, essa autora descreve três etapas básicas:

- pré-análise – consiste simplesmente na organização do material;

- exploração do material – nessa etapa, o material e os dados constituem o *corpus*, que é o campo específico sobre o qual a atenção vai ser fixada, sendo, portanto, submetido a um estudo aprofundado orientado pelas hipóteses e pelo referencial teórico;

- tratamento dos resultados obtidos e interpretação – é nesse momento que os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos e válidos, além de serem capazes de evidenciar as informações obtidas. O

> pesquisador, tendo à sua disposição resultados significativos, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas.

Está claro que essas fases não são disjuntas, porém servem de balizamento para os procedimentos adotados.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta parte, apresento os procedimentos metodológicos utilizados para a realização desta pesquisa que pretende responder às questões: a) Os documentos oficiais sobre o Ensino Médio consideram aspectos da Teoria Elementar dos Números, mais especificamente de equações diofantinas lineares? b) O objeto do saber, equações diofantinas lineares, é considerado um objeto de ensino nos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio?

Para responder à primeira questão, analisei a proposta curricular apresentada nos seguintes documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e PCN+. Este último constitui-se em documento que visa a apresentar orientações educacionais complementares aos PCNEM.

Nesses documentos, o foco de análise concentrou-se na parte específica destinada à Matemática, buscando identificar a presença de aspectos relativos à Teoria Elementar dos Números, particularmente ao objeto do saber "equações diofantinas lineares".

Com relação à segunda questão, devido à existência de vários livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio no mercado brasileiro, foi necessário adotar alguns critérios para sua seleção.

Iniciei procurando, na internet, a existência de algum *ranking* de livros didáticos mais vendidos ou mais adotados no Ensino Médio. Realizei a busca em serviços de pesquisa e catalogação de sites na internet, como o *Google* e o *Cadê,* utilizando várias palavras-chave como "*ranking*", "livros didáticos", "*ranking* de livros didáticos", entre outras. Não houve resultado favorável.

Ao ler a dissertação de Paiva (2003), verifiquei que o autor analisou livros didáticos que foram selecionados a partir de um *ranking* de livros mais adotados em 1998 e em 2002, segundo informações da CET – Codificação e Tabulação Ltda. Entrei em contato com essa entidade e fui informado de que não possuíam essas informações.

Procurei então a entidade ABRELIVROS – Associação Brasileira de Editores de Livros, onde me sugeriram procurar tal informação no site do MEC.

Verifiquei que, no dia 19 de maio de 2004, foi divulgada uma relação de onze coleções de livros didáticos de Matemática selecionados pela Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica – Setec/MEC – a serem incluídas no catálogo de escolha de livros didáticos de 1ª a 3ª séries do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), que seriam adotados para os alunos da rede pública no primeiro semestre de 2005.

Baseado nessa lista selecionei duas coleções.

Decidi analisar a coleção “Matemática”, por ser seu autor, Luiz Roberto Dante, membro da comunidade de educadores matemáticos. Dessa forma, julguei que suas obras teriam sofrido a incorporação de inovações provenientes de resultados de pesquisas na área. Além disso, autores como Zazkis e Campbell (2002) teriam-no sensibilizado e convencido da importância de se tratar assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números em todo o percurso escolar.

A segunda coleção escolhida foi “Matemática: Ciência e Aplicações” dos autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Roberto Perigo, David Mauro Degenszajin e Nilze Silveira de Almeida. Tal escolha se justifica pela principal característica de alguns desses autores, como Iezzi e Dolce, que é a de serem considerados tradicionais no segmento de livros didáticos.

Escolhidas as duas coleções de livros didáticos para análise, iniciei o trabalho com uma pré-análise, apresentando características gerais e específicas dos volumes que compõem as duas coleções, observando, principalmente, quais são os pressupostos dos autores dessas coleções e se esses pressupostos incluem articulação entre os campos da Matemática. Nesse sentido, foram observadas as seguintes partes das coleções: a apresentação, o manual do professor e a bibliografia de referência. Em seguida, realizei uma leitura superficial dos capítulos que contemplam os conteúdos abordados nas duas coleções, a fim de estabelecer um contato inicial com esses capítulos, para perceber a sua estrutura e, ainda, conhecer quais os tipos de problemas propostos. Pouco a pouco, essa leitura foi se tornando mais precisa para deter-se nos problemas que envolviam quantidades discretas, e cujas resoluções envolvessem conhecimentos sobre a resolução de equações diofantinas lineares.

De posse dos dados coletados, passei à etapa seguinte, que compreendeu a exploração do material. Nessa etapa, os problemas foram transcritos e comentados. Os comentários pautaram-se nas resoluções que aparecem tanto no livro do aluno, quanto no do professor. As resoluções foram apresentadas em sua totalidade. Em alguns casos, foram feitos comentários apenas de pontos importantes, visto que os problemas eram semelhantes a outros já comentados.

Após a exploração do material, foi iniciada a interpretação dos conteúdos que emergiram nas fases anteriores; nessa última etapa, foi efetivada uma retomada do material, articulando seus dois aspectos: o conteúdo latente ou implícito e o manifesto ou explícito, de acordo com o objetivo da pesquisa.

CAPÍTULO IV

A INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, apresento as análises de duas propostas curriculares – contidas nos documentos oficiais relativas ao Ensino Médio – e de duas coleções de livros didáticos de Matemática para esse nível de escolaridade da Educação Básica.

ALGUNS DOCUMENTOS OFICIAIS

Com o intuito de verificar se e como o tema Teoria Elementar dos Números é considerado em documentos oficiais relativos ao Ensino Médio, analisei primeiramente os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e, posteriormente, os Parâmetros Curriculares Nacionais “Mais” (PCN+). Este último documento, segundo consta da carta ao Professor (p. 3), teve o objetivo de complementar os PCNEM com algumas orientações educacionais a mais.

A escolha desses documentos justifica-se pelo fato de constituírem os mais recentes documentos norteadores da educação nacional. Se tais documentos estabelecem temas a serem privilegiados na escola, o autor de livro didático, sob influência desses documentos, provavelmente abordará tais assuntos. Consoante essa expectativa, a maioria dos autores de livros didáticos recentes, em suas apresentações, afirma que, para elaboração do livro orientaram-se pelas sugestões dos PCN. No entanto é importante observar que alguns temas não indicados nesses documentos podem ter sido incluídos nos livros didáticos motivados não só por resultados de pesquisas, mas por questões de vestibular ou por outro interesse qualquer do autor.

- **PCNEM**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) destacam que *"é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente".* (PCNEM, 1999 p. 251). E, para atender a essas indicações, propõem um conjunto de parâmetros para a organização do Ensino Médio, visando à preparação dos alunos para *"... a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional".* (p. 251).

Os PCNEM (p. 251) enfatizam que a Matemática, nesse nível de ensino, *"... tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo..."* e contribui para *"... formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas,..."* e também desempenha um papel instrumental, *"... pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas"*, devendo ser vista pelo aluno "... *como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional".* Neste sentido, é necessário que *"... o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la"*. Assim, o documento destaca, dentre outras áreas, os Números e a Álgebra como subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações.

Convém destacar que o PCNEM (1999, p. 252) faz a ressalva: *"... a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas"*. Nesse sentido, o documento enfatiza a importância de o aluno perceber que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Outro aspecto importante que é destacado no documento é a idéia de que, no Ensino Médio, os conhecimentos matemáticos adquiridos pelos alunos no Ensino Fundamental são utilizados e ampliados de forma a *"desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto às de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade"*. (p. 252)

Conforme essa visão do papel da Matemática, adquirir conhecimento matemático no Ensino Médio deve estar vinculado ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. De acordo com os PCNEM:

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (PCNEM 1999, p. 254)

Os PCNEM explicitam que os conteúdos da Matemática são instrumentos para o desenvolvimento de habilidades e competências. No caso dos Números e da Álgebra, o aprofundamento de seus conhecimentos *"estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção do real"*. (PCNEM 1999, p. 257)

No contexto da resolução de problemas, convém destacar que várias dificuldades da vida real recaem em situações que necessitam ou se beneficiam de conhecimentos sobre Teoria Elementar dos Números e, mais especificamente, sobre o objeto do saber "equações diofantinas lineares". Esses problemas, conforme indicado por Ferrari (1999), contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Além disso, são propícios para o desenvolvimento das habilidades citadas nos PCNEM. Por essas razões, é lamentável que não haja indicação de problemas deste tipo nesse documento.

Uma das críticas que, geralmente, são feitas aos PCNEM diz respeito à falta de clareza quanto aos conteúdos específicos das diferentes áreas do conhecimento. Por essa razão, a Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC/MEC) editou os PCN+, que trazem orientações educacionais complementares aos PCNEM. Nesse documento aparecem os conteúdos a serem trabalhados nesse nível de ensino. Assim, analisei os PCN+ esperando neles encontrar referência ao tema da Teoria Elementar dos Números e, mais especificamente, às "equações diofantinas lineares".

- **PCN+: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**

Na parte específica destinada à Matemática, os PCN+ (2002, p.111) destacam que, em nossa sociedade, *"o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento"*.

Sobre a importância da contextualização o documento traz:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (PCN+, 2002, p. 111)

Os autores do documento defendem ainda, que *"... o aluno seja competente em resolução de problemas, se não de todos, pelo menos daqueles que permitam desenvolver formas de pensar em Matemática".* Segundo esse documento, *"a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios."* (PCN+ 2002, p.111).

Vale destacar que esses desafios surgem também a partir de problemas da vida cotidiana e, portanto, contextualizados da vida real. Muitas vezes, esses problemas não têm origem apenas na Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, a Biologia, a Física, a Química, a Ciência da

Computação, entre outras. Dessa forma, é importante salientar os problemas que envolvem o uso e conhecimentos sobre equações diofantinas lineares expostos no capítulo anterior, na parte destinada à revisão bibliográfica. Como exemplo, pode-se citar o problema cujo assunto é o balanceamento da equação da água apresentado por Silva (2002). Trata-se de um problema simples proveniente da Química. Outro exemplo: os problemas de agrupamento, apresentados por La Roque e Pitombeira (1991) que podem ser trabalhados, segundo esses autores, com alunos do Ensino Básico. Todos esses problemas, conforme afirmou Ferrari (2002), são acessíveis à compreensão do estudante e não podem ser resolvidos por aplicação direta de algoritmos, mas requerem a interpretação de seus dados. Assim, esses problemas contribuem para a construção do raciocínio matemático, conforme orientam os PCN+. No entanto, os autores desse documento não fazem referência mais específica a tais problemas.

Os PCN+ são subdivididos em três áreas dentre as quais a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Nessa área foram eleitas três grandes competências como metas a serem alcançadas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do Ensino Fundamental para todos os brasileiros:

- Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos de diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

- Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

- Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

E no âmbito da Matemática, essas competências são indicadas, pelos PCN+, como temas estruturadores do ensino de Matemática. A proposta desse documento é que “*cada escola e grupo de professores proponham um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento das competências almejadas*”. (p. 119)

Os PCN+ estabelecem que um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural – e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos – pode ser sistematizado nos três seguintes eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma simultânea nas três séries do Ensino Médio: 1) Álgebra: números e funções; 2) Geometria e medidas; 3) Análise de dados.

Cada um desses temas apresenta organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Além disso, cada um deles foi dividido em unidades temáticas *"... que são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor e escola..."* (PCN+ 2002, p.120).

Analisando algumas das orientações apresentadas pelos PCN+ referentes ao tema "Álgebra: números e funções", em razão do foco desta pesquisa, observa-se que o documento destaca a importância da Álgebra na vivência cotidiana enquanto linguagem e instrumento de natureza financeira e prática, em geral. No Ensino Médio, segundo esse documento, esse tema *"... trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos"*, sendo objetos de estudo *"... os campos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais".* (p.120)

Como se pode perceber, a ênfase dada pelos autores dos PCN+ está toda nos números reais e, eventualmente, nos números complexos. No entanto, embora o conjunto dos números inteiros esteja contido no conjunto dos números reais, isto é, aparentemente estudando-se os números reais estar-se-ia estudando os números inteiros, esse último conjunto tem especificidades que facilitam a resolução de problemas que envolvem quantidades discretas como, por exemplo, os problemas da vida cotidiana. Como é o caso de situações que envolvem número de pessoas, número de notas, consultas médicas, autuações de trânsito, entre outras.

Com relação ao estudo de funções, os PCN+ destacam que o seu estudo "... *permite adquirir a linguagem algébrica como linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema...".*

Estabelecem como pré-requisito ao ensino desse tema *"... o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações...".* (p. 121)

Destacam ainda que *"... a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos de cotidiano..."* (p. 121).

Os PCN+ (2002, p.122) indicam o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Estes devem receber um tratamento que permita aos alunos estender seus conhecimentos sobre *"... a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares três por três, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento".*

Concluindo minhas considerações a respeito do objeto do saber "equações diofantinas lineares" nas propostas curriculares presentes nos PCNEM e PCN+, cumpre registrar que esse assunto não aparece como objeto de ensino nesses documentos. Seus autores parecem esquecer que muitos problemas da vida cotidiana são apresentados por meio de números inteiros, tornando evidente a pouca atenção dedicada para exploração das potencialidades da Teoria Elementar dos Números, descritas na revisão bibliográfica, no currículo do Ensino Médio.

Ainda que os PCNEM e PCN+ constituam orientações para a escolha dos temas a serem trabalhados em sala de aula, resolvi analisar os livros didáticos, pois, conforme indiquei anteriormente, temas não apresentados explicitamente nesses documentos oficiais podem estar incluídos nos livros didáticos por diferentes motivos, seja pelo interesse particular do(s) autor(es) da obra, seja pela sensibilização do(s) autor(es) por questões levantadas por pesquisas da área de Matemática ou de Educação Matemática.

Análise dos Livros Didáticos

Neste item apresento a análise de duas coleções de livros didáticos para o Ensino Médio. Essa análise foi feita com o objetivo de investigar se o objeto do saber “equações diofantinas lineares” tem estatuto de objeto de ensino, ou se não aparece, ou aparece de forma implícita nessas obras.

Minha intenção foi a de analisar ambos os exemplares de cada série do Ensino Médio: o livro didático dedicado ao aluno e aquele dedicado ao professor. Em ambas as coleções selecionadas, esses dois exemplares foram agregados em um único volume, isto é, o volume dedicado a cada série contém a reprodução do livro do aluno e o manual do professor. Dessa forma, foram analisados os três volumes de cada coleção, um para cada série, de 1ª a 3ª série do Ensino Médio.

Durante a fase que Bardin denominou de pré-análise, observei que as duas coleções selecionadas apresentam partes comuns e específicas tanto no livro destinado ao aluno quanto no manual dirigido ao professor. Isso sugeriu-me apresentar os resultados da investigação dessas coleções na seguinte seqüência:

- Descrição da coleção pelo levantamento das principais características dos volumes que a compõem;
- Descrição analítica da parte comum aos três volumes do manual do professor;
- Descrição analítica da parte comum aos três volumes do livro do aluno;
- Análise da parte específica de cada volume do manual do professor;
- Análise da parte específica de cada volume do livro do aluno.

Decidi analisar primeiro as partes comuns e específicas relativas ao manual do professor das duas coleções, porque verifiquei, a partir da leitura dos sumários de cada um dos volumes dessas coleções, que o objeto do saber “equações diofantinas lineares” não figurava entre os objetos de ensino explicitados neles. Isso me fez acreditar que pudesse haver alguma indicação ou referência a esse objeto do saber no manual do professor, pois é nessa parte do livro didático que os autores apresentam comentários e sugestões aos professores.

COLEÇÃO "MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES"

A coleção "Matemática: Ciência e Aplicações", doravante denominada apenas C1, tem como autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. É uma coleção da Atual Editora, e está em sua segunda edição (2004), sendo composta por três volumes.

Cada volume da coleção consta de duas partes: a primeira parte constituída pela reprodução do livro do aluno e a segunda pelo manual do professor.

Na primeira parte, relativa ao livro do aluno, os três volumes possuem a mesma estrutura, isto é, cada livro se inicia com uma *Apresentação*, seguida do *Sumário, Capítulos,* terminando com *Respostas dos exercícios e testes.*

A *Apresentação* do livro do aluno é a mesma para as três séries. O *Sumário* traz cada capítulo com o título do tema a ser tratado seguido dos itens nomeados de acordo com o objeto de ensino desenvolvido nele.

Cada capítulo temático, por sua vez, possui uma mesma estrutura com diferenças irrelevantes. O padrão de desenvolvimento de cada capítulo é o seguinte: introdução (existente na maioria deles), explanação dos conceitos e procedimentos, seguida de exemplos e finalizando com uma lista de exercícios. No final de cada capítulo, a coleção apresenta duas seções de problemas intituladas: *Teste de Vestibulares* e *Desafios,* seguidos quase sempre da seção "Matemática no Tempo" que relata fatos da História da Matemática.

Na parte final de cada volume encontram-se as *respostas dos exercícios e testes*.

A segunda parte é formada pelo manual do professor propriamente dito, este é dividido em quatro seções: as duas primeiras seções são iguais nos três volumes, as duas últimas são próprias de cada série do Ensino Médio.

A primeira seção trata da *Apresentação* e *Perfil dos Autores*. A segunda apresenta comentários gerais que incluem: *Conheça esta coleção*, *Objetivos gerais da obra*, *As bases legais do ensino médio brasileiro*, *Diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio*, *Diretrizes curriculares para o ensino médio na área de Matemática*, *Leituras recomendadas ao professor.*

A terceira seção, embora seja específica a cada uma das três séries, segue o mesmo padrão: *Apresentação*, *Objetivos específicos*, *Sugestões dos autores*, *Sugestões para atividades em grupo*, *Relação dos pontos de contextualização*, *conexão com outras áreas do conhecimento e conexão com outros tópicos de Matemática.*

A quarta seção é destinada à resolução de alguns *exercícios*, *testes e desafios* propostos em cada um dos volumes. Em seguida, é apresentada uma lista com *Significados das siglas indicadas nos exercícios.*

Descrição analítica da parte comum aos três volumes da coleção C1

- *Manual do Professor:*

A coleção C1 analisada está na segunda edição, sendo que a primeira foi editada em 2001. Comparando as duas edições observa-se que os volumes destinados ao aluno permaneceram iguais e que as inovações apareceram somente nos volumes destinados ao professor. Em 2001 o manual do professor vem separado do livro do aluno, enquanto na edição de 2004, conforme já descrito, o livro do professor consta de duas partes em um mesmo volume.

O manual do professor, na edição de 2001, limita-se a apresentar a resolução de alguns dos exercícios propostos no livro do aluno. Já na edição de 2004 a segunda parte do livro do professor inclui mais seções, como as citadas anteriormente, que certamente contribuem para um enriquecimento do trabalho do professor, em sala de aula.

Essa inovação pode estar relacionada aos critérios de avaliação dos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio do PNLEM, que consideram o manual dirigido ao professor como parte integrante do livro, sendo que este deve explicitar adequadamente os objetivos e pressupostos teórico-metodológico que nortearam a elaboração da obra.

No manual do professor, os autores definem os objetivos da coleção como sendo o de:

> ... proporcionar ao aluno conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática visando, por um lado, à preparação para o trabalho e exercício da cidadania e, por outro, à continuação de seus estudos em níveis superiores. (Manual do Professor, p. 7).

Nesse sentido, os autores indicam o livro didático como um recurso auxiliar da prática docente, destacando a necessidade de que *"os conceitos sejam apresentados com precisão, as propriedades sejam justificadas e aplicadas a exercícios e situações-problema, consolidando e aprofundando conhecimentos já adquiridos no ensino fundamental..."* (Manual do Professor, p. 7).

Segundo Iezzi *et al*, os principais temas desenvolvidos nos três volumes da coleção C1 são: Números, Funções, Geometria, Matemática Aplicada, Álgebra, Derivadas e Aplicações.

De acordo com o objetivo da minha investigação, observo o que os autores consideram em relação aos temas "Números" e "Álgebra", pois são nesses temas que pode haver referência ao objeto do saber "equações diofantinas lineares".

O tema "Números" aparece com ênfase nos volumes 1 e 3. Segundo esses autores, no primeiro volume é feita uma revisão dos conceitos já apresentados no Ensino Fundamental como, por exemplo, os números naturais, inteiros e racionais. Em seguida, são aprofundados os conhecimentos dos números irracionais e reais. No terceiro volume, os autores apresentam os números complexos e suas operações, nas formas algébrica e polar.

Com relação ao tema "Álgebra", Iezzi *et al* afirmam que ele é tratado nos três volumes, sendo que, no primeiro deles, esse tema está disseminado no estudo de funções, uma vez que equações e inequações "são parte integrante de funções". No volume 2, é realizado um estudo de matrizes, determinantes, sistemas lineares e binômio de Newton e no volume 3 são estudados os polinômios e as equações algébricas.

Nos temas apresentados pelos autores, pode-se observar que não há qualquer referência explícita, feita por eles, em relação ao objeto do saber "equações diofantinas lineares". No entanto, ao se referirem aos exercícios propostos na coleção, os autores afirmam que muitos deles "... *buscam a integração com outros conteúdos de Matemática, visando à retomada d conceitos importantes ou à visualização sob outro ponto de vista.*" (Manual do professor, p. 8).

Nesse trecho, os autores apresentam algumas das características encontradas nos problemas que se beneficiam dos conhecimentos sobre a resolução de equações diofantinas lineares. Dessa forma, parece haver indícios de que tais problemas são abordados na coleção C1.

Isso é reforçado em seguida, quando Iezzi *et al* se referem aos exercícios resolvidos, os quais são denominados de exemplos, declarando que "... *eles complementam a teoria, mostrando ao aluno algumas possibilidades de abordagem..."* e ressaltando a importância para que ele "*... perceba outras estratégias de solução, além da apresentada*". (Manual do professor, p.9).

Desse modo, para a resolução de alguns dos problemas propostos na coleção C1, os autores podem explicitar os conhecimentos sobre o objeto do saber "equações diofantinas lineares" como aqueles apresentados no quadro teórico.

- *Apresentação e Bibliografia:*

Na apresentação dos três volumes, no livro do aluno, os autores explicitam que a opção para o desenvolvimento teórico é:

> ... fazer uma introdução intuitiva dos assuntos, empregando nesses trechos um tom mais coloquial. Já para a apresentação dos conceitos reservamos uma linguagem precisa, rigorosa. Buscamos também mostrar as justificações das propriedades e teoremas, sempre que elas não se tornassem algo longo e nebuloso. (IEZZI *et al* 2004, p. 3).

Esses comentários revelam a intenção dos autores em dosar o uso da linguagem utilizada na coleção, usando a coloquial para introduzir os assuntos e a formal para os conceitos. Além disso, esse trecho apresenta uma afirmação duvidosa: *mostrar justificações das propriedades e teoremas, sempre que elas não se tornassem algo longo e nebuloso,* aparentemente os autores sugerem que devem-se *mostrar as justificações*, a menos que essas sejam *nebulosas.* Fica-se na dúvida sobre o estatuto que os autores conferem à demonstração nessa coleção. Se para esses autores a demonstração não desempenha papel importante no ensino de Matemática, dentre os argumentos apresentados para o desenvolvimento das equações diofantinas lineares no Ensino Médio, só resta a possibilidade de abordagem desse assunto para a resolução de problemas.

Iezzi *et al* (2004), ao se referirem as atividades, ou seja, aos exercícios, problemas e testes apresentados na coleção C1, afirmam que muitos deles são *"retirados de exames de vestibulares e das provas mais recentes do Enem."* (p. 3) Observa-se, por suas considerações, que esses autores são sensíveis ao que os exames vestibulares apresentam como tendência, revelando a influência que os vestibulares exercem nas escolhas de problemas a serem trabalhados pelos alunos.

Os autores afirmam, ainda, que estão sendo levadas em consideração as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e, por isso, na coleção C1 são apresentados *"muitos exemplos de aplicação Matemática às outras ciências e à realidade dos alunos."* (Iezzi 2004, p. 3). Isso confirma a expectativa que apresentei anteriormente de que tais documentos exercem influência na elaboração dos livros didáticos.

Embora os autores não deixem claro qual é o estatuto da demonstração na coleção C1, gerando dúvidas a respeito da consideração de aspectos da Teoria Elementar dos Números nessa coleção, as características dos problemas propostos em C1, segundo seus autores, indicam a possibilidade de encontrar, na resolução desses problemas, alguma referência ao objeto do saber "equações diofantinas lineares", mesmo que o seja de maneira implícita.

Vale destacar que Iezzi *et al* não indicam em nenhum momento a *Bibliografia* utilizada para a elaboração da coleção C1, o que dificulta saber em quais referências bibliográficas se apoiaram e, ainda, se houve influência de resultados de pesquisa e de quais pesquisas.

A seguir, passo à análise das partes específicas de cada um dos volumes que compõem a coleção C1.

Volume I da C1:

- *Parte específica do manual do professor*

Na apresentação do volume I, os autores explicitam os assuntos a serem desenvolvidos nesse livro, são eles: conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais); estudo das funções; logaritmos; seqüências numéricas, em particular as progressões aritméticas e geométricas; Matemática Financeira; semelhança de triângulos e trigonometria no triângulo retângulo.

Dentre os assuntos explicitados, focalizo as considerações dos autores a respeito dos conjuntos numéricos, do estudo das funções e das seqüências numéricas. Acredito que existe a possibilidade de encontrar referência ao objeto do saber “equações diofantinas lineares”, uma vez que são nesses assuntos que a Teoria Elementar dos Números está envolvida.

Iezzi *et al* dedicam apenas o primeiro capítulo para tratar dos conjuntos numéricos. Para o estudo das funções que constitui, segundo os autores, o principal eixo temático desse livro, são dedicados seis dentre os treze capítulos do volume I. Esses capítulos tratam das funções polinomiais de primeiro e segundo graus, da função modular e das funções exponenciais e logarítmicas. Os autores afirmam que, de modo geral, cada uma dessas funções é introduzida a partir de contextualizações, ou seja, situações que possuem relação com temas do cotidiano. Dessa forma, Iezzi *et al* destacam que a intenção de vários dos exercícios propostos foi a de colocar o aluno diante de situações-problema que envolvem aplicações das funções estudadas. Essas aplicações, segundo esses autores, podem incluir conexões com outras disciplinas (Química, Biologia, Demografia), com outros temas da Matemática ou ainda com situações do cotidiano. Em relação as seqüências numéricas, Iezzi *et al* afirmam que são estudadas as leis de formação, propriedades, termo geral, soma dos termos, entre outros.

Vale notar que os autores demonstram constante preocupação em abordar situações contextualizadas. Dessa forma, mesmo que esses autores não tenham feito referência explícita ao objeto do saber “equações diofantinas lineares” ao indicarem os temas abordados nesse livro, há ainda a esperança de que possam existir situações que utilizem ou se beneficiem dos conhecimentos sobre esse objeto do saber, uma vez que ele surge de muitos problemas do cotidiano.

- *Parte específica dedicada aos alunos*

No volume I, o **único problema** envolvendo uma equação diofantina linear está no primeiro capítulo denominado “Conjuntos Numéricos”, no qual há uma situação-problema tipicamente diofantina, exigindo soluções inteiras positivas:

37. O novo Código de Trânsito de um país adota o sistema de pontuação em carteira para motoristas; em caso de infringência às leis do trânsito, são atribuídos ao motorista 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima.

a) Se um motorista acumulou 37 pontos em sua carteira, quantas vezes foi autuado por infração gravíssima?

b) Entre todas as pontuações de 0 a 100 pontos, quantas delas não podem ocorrer? Quais são?

Página 20

Nas *Respostas dos exercícios e testes* (p. 400) é indicada somente a solução: a) 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4; b) Quatro: 1, 2, 3 e 6, sem nenhuma sugestão. No entanto, esse problema tem sua resolução apresentada no manual do professor. Isso significa que os autores consideram esse problema difícil como não sendo uma aplicação direta da teoria (p.3 da parte relativa ao Manual do Professor). A seguir apresento a transcrição das resoluções propostas e as considerações sobre elas:

37. Seja x, $x \in \mathbb{N}$ o número de autuações por infração gravíssima: P = 4a + 5b + 7x.

a) $p = 37 \Rightarrow 4a + 5b + 7x = 37 \Rightarrow 7x \leq 37 \Rightarrow x \leq \frac{37}{7} \cong 5{,}3 \Rightarrow x \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Entretanto, se x = 5 teríamos 4a + 5b = 2, o que nunca ocorre.

Nas demais hipóteses:

x = 0: a = 3 e b = 5, por exemplo, satisfazem.

x = 1: a = 0 e b = 6, por exemplo, satisfazem.

x = 2: a = 2 e b = 3, por exemplo, satisfazem.

x = 3: a = 4 e b = 0, por exemplo, satisfazem.

Manual do Professor - Página 32

A resolução do item "a" apresenta uma estratégia clara, compreensível, em que é construída a equação 4*a* + 5*b* + 7*x* = 37, com o *x* (letra que geralmente indica a incógnita, ou seja, o valor que se quer encontrar para a infração gravíssima) e letras *a* e *b* que aparecem como parâmetros para os valores que não são pedidos. Dessa forma, já se induz o leitor ao próximo passo: 7x ≤ 37, que é de estabelecer quais os possíveis valores a serem examinados, concluindo que os valores possíveis para *x* são 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Daí em diante, sugere-se a solução via tentativa e erro.

Embora a solução apresentada seja interessante e resolva o item "a", teria sido mais proveitoso para o professor que os autores sugerissem outras estratégias. Por exemplo, aquela em que ao invés de tentativa e erro, que nem sempre é mais econômica, é montar a equação 4a + 5b = 37 – 7x com as condições: a≥0, b≥0 e *x* ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5}. O que recai em equações diofantinas facilmente resolúveis. Perdeu-se assim a oportunidade de introduzirem-se comentários sobre a utilidade de conhecimentos sobre esse objeto do saber.

b) Das 101 pontuações, quatro (1, 2, 3 e 6) nunca ocorrem (item *a*) e, além da pontuação zero, outras 50 pontuações constituem múltiplos de 4, 5 ou 7. Das 46 restantes, não há pontuação que não seja soma de algumas possíveis. Exemplos:

9 = 4 + 5
11 = 4 + 7
13 = 8 + 5
17 = 10 + 7
18 = 7 + 11
19 = 12 + 7
⋮
97 = 60 + 37

Manual do Professor - Página 33

A solução proposta para o item “b” é hermética e sem justificativa para as afirmações. Por exemplo, como concluíram que “50 pontuações constituem múltiplos de 4, 5 ou 7”, a resolução mais parece uma mágica. Mais uma vez perdeu-se a oportunidade de propor a utilização dos conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares” para a resolução de $4x + 5y + 7z = a$ com as seguintes condições: $0 \leq a \leq 100$ e $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Considerações sobre o primeiro volume dedicado ao aluno

Nesse primeiro volume da coleção C1, encontrei apenas um problema que se beneficiaria de uma resolução via equações diofantinas lineares, no entanto não há referência a elas, mesmo no manual do professor. A única resolução proposta pelos autores privilegia o método por tentativa e erro, sem explicação sobre algumas das afirmações feitas.

Volume II da C1:

- *Parte específica do manual do professor*

Os autores utilizam a apresentação desse volume para explicitar os assuntos que são abordados nesse livro. Nos cinco primeiros capítulos, os autores tratam do tema “*Trigonometria*”. Os três capítulos subseqüentes são destinados ao estudo das

Matrizes, dos *Determinantes* e dos *Sistemas Lineares*. Na seqüência são apresentados os estudos de *Áreas de figuras planas*, *Geometria Espacial de Posição*, *Análise combinatória*, *Probabilidade*, *Binômio de Newton*, *Poliedros* e *Geometria Métrica Espacial*.

Dentre os assuntos abordados no segundo volume, resolvi destacar as considerações dos autores sobre os assuntos relativos ao tema “Álgebra”, são eles: *Matrizes*, *Determinantes* e *Sistemas Lineares.*

No primeiro deles, os autores afirmam que o estudo das matrizes é apresentado por meio de exemplos contextualizados, sempre que possível. É dada ênfase à multiplicação entre matrizes. Segundo os autores, o cálculo das matrizes inversas é feito por meio dos produtos iguais à matriz identidade.

De acordo com Iezzi *et al*, o estudo dos determinantes se concentra sobre os de ordem 2 e 3. Para os determinantes com ordem maior ou igual a 3, os autores afirmam que são apresentados alguns recursos para “abaixamento” de sua ordem.

No capítulo dedicado aos sistemas lineares, os autores afirmam que esse assunto é apresentado de maneira o mais próximo possível da realidade e, por isso, são utilizados alguns exemplos e exercícios contextualizados. Segundo Iezzi *et al*, o escalonamento dos sistemas é apresentado como forma mais importante da resolução de um sistema.

Convém ressaltar que novamente os autores destacam a contextualização dos exemplos e exercícios propostos no volume II. Acredito que essa contextualização pode promover conexões com outros tópicos de Matemática ou com outras áreas do conhecimento, como a Física, Química, entre outras. Além disso, também podem promover o emprego de estratégias de resolução que seriam facilitadas pelo conhecimento do objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

- *Parte específica dedicada aos alunos*

Nesse volume, os autores dedicam os cinco primeiros capítulos ao estudo de Trigonometria, o capítulo seis trata de matrizes e o sétimo do estudo de determinantes. Após analisar todos os exemplos, problemas e exercícios propostos nesses capítulos, não encontrei situação que envolvesse o uso e/ou conhecimentos sobre o objeto do saber "equações diofantinas lineares". Dessa forma, direcionei minha investigação para o capítulo oito que é dedicado ao estudo de sistemas lineares.

Neste capítulo, os autores fazem, no primeiro item, uma introdução ao assunto tratado, por meio de uma situação contextualizada, que é descrita por um sistema linear envolvendo três equações e três incógnitas. No item seguinte, denominado "Equação Linear", é apresentada a definição para esse tipo de equação.

Em seguida, os autores tratam da solução para uma equação linear, considerando que a "seqüência ordenada de números reais (α_1, α_2,..., α_n) é solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ quando a expressão $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira." (p. 199).

A partir disso, pode-se observar que a determinação da solução de uma equação linear se resume em verificar se a substituição de uma dada seqüência ordenada de números, nas incógnitas da equação, resulte em uma igualdade verdadeira. Os exemplos a seguir foram apresentados pelos autores e ilustram essa situação:

- O par ordenado (5, 2) é solução da equação 2x – 3y = 4, pois substituindo x por 5 e y por 2 obtemos:

$$2 . 5 - 3 . 2 = 10 - 6 = 4$$

- A tripla ordenada (2, 1, – 3) é solução da equação 2x – y + z = 0, pois 2 . 2 – 1 + (– 3) = 0. Já a tripla (3, 2, 0) *não* é solução dessa equação, pois 2 . 3 – 2 + 0 = 4 $\neq$ 0.

Para encontrarmos outra solução de 2x – y + z = 0, basta escolher, arbitrariamente, valores para x e y e o valor de z fica determinado. Por exemplo, se x = 1 e y = 1 temos: 2 . 1 – 1 + z = 0 → z = – 1. Obtemos, assim, a solução (1, 1, – 1).

Página 199

Nesse sentido, a maioria dos exercícios propostos nessa seção são reproduções fiéis dos exemplos tratados e exigem apenas que se verifique se os pares (ou triplas) ordenados fornecidos constituem uma solução de uma dada equação. Para mostrar essa situação, apresento como exemplo dois desses exercícios:

1. Verifique se $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ é solução da equação $-x_1 + 2x_2 = 1$.

2. Dada a equação linear $2x - 3y = 6$, verifique se os pares abaixo são soluções:

   a) (0, –2) b) (0, 0) c) $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$

Página 199

Em Matemática, é importante essa experimentação. Porém, ao estudarmos problemas que apresentam mais de uma solução, é interessante discutir o alcance dessa estratégia. O último problema proposto nessa seção é um exemplo dessa situação:

8. Dois irmãos, João e José, pescaram em uma manhã *x* e *y* peixes, respectivamente. Sabendo que $3x + 4y = 61$, determine as possíveis quantidades de peixes que eles conseguiram juntos.

Página 200

Esse problema apresenta solução tanto na parte de *Respostas dos exercícios e testes* quanto no manual do professor. Na primeira, a resposta apresentada na página 526, não acompanha sugestões, sendo indicada apenas como: 8) 20, 19, 18, 17 ou 16.

Na resolução proposta pelos autores, a incógnita **x** da equação **3x + 4y = 61**, foi escrita em função de **y**. Como **x** e **y** são valores inteiros e positivos, pois representam número de peixes, foi imposto que o numerador 61 – 4y, deve ser múltiplo de 3 e positivo, conforme observa-se a seguir:

> 8. De $3x+4y=61$ vem $x=\dfrac{61-4y}{3}$, em que x e y são naturais, pois representam o número de peixes "capturados" por cada irmão.
>
> Para que x resulte natural, o numerador $61-4y$ deve ser múltiplo de 3 e, além disso, positivo, isto é $61-4y>0 \Rightarrow y<\dfrac{61}{4}=15{,}25$, $y \in \mathrm{N}$
>
> Verificando:
>
> $y=15 \Rightarrow x \notin \mathrm{N}$; $y=14 \Rightarrow x \notin \mathrm{N}$; $y=13 \Rightarrow x=3$ (16 peixes ao todo). Note, agora, que as possibilidades seguintes são obtidas para:
>
> y = 10 $\Rightarrow$ x = 7 $\Rightarrow$ 17 peixes ao todo;
>
> y = 7 $\Rightarrow$ x = 11 $\Rightarrow$ 18 peixes ao todo;
>
> y = 4 $\Rightarrow$ x = 15 $\Rightarrow$ 19 peixes ao todo.
>
> y = 1 $\Rightarrow$ x = 19 $\Rightarrow$ 20 peixes ao todo.

Manual do Professor – Página 73

Desse modo, o leitor é levado ao passo seguinte: 61 – 4y > 0, que é de estabelecer quais os possíveis valores para **y** a serem examinados, concluindo que os valores para **y** são 13, 10, 7, 4, 1 e que os valores para **x** são 3, 7, 11, 15 e 19. E, finalmente, responder qual a quantidade total de peixes pescados pelos dois irmãos.

Novamente os autores apresentaram uma resolução clara e interessante que resolveu o problema proposto. No entanto, vale destacar que a estratégia de se verificar possíveis valores inteiros para **x** e **y** na equação do problema que resultem em uma sentença verdadeira, conforme os exemplos e exercícios apresentados anteriormente, possivelmente, não seria a mais indicada, pois a visualização de uma de suas soluções não é imediata e, ainda, não é possível afirmar quantas são elas, mesmo que o enunciado indique existir mais de uma solução.

Portanto, sabendo que a equação que descreve o problema é diofantina linear, pois apresenta coeficientes inteiros e exige que as soluções desejadas também sejam números inteiros (positivos), pois trata-se de quantidades de peixes, os autores poderiam apresentar comentários sobre esse tipo de equação, além de indicar o uso de conhecimentos sobre esse objeto do saber para resolver o problema proposto.

As demais seções do capítulo analisado são dedicadas ao estudo de sistemas lineares. Nelas, os autores apresentam a solução, classificação, resolução e discussão de sistemas lineares de até três equações e três incógnitas.

Dentre os 73 exercícios propostos nessas seções, quatro deles são problemas que, devido às suas condições, exigem que as suas soluções sejam inteiras e positivas, são eles:

26. Em um estacionamento há motos e carros, num total de 79 veículos e 248 rodas. Qual é o número de motos no estacionamento? E o número de carros?

Página 212

27. Numa danceteria, o convite para homens custava R$ 15,00 e para mulheres, R$ 10,00. Sabendo que o número de mulheres que foram à danceteria excede de 5 o número de homens e que, ao todo, foram arrecadados R$ 550,00, pergunta-se: qual é o número de homens que foram dançar lá?

Página 212

28. (UE-RJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras por apenas 2, num total de 38 fregueses. Qual o número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas?

Página 212

29. Rapazes e moças dançavam animadamente em uma festa. Com a saída de 8 rapazes, percebeu-se que as moças estavam para os rapazes numa proporção de 3 para 2. Mais tarde, porém, 10 moças deixaram a festa e a proporção passou a ser de 5 moças para 4 rapazes. Quantos rapazes e moças havia na festa?

Página 212

As respostas desses problemas, na parte *Respostas dos exercícios e testes* na página 527, não acompanham sugestões e são indicadas simplesmente da seguinte forma: 26) 34 motos e 45 carros; 27) 20; 28) 5 e 29) 48 rapazes e 60 moças.

No manual do professor, encontram-se apenas as resoluções dos problemas 28 e 29 que são apresentadas a seguir:

> 28. Vamos denotar por *a* o número de mesas ocupadas por 2 pessoas; e por *b* o número de mesas ocupadas por 4 pessoas.
>
> Do enunciado, segue o sistema $\begin{cases} a+b=12 \\ 2a+4b=38 \end{cases}$, que resolvido, fornece *a* = 5 e *b* = 7

Manual do Professor – Página 74

Os autores apresentam uma resolução simples e de fácil compreensão para o problema proposto. No entanto, a maior dificuldade que o aluno poderia encontrar para resolver esse problema seria o seu equacionamento, ou seja, expressar matematicamente a situação escrita na linguagem natural. É interessante destacar também que, devido ao contexto do problema, sua solução exige que os valores sejam inteiros e positivos, no entanto os autores não chamam a atenção para o fato.

29. Vamos indicar o número de rapazes por *r* e o número de moças por *m*.

1º) Após a saída de 8 rapazes, havia na festa *r* – 8 rapazes e *m* moças.

Daí: $\frac{m}{r-8} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2m = 3r - 24 \Rightarrow 3r - 2m = 24$ (I)

2º) Depois disso, 10 moças saíram da festa, e então havia *r* – 8 rapazes e *m* – 10 moças; e assim:

$\frac{m-10}{r-8} = \frac{5}{4} \Rightarrow 5r - 4m = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), encontramos *r* = 48 e *m* = 60.

Manual do Professor – Página 74

Embora a resolução apresentada pelos autores seja interessante e resolva o problema proposto, novamente não indicam que sua solução se restringe a valores inteiros e positivos devido às condições do problema que envolve apenas quantidades discretas. Dessa forma, seria uma oportunidade para fazer referência ao objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

Para encerrar o capítulo, os autores propõem vários problemas na seção *Testes de Vestibulares,* nos quais destaco a seguir cinco deles, que são do mesmo tipo dos descritos anteriormente.

1. (UFF-RJ) Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso receberia R$ 10,00 do clube e cada vez que ele errasse, pagaria R$ 5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, ele recebeu R$ 50,00. Pode-se afirmar que o número de arremessos convertidos pelo jogador nesta partida foi:

a) 0 c) 10 e) 20
b) 5 d) 15

Página 228

3. (UF-SE) Dois grupos de turistas, um de argentinos e outro de paulistas, fizeram passeios de trem turístico, ao preço de R$ 12,00 cada pessoa, e de catamarã, ao preço de R$ 10,00 cada pessoa. No sábado, os argentinos passearam de trem e os paulistas de catamarã, gastando um total de R$ 156,00. No domingo, os argentinos passearam de catamarã e os paulistas de trem, com gasto total de R$ 152,00. Nessas condições, o número de pessoas do grupo de turistas

a) argentinos era 9. c) argentinos era 7. e) paulistas era 5.
b) argentinos era 8. d) paulistas era 7.

Página 228

9. (Vunesp-SP) Um orfanato recebeu uma certa quantidade x de brinquedos para ser distribuída entre as crianças. Se cada criança receber três brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuídos; mas para que cada criança possa receber cinco brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. O número de crianças do orfanato e a quantidade x de brinquedos que o orfanato recebeu são, respectivamente:

a) 50 e 290 c) 55 e 220 e) 65 e 265
b) 55 e 235 d) 60 e 250

Página 229

16. (UF-MG) Num cinema, ingressos são vendidos a R$ 10,00 para adultos e a R$ 5,00 para crianças. Num domingo, na sessão da tarde, o número de ingressos vendidos para crianças foi o dobro do número vendido para crianças na sessão da noite. A renda da sessão da tarde foi R$ 300,00 a menos que a da noite e, em ambas as sessões, foi vendido o mesmo número de ingressos. Nesse domingo, o número de ingressos vendidos para crianças, na sessão da noite, foi:

a) 50 c) 60
b) 55 d) 65

Página 230

17. (Fuvest-SP) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

a) 3 c) 5 e) 7

b) 4 d) 6

Página 230

Embora haja respostas a todos esses problemas na parte de *Respostas dos exercícios e testes*, elas não acompanham comentários que poderiam auxiliar o aluno na resolução dos problemas propostos.

O manual do professor traz as resoluções de dois desses problemas, que são descritas a seguir:

16.

	Tarde	Noite
Crianças	x	y
Adultos	z	w

Temos:

1º) $x = 2y$

2º) $\underbrace{5x + 10z}_{\text{renda da tarde}} = \underbrace{5y + 10w}_{\text{renda da noite}} - 300$

3º) $x + z = y + w$

Devemos encontrar o valor de y.

Substituindo (1) em (2) vem: $10y + 10z = 5y + 10w - 300 \Leftrightarrow 5y = 10w - 10z - 300$ $\Leftrightarrow y = 2w - 2z - 60$ (4)

Substituindo (1) em (3) vem: $2y + z = y + w \Rightarrow y = w - z$ (5).

Finalmente, substituindo (5) em (4): $y = \underbrace{2w - 2z}_{\Downarrow} - 60$

$$y = 2y - 60 \Rightarrow y = 60$$

Resposta: *c*.

Manual do Professor – Página 80

Os autores consideram esse problema como sendo aquele que exige mais do que aplicação direta da teoria e, por isso, sua resolução é apresentada no manual do professor.

Para a resolução desse problema, é necessária a interpretação de seu enunciado, convertendo-o para a linguagem matemática. Observa-se que este problema é semelhante aos outros abordados nessa seção, ou seja, tal problema também é descrito por um sistema linear envolvendo o mesmo número de equações e incógnitas, cuja resolução se dá por escalonamento ou utilização da regra de Cramer.

O mesmo ocorre com a resolução apresentada pelos autores para o problema a seguir:

17. Sejam x o número de filhos e y o número de filhas.

Certo filho tem $x - 1$ irmãos e y irmãs: $x - 1 = y$.

Certa filha tem x irmãos e $y - 1$ irmãs: $x = 2(y - 1)$.

Do sistema, conclui-se que $x = 4$ e $y = 3$; $x + y = 7$.

Resposta: e.

Manual do Professor – Página 80

Os autores mostram uma solução clara e objetiva que resolve o problema proposto. No entanto, fica uma questão: Todos os problemas que envolvem sistemas lineares apresentam o mesmo número de equações e incógnitas?

Considerações sobre o segundo volume destinado ao aluno

A resolução de cada um desses problemas recai em equações lineares ou sistemas lineares que, devido ao contexto que os envolvem, exigem que as resoluções de suas equações sejam números inteiros e positivos, pois envolvem número de motos, de carros, de ingressos, de mesas e quantidades de pessoas. Porém os autores não apresentaram comentários ou indicações para esse tipo de equação.

É interessante notar que todos os sistemas apresentados têm o mesmo número de equações e de incógnitas e utilizam os métodos de escalonamento e regra de Cramer para suas resoluções.

Não foram observados problemas que envolvessem sistemas lineares com uma quantidade de equações menor do que a de incógnitas. Em alguns casos, problemas com essas características são expressos por sistemas lineares equivalentes a equações diofantinas lineares.

Volume III da C1:

- *Parte específica do manual do professor*

Na apresentação do volume III, os autores explicitam os temas a serem desenvolvidos nesse livro. O estudo é iniciado a partir do tema "Estatística". Em seguida, observa-se uma característica comum presente nessa coleção que é a de concentrar os temas em grandes blocos, muitas vezes localizados em um único volume. Como é o caso do estudo do tema "Geometria Analítica", ao qual os autores dedicam quatro capítulos para o seu estudo. O tema "Números" é retomado com a apresentação do estudo dos números complexos.

Em seguida, Iezzi *et al* apresentam o estudo das funções polinomiais, cuja ênfase se dá na divisão de polinômios. Os autores destacam que é importante retomar o algoritmo da divisão de números inteiros e compará-los com a divisão de polinômios. Dessa forma vale a pena verificar o que de Teoria Elementar dos Números é apresentado nesse capítulo.

De acordo com os autores, o estudo das equações polinomiais encerra a parte de Álgebra da coleção. Para o seu estudo, os autores destacam a fatoração de um polinômio em função de suas raízes, as relações entre coeficientes e raízes, além de usar tópicos importantes de números complexos e divisão de polinômios.

Iezzi *et al* afirmam que esses três capítulos têm poucas aplicações e conexões com o cotidiano e, dessa forma, servem de base para o aluno que optar por seguir carreiras de "exatas".

Finalizando o volume III, os autores fazem uma introdução ao estudo das derivadas.

Analisando os temas tratados nesse volume, é possível considerar a hipótese de que não existem situações que envolvam ou se beneficiem do uso dos conhecimentos sobre o objeto do saber "equações diofantinas lineares". Essa hipótese é fundamentada pelas afirmações dos autores em relação a poucas aplicações e conexões com a realidade que os temas relativos à Álgebra apresentam. A seguir, passo à análise da parte específica dedicada ao aluno no volume III, para validar ou refutar essa hipótese.

- *Parte específica dedicada aos alunos*

Analisando todos os capítulos do volume III, observa-se que realmente são poucos os problemas contextualizados. Nenhum dos problemas propostos nas seções *exercícios* ou *Testes de vestibulares* pertencentes aos capítulos que tratam dos temas relativos à Álgebra apresentam contextualização. Dessa forma, a hipótese de que nesse volume não são abordados problemas que necessitem do conhecimento sobre a resolução de equações diofantinas lineares foi confirmada.

COLEÇÃO "MATEMÁTICA"

A coleção "Matemática" denominada simplesmente C2, possui um único autor, Luiz Roberto Dante, da Editora Ática, e está em sua primeira edição (2005). Essa coleção é composta por três volumes, um para cada série do Ensino Médio.

Cada volume da coleção é dividido em duas partes: uma reprodução do livro do aluno e um manual do professor.

Na primeira parte, referente ao livro do aluno, nos três volumes da coleção C2, há uma mesma estrutura, ou seja, cada livro inicia-se com uma *Apresentação*, seguida de *Sumário*, *Capítulos*, *Questões do Exame Nacional do Ensino Médio* (ENEM); *Respostas*; *Significados das siglas* e finalizado com a *Bibliografia*.

A *Apresentação* do livro destinado ao aluno é a mesma para os três volumes. O *Sumário* exibe cada capítulo temático que, por sua vez, se divide em itens que correspondem aos objetos de ensino desenvolvido nesse capítulo.

Cada capítulo temático é iniciado, geralmente, com uma introdução. Em seguida, é apresentada a explanação dos conceitos e dos procedimentos, seguidos de *Exercícios Propostos* e, muitas vezes, de *Exercícios Resolvidos*. Há ainda, ao longo da coleção, as seções: *Para Refletir*, com alguns questionamentos e complementos relativos ao tópico de estudo; *Leitura*, que apresenta aspectos do tema discutido e fatos históricos; *Curiosidade*; *Desafio em dupla*; *Desafio em equipe*; *Atividade em dupla* e *Atividade em equipe*.

Cada volume encerra-se com uma seção com *Questões do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio*, seguida das *Respostas* dos exercícios propostos em cada livro e das questões do ENEM, além dos *Significados das siglas* empregadas na coleção e da *Bibliografia* com as referências das obras utilizadas na elaboração da coleção C2.

A segunda parte é destinada ao manual do professor e apresenta duas seções. A primeira é geral, comum a todos os livros da coleção, e inclui os seguintes itens: *Conversa com o (a) professor (a); Apresentação*; *Características da coleção*;

Algumas idéias para a utilização da coleção; Pressupostos teórico-metodológicos para o ensino de Matemática segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio; *Recursos didáticos auxiliares*; *Resolução de problemas*; *Etnomatemática e modelagem*; *Temas transversais; Avaliação em Matemática*; *Informações úteis ao professor para a sua formação*; *Referências bibliográficas para o professor*.

A segunda seção é específica para cada volume da coleção e apresenta a descrição do livro do aluno, além de observações sobre os conteúdos abordados e resolução dos exercícios propostos.

Parte comum aos três volumes da coleção C2

- *Manual do Professor:*

No item que trata da apresentação da coleção, o autor explica que a obra procura trazer uma nova proposta pedagógica de ensino da Matemática para o Ensino Médio. Nesse sentido, o autor destaca que a coleção C2:

> [...] contempla um amplo leque de conteúdos nos campos da aritmética, da álgebra, da geometria, das grandezas e medidas, da estatística, da combinatória e das probabilidades – integrados entre si e, sempre que possível, com as demais áreas do conhecimento. Esses temas são trabalhados sempre a partir de situações-problema contextualizadas ou interdisciplinares. (Manual do professor, p. 3).

Nesse trecho, revela-se a importância dada pelo autor para a integração entre os campos da Matemática e, também, entre as outras áreas do conhecimento. Além disso, convém destacar a afirmação do autor de que os temas abordados na obra são *sempre trabalhados a partir de situações-problema contextualizadas ou interdisciplinares*. Isso indica a possibilidade de encontrar na coleção C2, situações-problema que, ao serem resolvidas, envolvam os conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

No item seguinte, Dante apresenta as características da coleção C2 destacando que foram incorporados “*... muitos dos recentes avanços dos estudos e das pesquisas em Educação Matemática*”. É destacado também que os conceitos, em geral,

> [...] são desencadeados a partir de um problema, como é recomendado hoje pelos educadores matemáticos que trabalham com resolução de problemas; a modelagem matemática é feita pela procura de modelos matemáticos a partir de problemas reais [...] (Manual do professor, p. 4).

O autor esclarece que os exemplos e exercícios resolvidos têm a finalidade de mostrar as várias formas de resolução de uma determinada questão ou problema. Em relação aos exercícios propostos, Dante enfatiza que em C2 há uma grande variedade e quantidade de exercícios e problemas para o aluno consolidar os seus conhecimentos.

Dentre as orientações metodológicas apresentadas pelo autor destaca-se a importância para que a Matemática seja trabalhada por meio de situações-problema próprias da vivência do aluno e que o façam realmente pensar, analisar, julgar e decidir-se pela melhor solução; além de enfatizar igualmente os grandes eixos temáticos – números, funções, Álgebra, grandezas e medidas, Geometria, contagem, Estatística e probabilidade – e, de preferência, trabalhá-los integralmente.

Observa-se que o autor mostra um cuidado na contextualização dos problemas propostos, indicando que estes são apresentados por meio de situações-problema. Dessa forma, é provável que existam situações que possam ter suas resoluções facilitadas pelo uso de conhecimentos do objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

- *Apresentação e Bibliografia:*

Na *Apresentação*, Dante afirma que o objetivo da coleção é: *“... fazer com que o aluno compreenda as idéias básicas da Matemática desse nível de ensino e, quando necessário, saiba aplicá-las na resolução de problemas do mundo real*”. (p. 3)

Para isso, sua intenção é explorar todos os conceitos matemáticos básicos do Ensino Médio de maneira intuitiva e compreensível, evitando as receitas prontas e o formalismo excessivo. Porém, no parágrafo seguinte, o autor mostra-se incoerente em relação ao anterior quando destaca que “*antes de resolver os exercícios propostos, é absolutamente necessário que o aluno estude a teoria e refaça os* *exercícios resolvidos*" (p. 3). Aqui parece estar implícita uma proposta pedagógica baseada na memorização de conteúdos e na manipulação mecânica de procedimentos, na qual o aluno resolve exercícios próximos de modelos apresentados anteriormente.

O autor indica a seguinte *Bibliografia* utilizada na elaboração da coleção C2:

1. ÁVILA, G. Cálculo 1; funções de uma variável. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1982.
2. BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgar Blücher/Edusp, 1974.
3. COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro, SBM, 1996. 14 v.
4. DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 12. ed. São Paulo, Ática, 1997.
5. DAVIS, P. J. & HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1989.
6. LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro, SBM, 1997 (Coleção do Professor de Matemática, v. 1 e 2).
7. MORETTIN, P. A. & BUSSAB, W. O. *Estatística básica*. São Paulo, Atual, 1981.
8. POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Interciência, 1986.
9. ________. *Mathematical discovery*. New York, John Wiley & Sons, 1981. 2 v.
10. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo, SBM, 1982/1998. v. 1 a 36.

Das dez obras elencadas nessa bibliografia, verifica-se que quatro são de livro didático, das quais três são de especialistas em Matemática. Embora o autor tenha indicado que a coleção C2 incorporou muitos dos recentes avanços dos estudos e das pesquisas em Educação Matemática, parece haver indícios de que é privilegiada a visão do ensino de Matemática, segundo os especialistas e, também, via resolução de problemas, uma vez que são citadas duas obras desta área.

Volume I da C2:

- *Parte específica do manual do professor*

Nessa seção, o autor descreve brevemente o livro destinado ao aluno da 1ª série do Ensino Médio. Em seguida, são apresentados os dez capítulos temáticos que compõem esse volume, são eles: Conjuntos, Conjuntos numéricos, Funções, Função afim, Função quadrática, Função modular, Geometria plana, Progressões, Matemática Financeira e Trigonometria no triângulo retângulo.

Na seqüência, Dante faz observações sucintas a respeito desses assuntos. Dado o objetivo desta pesquisa, ative-me às observações do autor sobre os Conjuntos numéricos e as Progressões, pois estes são assuntos onde a Teoria Elementar dos Números está envolvida.

O autor destaca os números e o espaço como sendo os objetos mais estudados em Matemática. Defende que a ampliação dos conjuntos numéricos (dos naturais aos complexos) deve considerar problemas que envolvem medições, estimativas, arredondamentos, porcentagens, notação científica, entre outros. Dante destaca ainda que as progressões aritméticas constituem a ferramenta matemática para estudar as grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais, enquanto as progressões geométricas são um instrumento matemático criado para descrever grandezas que variam com taxa de crescimento constante.

Vale notar que o autor não faz referência aos exercícios propostos no volume II. Dessa forma, há a esperança de que existam situações que se beneficiem dos conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”, mesmo que este não tenha sido explicitado nas observações de Dante sobre os conteúdos desenvolvidos nesse livro.

- *Parte específica dedicada aos alunos*

No volume I, **há apenas um problema,** localizado no segundo capítulo intitulado “Conjuntos Numéricos”, que poderia ser resolvido utilizando os conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”:

44. No jogo de basquete, as cestas podem valer 3 pontos, 2 pontos ou 1 ponto (lance livre). Encontre todas as maneiras de um time fazer 15 pontos. (Sugestão: faça uma tabela organizada).

Página 35

A solução desse problema é apresentada na página 304, simplesmente como: 27 maneiras. Somente no manual do professor há uma solução mais detalhada para o problema proposto, descrita a seguir:

44.

3 pontos	2 pontos	1 ponto
5	-	-
4	1	1
4	-	3
3	3	-
3	2	2
3	1	4
3	-	6
2	4	1
2	3	3
2	2	5
2	1	7
2	-	9
1	6	-
1	5	2
1	4	4
1	3	6
1	2	8
1	1	10
1	-	12
-	7	1
-	6	3
-	5	5
-	4	7
-	3	9
-	2	11
-	1	13
-	-	15

.

27 maneiras.

Manual do professor – Página 50

A resolução desse problema segue a sugestão apresentada no enunciado, ou seja, de construir uma tabela com as possibilidades possíveis de cestas cujo total seja 15. Contudo, não são apresentadas justificativas para a obtenção dos valores expressos na tabela, o que parece indicar que a estratégia utilizada foi a de tentativa e erro.

Ainda que a solução apresentada seja interessante e resolva o problema, o autor poderia sugerir para o professor outros modos para resolução desse problema. Uma possibilidade seria o de construir a equação $3x + 2y + z = 15$, onde x, y e z indicam o número de cestas. Dessa equação tem-se que $3x \leq 15$, $2y \leq 15$ ou $z \leq 15$. Considerando, por exemplo, que $3x \leq 15$, obtém-se os possíveis valores para x que são 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Dessa forma, o problema é descrito pela equação $2y + z = 15 - 3x$ com as seguintes condições: $y \geq 0$, $z \geq 0$ e $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. O que recai em equações diofantinas lineares facilmente resolúveis.

Esse é um problema que poderia gerar comentários a respeito da utilidade de conhecimentos sobre esse objeto do saber.

Considerações sobre o primeiro volume dedicado ao aluno

Nesse primeiro volume, encontrei apenas um problema que poderia ser resolvido utilizando os conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”. Entretanto, não foi feita qualquer referência a esse objeto. O autor apresenta apenas uma única estratégia de resolução, baseada no método de tentativa e erro.

Volume II da C2:

- *Parte específica do manual do professor*

Inicialmente, o autor apresenta uma breve descrição do volume II destinado ao aluno. Na seqüência, são explicitados os treze capítulos com os títulos dos temas que correspondem aos objetos de ensino a serem desenvolvidos nesse livro.

Os treze capítulos são: Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer; Conceitos trigonométricos básicos; Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica; As funções trigonométricas; Relações, equações e inequações trigonométricas; Transformações trigonométricas; Função exponencial; Logaritmo e função logarítmica; Geometria espacial – Uma introdução intuitiva; Áreas: medidas de superfícies; Estudo das matrizes; Determinantes; Sistemas Lineares.

O autor faz algumas observações sobre os conteúdos desenvolvidos nesse volume. Levando em conta o objetivo de minha investigação, destaco as observações de Dante relativas aos assuntos de Álgebra: estudo das matrizes, determinantes e sistemas lineares. Creio que na explanação desses assuntos ou nas seções destinadas aos exercícios propostos possa existir alguma referência ao objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

Dante ressalta que as matrizes e os determinantes são ferramentas úteis na discussão e na resolução de sistemas lineares. Sendo estes modelos matemáticos adequados para estudar diversos conteúdos de outras disciplinas, como, por exemplo, o balanceamento de reações químicas e o estudo dos circuitos elétricos.

Convém destacar que, ao se referir ao balanceamento de reações químicas, estudado em Química, o autor parece indicar que problemas envolvendo conhecimentos sobre a resolução de equações diofantinas lineares, como os apresentados por Silva (2002), estão presentes no livro da 2ª série.

- *Parte específica dedicada aos alunos*

Nesse volume, os seis capítulos iniciais tratam da Trigonometria. Na seqüência, são estudados: função exponencial; logaritmo e função logarítmica; geometria espacial. A análise de todos os problemas, exemplos, exercícios propostos e resolvidos explicitados nesses capítulos evidenciou a ausência de situações que envolvessem ou se beneficiassem dos conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”. Desse modo, minha investigação foi direcionada para os três últimos capítulos, que tratam de assuntos relativos à Álgebra.

Desses capítulos, somente o dedicado ao estudo de sistemas lineares apresenta situações que são descritas por equações desse tipo. A primeira delas surge em um dos problemas utilizados para introduzir o capítulo em questão:

1º) Em uma partida de basquete, dois jogadores marcaram juntos 42 pontos. Quantos pontos marcou cada um?

Resolução:

Sendo **x** e **y**, respectivamente, o número de pontos que cada jogador marcou, temos uma equação com duas incógnitas: $x + y = 42$

Nessa equação:

- Se $x = 21$, então $21 + y = 42 \Rightarrow y = 21$.
  Logo, $x = 21$ e $y = 21$ constituem uma solução da equação, que indicamos por (21, 21);
- Se $x = 30$, então $30 + y = 42 \Rightarrow y = 12$.
  Logo, $x = 30$ e $y = 12$ constituem outra solução da equação, que indicamos por (30, 12);
- Se $x = 16$, então $16 + y = 42 \Rightarrow y = 26$.
  Logo, $x = 16$ e $y = 26$ constituem uma outra solução da equação, que indicamos por (16, 26).

Na verdade, essa equação admite *várias soluções:* x pode assumir um valor qualquer natural de 0 a 42, e y será igual à diferença entre 42 e o valor atribuído a x. Verificamos assim que os dados do problema não são suficientes para determinar o número de pontos marcados por cada jogador.

Página 249

O autor apresenta uma resolução de fácil compreensão, na qual é construída a equação $x + y = 42$. Alguns dos valores de x e de y são obtidos atribuindo valores inteiros positivos para x e calculando os respectivos valores para y. No final, conclui-se que a solução geral é dada por $y = 42 – x$, onde x é um número natural tal que $0 \leq x \leq 42$.

Vale salientar que a equação que descreve o problema é diofantina linear, pois apresenta coeficientes inteiros e suas soluções estão restritas ao conjunto dos números inteiros. No entanto, não há qualquer referência a esse objeto do saber.

Na página 250, o autor trata do estudo das equações lineares. Assim como os autores da coleção C1, Dante apresenta a definição e a solução para esse tipo de equação. Esta última novamente se resume em verificar se os pares ou ternos de números fornecidos, quando substituídos nas incógnitas da equação dada, resultam em uma igualdade verdadeira.

Convém salientar que não há problemas contextuais sobre equações lineares nessa seção. Dada a variedade de situações do cotidiano que poderiam ser descritas por equações lineares e, particularmente, por equações diofantinas lineares, é de surpreender a ausência de problemas desse tipo nesse volume da coleção C2.

Uma situação semelhante se observa nos exercícios propostos sobre sistemas lineares. Entre os 37 exercícios e 12 exemplos (exercícios resolvidos) sobre esse assunto, há apenas 7 problemas que recaem em sistemas lineares. Dentre eles, somente 3 envolvem quantidades discretas exigindo que suas soluções sejam valores inteiros e positivos. A seguir, a descrição desses problemas.

Na página 269, destaca-se o exercício resolvido que trata de reações químicas e que foi apresentado como exemplo de aplicação de sistemas lineares:

11) Quando se escreve uma equação química, é importante verificar sempre se o número de átomos de cada elemento é o mesmo em ambos os lados da equação, ou seja, se ela está balanceada. Para realizar o balanceamento, temos de colocar um número (denominado coeficiente estequiométrico) antes dos símbolos. Esses coeficientes usados no balanceamento de uma equação química devem ser sempre os menores números inteiros possíveis, pois não dá para imaginar ½ molécula de algum elemento químico. Veja como exemplo o balanceamento da equação da água.
A equação $H_2 + O_2 = H_2O$ não está balanceada; note que a quantidade de oxigênio em ambos os lados não é a mesma.
Se os coeficientes estequiométricos forem respectivamente x, y e z, temos que:

$$x\, H_2 + y\, O_2 = z\, H_2O$$

ou seja:

$$\begin{cases} 2x = 2z \text{ (hidrogênio)} \\ 2y = z \text{ (oxigênio)} \end{cases}$$

O sistema é SPI e admite mais de uma solução (x, y, z), porém nos interessa a menor solução inteira. A solução genérica desse sistema é $(2\alpha, \alpha, 2\alpha)$, portanto temos a menor solução inteira para $\alpha = 1$.
Assim, x = 2, y = 1 e z = 2 e a equação balanceada é: $2H_2 + O_2 = 2H_2O$.

Página 269

Esse problema também foi proposto por Silva (2002), que o apresentou como exemplo de aplicação de equações diofantinas lineares. Isso confirma a expectativa que apresentei anteriormente de que problemas desse tipo estão presentes nesse volume.

Contudo, observa-se que o autor apenas classifica o sistema como sendo SPI e apresenta a solução geral sem qualquer justificativa. Vale lembrar que Dante afirma, na apresentação do livro do aluno, que é “absolutamente necessário”, antes de fazer os exercícios propostos, que o aluno estude a teoria e refaça os exercícios resolvidos. Enquanto, no manual do professor, o autor esclarece que esse tipo de exercício tem a finalidade de mostrar as várias formas de resolução de um determinado problema. Fica, portanto, algumas questões: como isso seria possível, se a resolução apresentada para o problema não apresenta nenhuma justificativa? Como entender outras formas de resolução se elas não são explicitadas?

Além disso, diferentemente de Silva (2002), o autor não chama a atenção para o objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

Os outros dois problemas estão na seção de *Exercícios propostos* e foram propostos em exames de vestibulares:

39) (FMTM-MG) Três pacientes usam, em conjunto, 1830 mg por mês de um certo medicamento em cápsulas. O paciente A usa cápsulas de 5 mg, o paciente B, de 10 mg, e o paciente C, de 12 mg. O paciente A toma metade do número de cápsulas de B e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. O paciente C toma um remédio de cápsulas por mês igual a:

a) 30 b) 60 c) 75 d) 90 e) 120

Página 270

Na parte de *Respostas*, na página 295, é apresentada apenas a seguinte solução: 39) d. No manual do professor, o autor propõe a seguinte resolução:

39) Sendo:

$$\begin{cases} a = \text{número de pílulas de A} \\ b = \text{número de pílulas de B} \\ c = \text{número de pílulas de C} \end{cases}$$

temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ 5a + 10b + 12c = 1830 \\ 2a = b \end{cases}$$

Substituindo b por 2a vem:

$$\begin{cases} 3a + c = 180 \\ 25a + 12c = 1830 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos a = 30 e c = 90. Assim, b = 60.

Resposta: alternativa d.

Manual do Professor – Página 134

A resolução apresentada é simples e de fácil compreensão. Nela, o autor escreve o sistema linear que traduz o problema. A partir daí, a solução se dá por qualquer um dos métodos de resolução de sistemas lineares estudados no capítulo.

É importante destacar que, devido ao contexto do problema, sua solução se restringe ao conjunto dos números inteiros. Contudo, o autor não faz comentários sobre esse fato.

Da mesma forma, no problema apresentado a seguir, observa-se novamente essa falta de atenção:

> 41) (Uniube-MG) Ao descontar um cheque, recebi somente notas de R$ 10,00 e R$ 50,00, em um total de 14 notas. Quando fui conferir, descobri que o caixa havia se enganado, pois recebi tantas notas de R$ 50,00 quanto as de R$ 10,00 que deveria ter recebido e vice-versa. Percebido o erro, verifiquei que, se gastasse R$ 240,00 da importância recebida, ainda ficaria com o valor do meu cheque. Qual era o valor do meu cheque?
>
> a) R$ 540,00 c) R$ 480,00
> b) R$ 300,00 d) R$ 240,00

Página 270

No manual do professor, encontra-se a resolução desse problema apresentada como segue:

> 41) x = quantidade original de notas de R$ 10,00
> y = quantidade original de notas de R$ 50,00
>
> $$\begin{cases} x + y = 14 \\ 50x + 10y = 10x + 50y + 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 14 \\ 40x - 40y = 240 \end{cases}$$
>
> Resolvendo o sistema, encontramos x = 10 e y = 4.
> Portanto, o valor do cheque era de 10.10 + 50.4 = 300 reais.
>
> Resposta: alternativa b.

Manual do Professor – Página 134

Nesse problema, observa-se que o número de notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 necessariamente são valores inteiros e positivos e, ainda, que o valor do cheque também constitui um número inteiro, uma vez que se trata de múltiplos de 10 e de 50. No entanto, não se verifica comentários a esse respeito.

Novamente perdeu-se a oportunidade de realizar comentários sobre a utilidade de conhecimentos sobre esse objeto do saber.

Considerações sobre o segundo volume dedicado ao aluno

Nesse volume, o autor aborda apenas quatro problemas que são traduzidos por equações que possuem coeficientes inteiros e, além disso, devido às suas condições, apresentam soluções restritas ao conjunto dos números inteiros. No entanto, o autor não faz referências sobre as características desses problemas.

Convém destacar, que o problema de balanceamento da equação da água, proposto pelo autor, envolve um sistema linear com uma quantidade menor de equações do que a de incógnitas, o que poderia indicar que esse problema teria mais de uma solução. Porém, devido às suas condições, ele apresenta uma única solução inteira. Observa-se, ainda, que o autor não chamou a atenção para o fato de que o sistema linear que traduz o problema é equivalente a uma equação diofantina linear de fácil resolução.

Volume III da C2:

- *Parte específica do manual do professor*

Este livro é o terceiro da coleção de três volumes destinados às três séries do Ensino Médio. Como acontece com os outros dois volumes, este apresenta uma descrição sucinta do livro do aluno, seguida de comentários sobre os assuntos nele desenvolvidos.

Os capítulos que compõem o volume são: Geometria analítica: ponto e reta; Geometria analítica: circunferência; Geometria analítica: secções cônicas; Análise combinatória; Probabilidade; Poliedros: prismas e pirâmides; Corpos redondos; Estatística; Números complexos e Polinômios.

Dentre os comentários do autor sobre esses assuntos, focalizei aqueles sobre Polinômios, pois este parece ser o único tema que poderá abordar situações que se beneficiem do uso de conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

Dante esclarece que o capítulo sobre polinômios e equações algébricas é voltado para a resolução de equações e ressalta, ainda, a importância do fato de que toda equação polinomial tem pelo menos uma raiz complexa. Além disso, destaca o fato de que as equações polinomiais de grau maior do que dois não possuem fórmulas e procedimentos práticos e imediatos para resolvê-las.

Convém ressaltar que não há referências aos problemas propostos nesse volume. Dessa forma, é possível que o autor considere algumas situações do cotidiano para abordagem do assunto, o que pode indicar a presença de problemas que favorecem o uso de conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”.

- *Parte específica dedicada aos alunos*

A análise de todos os capítulos desse volume evidenciou a ausência de problemas que envolvessem o uso de conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”. No capítulo dedicado ao estudo de polinômios e de equações algébricas, o único ponto a destacar é a consideração a respeito das propriedades de divisibilidade, análogas às dos números inteiros, utilizada para introduzir a divisibilidade de polinômios. Em relação aos exercícios propostos nesse capítulo, observa-se que a expectativa para abordagem de situações do cotidiano não foi confirmada, uma vez que nenhum desses exercícios envolve contextualização.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa investigou se o objeto do saber "equações diofantinas lineares" é considerado um objeto de ensino nas propostas curriculares oficiais relativas ao Ensino Médio e nos livros didáticos de Matemática destinados a esse nível de ensino. A escolha dessas propostas recaiu em dois dos mais recentes documentos norteadores da educação nacional: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e Parâmetros Curriculares Nacionais "Mais" (PCN+). Em relação aos livros didáticos, foram selecionadas duas coleções – aprovadas no último Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM).

Para melhor apresentação das Considerações Finais, optei por explicitar as minhas questões de pesquisas e, na seqüência, farei minhas análises, reflexões e conclusões.

Começarei, portanto, pela primeira questão de pesquisa:

- Os documentos oficiais sobre o Ensino Médio consideram aspectos da Teoria Elementar dos Números, mais especificamente das equações diofantinas lineares?

Para responder a esta questão, retomei alguns resultados obtidos a partir da análise das propostas curriculares contidas nos PCNEM e nos PCN+ e que foram explicitados no capítulo VI desta pesquisa.

Os resultados indicam que esses documentos não fazem referência explícita ao objeto do saber "equações diofantinas lineares". Contudo, ainda restava a possibilidade de que esse assunto estivesse presente de forma implícita em suas propostas curriculares. Um exemplo seria a indicação de problemas que envolvem quantidades discretas e que poderiam utilizar esse tipo de equação para sua resolução, mesmo com a omissão do termo.

No entanto a análise dos PCNEM e dos PCN+ evidenciou que não há indicação mais específica para a abordagem de tais problemas em ambos os documentos. Diferentemente disso, o que se constata em algumas das orientações contidas nos PCN+, relativas ao tema "Álgebra: números e funções", é que a ênfase dada por seus autores está nos números e nas variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, tendo como objetos de estudo os números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Entretanto convém destacar, aqui, que alguns pesquisadores em Educação Matemática, como Resende (2004), indicam que tratar os números inteiros simplesmente como subconjunto dos números reais pode conduzir a simplificações que desprezam aspectos fundamentais como, por exemplo, a questão da divisibilidade.

Concluo, portanto, que não há qualquer referência ao objeto do saber "equações diofantinas lineares" feita tanto nos PCNEM como nos PCN+, ou seja, esse assunto não é considerado um objeto de ensino pelos autores desses documentos.

Passo agora, à minha segunda questão de pesquisa:

- Os livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio abordam as equações diofantinas lineares e/ou situações que sugiram, para sua solução, o uso de conhecimentos sobre resolução de equações diofantinas lineares?

Para esta questão, remeto-me aos resultados obtidos a partir da análise das duas coleções de livros didáticos apresentadas no capítulo VI.

A análise dos sumários de todos os volumes das coleções C1 e C2 revelou que o objeto do saber "equações diofantinas lineares" não consta entre os objetos de ensino que lá foram explicitados.

Ainda que no manual do professor de ambas as coleções também não tenha sido encontrada indicação para esse assunto, observou-se que seus autores, ao apresentarem as características dos problemas propostos, indicam a possibilidade de referência ao objeto do saber “equações diofantinas lineares”, seja na resolução de problemas que envolvam esse tipo de equação, seja em comentários sobre sua resolução.

A análise dos problemas em C1 mostrou que existem apenas dois problemas que se beneficiariam de uma resolução via equações diofantinas lineares. No entanto não há qualquer referência a esse assunto, mesmo no manual do professor. Na resolução proposta pelos autores, privilegiou-se o método de tentativa e erro. Constatou-se, ainda, que muitas das afirmações feitas na resolução dos problemas não acompanham explicações. Com relação ao tema Sistemas Lineares, observou-se que foram propostos nove problemas cujo contexto exige raízes inteiras, porém, sem nenhum comentário dos autores a esse respeito.

É interessante observar a influência que os vestibulares exercem na escolha dos problemas propostos em C1. Há inclusive uma seção específica no final de cada capítulo que trata de problemas que já foram propostos nesses exames. Além disso, dos onze problemas que analisei nessa coleção, seis deles foram propostos em provas de vestibular. O que mostra que problemas que envolvem conhecimentos em Teoria Elementar dos Números estão presentes nesse tipo de exame.

Observou-se, ainda, que não há indicação da bibliografia utilizada na elaboração de C1, o que dificultou saber se seus autores incorporaram resultados de pesquisas.

Em C2 também são apresentados dois problemas que poderiam ser resolvidos utilizando os conhecimentos sobre o objeto do saber “equações diofantinas lineares”. Em ambos os problemas, a sugestão dada pelo autor para suas resoluções é baseada no método de tentativa e erro. Não consta nenhuma referência a esse objeto do saber. No capítulo destinado ao estudo dos sistemas lineares, verificou-se a indicação do problema de balanceamento da equação da água, proposto por Silva (2002), cuja resolução recai em uma equação diofantina linear facilmente resolúvel. No entanto, diferentemente da autora, Dante não chamou a atenção para o assunto. Nos demais problemas propostos nesse capítulo, apenas dois deles recaem em sistemas lineares que, devido ao contexto, exigem soluções restritas ao conjunto dos números inteiros. Contudo o autor não apresenta considerações para esse fato.

Dessa forma, concluo que o objeto do saber “equações diofantinas lineares” não é considerado objeto de ensino pelos autores das duas coleções analisadas.

Diante das conclusões obtidas, convém ressaltar que a importância desse assunto, no Ensino Médio, repousa no fato de que esse objeto do saber está atrelado à questão da divisibilidade, que é abordada desde o Ensino Fundamental e que só faz sentido quando tratada sobre os inteiros. Além disso, a utilização dos conhecimentos sobre equações diofantinas lineares facilita a resolução de muitos problemas da vida cotidiana, contextualizados a partir da vida real tornando-se modelares via esse objeto do saber. E, finalmente, o estudo desse assunto propicia o desenvolvimento de idéias matemáticas importantes, como por exemplo, a de demonstrar. Esse aspecto é importante porque representa um “fazer Matemática”, na medida em que a demonstração, segundo Villiers (2002), desempenha múltiplos papéis na Matemática – como meio de explicação (proporcionar compreensão sobre porque é que é verdade), de descoberta (a descoberta ou a invenção de novos resultados), de comunicação (a negociação do significado), de desafio intelectual (a realização/satisfação pessoal por ter construído uma demonstração), de sistematização (a organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas). Dessa forma, dada a importância desse objeto do saber, é alarmante a pouca atenção que tem sido dispensada pelas propostas curriculares oficiais e também pelos livros didáticos de Matemática para explorar essas potencialidades na Educação Básica.

É claro que essa falta de atenção não está associada necessariamente à ausência de indicações específicas aos problemas que são resolvidos via equações diofantinas lineares, mas à ausência de reflexão crítica sobre o seu ensino.

Dessa forma, espero que a elaboração deste trabalho possa contribuir para a percepção da necessidade de se repensar o processo de ensino-aprendizagem dos assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio, de modo que possam surgir novas direções e novas significações para o desenvolvimento desse tema.

Esse repensar implica a realização de pesquisas que procurem responder alguns dos questionamentos como os indicados a seguir:

- Se e como os professores do Ensino Médio trabalham, em suas aulas, os assuntos de Teoria Elementar dos Números.
- Se e como os alunos do Ensino Médio resolvem problemas que envolvem conhecimentos relativos aos assuntos de Teoria Elementar dos Números.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROS, A. F.S. *Equações Diofantinas e suas Aplicações.* Monografia (Especialização em Matemática). Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Vitória da Conquista, 1998.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2002.

____________. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental:* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

____________. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTC, 1999.

CAMPBELL, S., ZAZKIS, R. *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction.* Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing, 2002.

CARNEIRO, J.P.Q. *Dispositivo Prático para Expressar o MDC de dois números como combinação linear deles.* In Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 37, p. 27-33, 1998.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir ausavoir enseigné.* Grénobre: La Pensée Sauvage, 1991.

COSTA, E.S. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP (no prelo) a ser apresentada em 2006.

DANTE, L. R. *Matemática.* São Paulo: Ed. Ática, 2005. 3v.

FARHAT, R. *Definidos livros didáticos para o ensino médio.* Brasília 2004. Disponível em <http://www.mec.gov.br/acs/pdf/livros1.pdf> Acesso em: 20 maio 2004.

FERRARI, P. L. *Understanding Elementary Number Theory at the Undergraduate Level: A Semiotic Approach.* In Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing, 2002.

IEZZI, G. *et al*. *Matemática: Ciência e Aplicações*. São Paulo: Saraiva Livreiros Editores S.A., 2005. 3v.

LA ROQUE, G., PITOMBEIRA, J. B. *Uma Equação Diofantina e suas Resoluções*. In Revista do Professor de Matemática v. 19, p. 39-47, 1991.

LAJOLO, M. *Livro Didático: um (quase) manual de usuário.* Em Aberto. Brasília, v.16, n. 69, p. 3-7, jan./mar, 1996.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.* Coleção Temas Básicos da Educação. São Paulo: EPU Editora Pedagógica e Universitária Ltda., 1986, p. 38-44.

MACHADO, S. D. A *et al Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental.* In: Actas do V CIBEM. Porto, julho 2005 v. 1, p.1-12.

_____________. *Qual a Álgebra a ser ensinada em cursos de Formação de Professores de Matemática?*. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2003, II SIPEM. Anais do II SIPEM, 2003. v. 1. p. 1-19.

MARANHÃO, M. C. S. A. *Projeto: O que se entende por Álgebra.* In: ENEM, 2004, Recife. Anais do ENEM. São Paulo: SBEM, 2004. v. 1. p. 1-16.

PAIVA, M. R. *A Matemática escolar e o ENEM (1998 – 2002): o aparecimento de uma nova vulgata?* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP, 2003.

PAIS, L. C. *Transposição Didática.* In Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

PIRES, C. M. C. *Desenvolvimento Curricular em Matemática no Brasil*. Lisboa, 2001. Disponível em: http://www.apm.pt/emce_pa/port/zpdfs/painelcelia.pdf Acesso em: 26 fevereiro 2006.

RAMA, A. J. *Números Inteiros nos Ensinos Fundamental e Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP, 2005.

RESENDE, M. R. *Re-significando a Teoria dos Números na formação do professor de matemática na Licenciatura.* Relatório do exame de Qualificação do doutorado em Educação Matemática da PUC-SP. Realizado em 26 de agosto de 2005.

____________. *Teoria dos Números: presente ou ausente na formação do professor da educação básica?* In: XII ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 2004, Curitiba-PR. XII ENDIPE - Conhecimento Local e Conhecimento Universal, 2004.

SILVA, E. F. *Equações Diofantinas Lineares.* Revista da Olimpíada. Instituto de Matemática e Estatística. UFG, n.3, p. 110-118, 2002.

VILLIERS, M. *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica*. In Actas do ProfMat 2002, p. 65-72. Lisboa: APM, 2002.

ANEXOS

Anexo 1 – Transcrição da Apresentação de C1

Matemática: ciência e aplicações é uma obra em três volumes em que procuramos apresentar o programa de Matemática mais usado e consagrado no ensino médio. Os conteúdos estão distribuídos da seguinte forma:

- no volume 1 são estudadas as principais funções elementares, as progressões, a matemática financeira e a trigonometria nos triângulos;
- o volume 2 aborda funções trigonométricas, geometria do espaço, álgebra das matrizes, determinantes e sistemas lineares, análise combinatória, binômio e probabilidades;
- o volume 3 apresenta estatística descritiva, geometria analítica plana, álgebra dos complexos, polinômios e equações algébricas e derivadas das funções com suas aplicações.

No desenvolvimento teórico, optamos por fazer uma introdução intuitiva dos assuntos, empregando nesses trechos um tom mais coloquial. Já para a apresentação dos conceitos reservamos uma linguagem precisa, rigorosa. Buscamos também mostrar as justificações das propriedades e teoremas, sempre que elas não se tornassem algo longo e nebuloso. Apenas na geometria espacial de posição nos decidimos por uma linguagem inteiramente coloquial, com apelos à geometria do concreto.

As atividades incluem exercícios, problemas e testes, muitos deles retirados de exames vestibulares e das provas mais recentes do Enem.

Levando em conta as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio, apresentamos muitos exemplos de aplicação da Matemática às outras ciências e à realidade dos alunos. Nesses exemplos, não perdemos a oportunidade de tocar em alguns dos temas transversais, como cidadania, meio ambiente, pluralidade social, racial, cultural e religiosa. Quando tratamos da matemática financeira e da estatística, assuntos bastante ligados ao nosso dia-a-dia, recorremos exaustivamente a matérias de jornais e de revistas.

A obra dá lugar também para um pouco de história da Matemática: artigos muito oportunos do professor Hygino H. Domingues relatam os fatos que envolveram algumas das mais importantes descobertas matemáticas.

Entretanto, nem sempre uma obra expressa eficazmente a intenção de seus autores, e esta também pode ter desvios indesejáveis; por isso é de fundamental importância que seus usuários – professores e alunos – nos dêem sua opinião a respeito da utilização deste trabalho em sala de aula.

Os autores

Anexo 2 – Transcrição da Apresentação de C2

A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos.

Aristóteles

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não passa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

Ao elaborar esta coleção para o Ensino Médio, procuramos levar em conta as duas afirmações acima. O objetivo é fazer com que o aluno compreenda as idéias básicas da Matemática desse nível de ensino e, quando necessário, saiba aplicá-las na resolução de problemas do mundo real.

Procuramos explorar todos os conceitos básicos próprios do Ensino Médio de maneira intuitiva e compreensível. Evitamos as receitas prontas e o formalismo excessivo, porém foi mantido o rigor coerente com o nível para o qual a coleção está sendo proposta.

Os exercícios resolvidos e propostos são parte integrante do livro; porém, antes de resolver os exercícios propostos, é absolutamente necessário que o aluno estude a teoria e refaça os exercícios resolvidos.

Foram incluídas no fim de cada volume as questões respectivas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Esperamos dessa forma contribuir com o trabalho do Professor em sala de aula e com o processo de aprendizagem dos alunos, solidificando, aprofundando e ampliando o que aprenderam no Ensino Fundamental.

As sugestões e críticas que visem aprimorar este trabalho serão sempre bem-vindas.

O autor

Anexo 3 - Livro didático chega a alunos do ensino médio

O governo federal está investindo na distribuição de livros didáticos para alunos do ensino médio. São sete milhões de alunos de 13.253 escolas da rede pública de ensino, que estão recebendo obras de português e matemática.

Antes, o livro didático estava garantido apenas aos estudantes do ensino fundamental.

Nessa nova etapa de grande alcance social, as três séries do ensino médio receberão 12,5 milhões de exemplares, num investimento de R$ 135 milhões. Os recursos são do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação.

Daniel Balaban, diretor de ações educacionais do FNDE, espera começar a ampliar o atendimento a partir de 2007, com a aquisição de livros de física e química. "Nenhum país do mundo tem um programa de distribuição de livro didático como o do Brasil", afirmou.

Como acontece com o ensino fundamental, o governo espera que o material seja preservado para durar os três anos do ensino médio. Depois de usado no primeiro ano, o livro é utilizado por novos alunos, nos dois anos seguintes.

Para o ministro da Educação, Fernando Haddad, no ensino fundamental, o livro didático já demonstrou importância tanto para o professor quanto para o aluno. Para o ministro, pouquíssimas pessoas têm condições de comprar material didático em uma livraria. Devido à dificuldade financeira dos estudantes, o MEC decidiu oferecer ao aluno do ensino médio o benefício que ajuda os estudantes do fundamental.

Com o livro didático também no ensino médio, o governo prevê grande impacto na qualidade deste nível de educação. Professores e alunos terão um instrumento de trabalho validado pelas universidades, com critérios de qualidade e absolutamente gratuito.

A oferta de livros didáticos a alunos do ensino médio faz parte do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (Pnlem), criado em 2004, com um projeto-piloto, que destinou em 2005 livros aos alunos da primeira série das regiões Norte e Nordeste, beneficiando 1,3 milhões de alunos de 5.392 escolas.

Acesse as edições anteriores em:
www.brasil.gov.br/emquestao

Acesso: 07/03/06