MARIA DO CARMO PEREIRA SERVIDONI

# A AXIOMATIZAÇÃO DA ARITMÉTICA:
# E A CONTRIBUIÇÃO HERMANN GÜNTHER GRAβMANN

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

MARIA DO CARMO PEREIRA SERVIDONI

# A AXIOMATIZAÇÃO DA ARITMÉTICA:
# E A CONTRIBUIÇÃO  DE HERMANN GÜNTHER GRAβMANN

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de* ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

**PUC/SP**
**São Paulo**
**2006**

**Banca Examinadora**

*Quem pode contar os grãos de areia do mar, as gotas de chuva, os dias do tempo?*
*Quem pode medir a altura do céu, a extensão da terra, a profundidade do abismo?*
*Quem pode penetrar a sabedoria divina, anterior a tudo?*
*A sabedoria foi criada antes de todas as coisas, a inteligência prudente existe antes dos séculos!*

*Eclesiástico 1, 1-6*

***As minhas duas filhas, Thaís e Letícia, que acompanharam muito de perto a realização deste sonho compartilhando sempre de meus anseios***

***A meus 24 sobrinhos, por quem me sinto tão querida e abraçada***

***A meu querido esposo, Marcos, que, inquestionavelmente, se fez presente e amigo durante todo esse tempo***

***A meus oito irmãos que comungam comigo a idéia de que o conhecimento é a melhor arma em defesa da construção de uma sociedade mais justa***

***A meu pai, José Severiano (in memoriam), cuja filosofia de vida sempre foi baseada no princípio de justiça, amor e fraternidade. A minha mãe, Maria de Lourdes que em sua simplicidade sempre valorizou a educação***

# AGRADECIMENTO

À Professora Doutora ***Sonia Barbosa Camargo Igliori***, orientadora desta pesquisa, pelo apoio e incentivo na busca do conhecimento, sempre afirmando com muita propriedade que o conhecimento é o melhor caminho para a realização de uma pesquisa.

Ao professor Doutor ***Michael Otte***, co-orientador deste trabalho, pelo carinho e atenção que dedicou com profundas reflexões que contribuíram para o processo de desenvolvimento deste estudo.

À Professora Doutora ***Silvia Dias Alcântara Machado*** e ao Professor Doutor ***Benedito Antonio da Silva***, pelas contribuições no Exame de Qualificação e durante as aulas, com sugestões e orientações valiosas, que muito contribuíram para a constituição e aperfeiçoamento do trabalho.

Aos ***Professores do Programa de Estudos de Pós-Graduação em Educação Matemática***, pela seriedade e responsabilidade com que conduzem o processo ensino-aprendizagem.

A meus *amigos* de curso, em especial a *Vânia, Michaela, Luciana e Renata,* pela amizade e companheirismo nesta trajetória.

À meus familiares, *esposo, filhas, sobrinhos, mãe, irmãos e cunhados,* que sempre acreditaram e mostraram-se compreensivos pelas minhas ausências em muitas datas comemorativas.

A uma grande amiga e escritora, *Márcia Plana*, por mostrar-se sempre acreditando na educação e exercendo seu ofício de mestre sem reclamar o peso da bagagem e, com isso, de certa forma, contribuiu para mais um avanço na minha formação.

Ao *grupo de amigos* que no início do curso, contribuiu carinhosamente com as traduções.

À *Secretaria Estadual de Educação de São Paulo*, pela bolsa de estudos concedida, sem a mesma seria difícil a realização desta pesquisa.

*Meu Carinho*

# RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo o desenvolvimento epistemológico do objeto de conhecimento – número – em sua constituição como entidade matemática. Ficou evidenciado que, no final do século XIX, a necessidade dessa constituição gerou muitas controvérsias, porque número era concebido como presente de Deus e, conseqüentemente, considerado algo perfeito. Para o desenvolvimento dessa pesquisa, tivemos como referência os trabalhos de Grassmann, o primeiro matemático a propor, mesmo que, de forma inconsciente, a Axiomatização da Aritmética. A referência principal foi o artigo intitulado: *A debate about the axiomatization of arithmetic: Otto Hölder against Robert Graßmann* de Mircea Radu (2003), no qual se encontra um debate a respeito da Axiomatização da Aritmética sob dois pontos de vista; por um lado, temos Otto Hölder que acreditava na natureza sintética da Matemática, sendo assim rejeitava o método axiomático como base para a mesma; por outro lado, Robert Grassmann e Hermann Grassmann que, também, concordam com a idéia de Hölder, pois rejeitam o método axiomático. No entanto, apresentaram uma abordagem da Aritmética, aparentemente, axiomática. Na verdade, Grassmann não entendia assim seu tratamento da Aritmética, pois as leis que definiriam os números naturais pertenciam à Álgebra, outra disciplina que Grassmann considerou como geradora de todas as outras. No desenvolvimento dessa pesquisa, indicamos que as bases da axiomatização da Aritmética estavam no bojo das grandes transformações ocorridas na Matemática durante o século XIX e início do XX: o aparecimento das Geometrias não-euclidianas, a libertação da Álgebra das veias da Aritmética e o processo intrincado da Aritmetização da Análise. Nesse período, também, desenvolveu-se a discussão da pertinência ou não do uso do método axiomático, como um fundamento da Aritmética. Concluiu-se que apesar de toda a polêmica desse período, a possibilidade da axiomatização da Aritmética e a adoção do princípio axiomático nas ciências formais contribuíram para o avanço das ciências exatas.

**Palavras-chave**: Axiomatização da Aritmética, Número, Hermann Graβmann, Epistemologia.

# ABSTRACT

This research had as purpose the epistemology development of the knowledge object, number, in its formation as mathematical entity. It became evident that, in the end of the XIX century, the need of this formation caused many controversies, because number was understood as gift by God and consequently, considered something perfect. To the development of this research, we had as references Graβmann's works, the first mathematician to consider, even if, in an unconscious form, the Axiomatization of Arithmetic. The main reference was the article entitled: *The debate about the Axiomatization of Arithmetic: Otto Hölder against Robert Graβmann* by Mircea Radu (2003), in which, there is a debate about Axiomatization of Arithmetic under two points of view, on the other hand, we have Otto Hölder who believed in the synthetic nature of Mathematics, in such case, he rejected the axiomatical method as base for itself, and otherwise, Hermann Graβmann and Robert Graβmann that agree with the same idea, but they reject the axiomatical method. However, Graβmann didn't understand so well his treatment of Arithmetic, because the laws that would define the natural numbers belonged to Algebra, another discipline that Grassmann considered as originated for all the other ones. In the development of this research, we indicated that the bases of the Axiomatization of Arithmetic were in the salience of big transformations occurred in Mathematics in the time of XIX century and beginning of XX one: the appearing of the non-Euclidean Geometries, the Algebra's release of Arithmetic's veins and the intricate process of Arithmetization of Analysis. In this period, it also developed the relevancy or not of the use of axiomatic method as a basis of Arithmetic. We concluded that, in spite of all controversies of this period, the possibility of Axiomatization of Arithmetic and the adoption of the axiomatical source in formal sciences contributed for the exact sciences.

Key words: Axiomatization of the Arithmetic, Number, Hermann Grassmann, Epistemology.

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Esta pesquisa é parte de um projeto de pesquisa sobre o conceito de número e axiomatização da Aritmética. A problemática que está em foco é a da possibilidade de existirem conseqüências cognitivas e didáticas em decorrência das três grandes mudanças ocorridas na Matemática no decorrer dos últimos 200 anos: a aritmetização da Matemática; a mudança na noção de axioma e a nova noção de objeto matemático. A revolução na Matemática transformou-a de uma ciência de formas e fórmulas, como se percebeu na Álgebra e Análise Algébrica de Leibniz, Euler e Lagrange, numa de pensamento conceitual. Nessa perspectiva a Aritmética e os números fornecem os conceitos mais precisos e mais nitidamente delimitados. Hilbert no seu famoso "Zahlbericht" de 1897 afirma: "a teoria dos números tem sido elogiada desde os tempos antigos devido à simplicidade de seus fundamentos, da precisão de seus conceitos e da pureza de suas verdades".

No entanto, Hilbert também destacou naquela mesma obra que a Aritmética e a Teoria dos Números tiveram que ser desenvolvidas e aprofundadas além dos limites elementares já conhecidos desde há muito tempo para servirem como base para todo pensamento matemático. Finalmente se mostrou claramente que o caminho construtivo tradicional não era suficiente para incluir todos os números. A continuidade dos números reais, por exemplo, teve de ser introduzida por meio de um postulado. Constatada essa problemática na segunda metade do século XIX começou-se a pensar em fundamentos axiomáticos da Aritmética e dos números. Caberia aqui a pergunta: por que a axiomatização da Aritmética começa somente no século XIX? Ou seja, por que isso ocorre mais de dois mil anos depois que a Geometria é apresentada na forma axiomática nos *Elementos* de Euclides? A causa reforçando o que é referenciado acima, é que o conceito de número foi considerado uma criação do próprio homem, enquanto a Geometria e a Física têm de tratar de coisas objetivas e “externas” ao pensamento humano.

Duas mudanças foram necessárias antes que matemáticos, como Grassmann, Dedekind, Hilbert ou Peano, pudessem pensar no assunto da axiomatização dos números. A primeira trata-se do caráter e da compreensão dos axiomas. Deviam transformar-se de verdades objetivas e intuitivamente claras que, nem precisam nem podem ser provadas, para, premissas hipotéticas do pensamento ou em postulados, para representar uma perspectiva sobre o objeto da pesquisa em igualdade com outras possíveis e expressar-se em termos de relações e equações. Acrescenta-se à mudança exigida sobre o caráter dos axiomas à do raciocínio lógico. Na Ciência Aristotélica a lógica estava sempre ligada ou relacionada à Geometria. Até o início do século XIX acreditava-se que a Aritmética não podia ter axiomas, pois eles não tinham lugar nas ciências formais.

Neste contexto, esta pesquisa tem por alvo o estudo de um artigo escrito por Radu, no qual ele discute a Axiomatização da Aritmética sob dois pontos de vista; por um lado, temos, Otto Hölder, um matemático intuicionista, que rejeita explicitamente o método axiomático para lidar com os fundamentos da Matemática; por outro, Robert Grassmann que apresentou, em 1891 (apoiado nas idéias desenvolvidas por seu irmão Hermann Grassmann), uma abordagem da Aritmética como proposta para seus fundamentos e foi o alvo da critica de Hölder.

Hermann Günther Grassmann, matemático alemão, autodidata e pouco conhecido de sua época; nasceu em Stettin, 1809. Lá viveu praticamente toda sua vida, falecendo em 1877. Sua trajetória de vida pode ser considerada entre tantas, como mais uma tragédia Matemática, pois não obteve o devido reconhecimento. Entretanto, pode ser visto como um excelente matemático, em razão da criação de sua nova teoria – *Die Ausdehnungslehre* – que proporcionou aos pesquisadores matemáticos que o sucederam a expansão considerável dos conceitos matemáticos.

A capacidade de considerar o negativo em Geometria foi o passo fundamental do desenvolvimento de sua teoria; esta capacidade era vista como impossível, já que a Geometria era realizada apoiada na experiência e observação.

Grassmann concebia a ciência, em especial, a Matemática, como dividida em duas partes: real e formal. A ciência real é a que reproduz no pensamento o ser que é independente do pensamento e sua verdade reside na coincidência do pensamento com o ser; ao passo que a ciência formal tem por objeto o que é formado pelo pensamento, cuja verdade reside na concordância dos processos mentais entre si.

Esta concepção pode ser encontrada em:

> Pensar só se pode em relação a algum ser, que se enfrenta e é reproduzido pelo pensamento, mas este ser é, nas ciências reais, algo independente, existente por si fora do pensamento; e nas ciências formais, ao contrário, é algo formado pelo pensamento, que faz o papel do ser para um segundo ato de pensar. Se a verdade consiste, de maneira geral, na coincidência do ser com o pensar, então, consiste, em especial, nas ciências formais, na coincidência do segundo ato de pensar com o formado pelo primeiro, isto é, na coincidência de ambos os atos do pensamento. Conseqüentemente, nas ciências formais, a demonstração não excede os limites do pensamento nem entra em outros campos, consiste, pois, puramente na combinação dos distintos atos do pensamento. Esta é a razão pela qual as ciências formais não devem basear-se em postulados, como as reais; sua única base são as definições.[1] (GRASSMANN, 1947, p. 21)

Grassmann entendia que as ciências formais estudam as leis gerais do pensamento, que denominou de dialética (lógica) e as leis particulares geradas pelo pensamento, a Matemática. Cria, assim, a divisão das ciências formais em: dialética e Matemática, sendo a dialética uma ciência, cujas características são filosóficas, pois busca a unidade de todos os pensamentos, ao passo que a

---

[1] Pensar solo se puede en relación a algún ser, que se le enfrenta y es reproducido por el pensamiento; pero este ser es, en la ciencias reales, algo independiente, existente de por si fuera del pensamiento; en las formales, en cambio, algo formado por el pensamiento, que hace el papel del ser para un segundo acto del pensar. Si la verdad consiste, de la manera más general, en la coincidencia del ser con el pensar, entonces consiste en especial en las ciencias formales, en la coincidencia del segundo acto de pensar con lo formado por el primero, es decir en la coincidencia de ambos actos del pensamiento. Por consiguiente, en las ciencias formales la demostración no excede de los límites del pensamiento ni entra en otros campos, consiste pues puramente en la combinación de los distintos actos del pensamiento. Esa es la razón por la cual las ciencias formales no deben basarse en postulados, como las reales; su única base son las definiciones.

Matemática caminha no sentido oposto, por considerar o pensamento como algo particular.

Para ele, a Matemática era como uma forma de pensamento, por isso nomeou seu trabalho *Teoria das Formas*, por ser um termo amplo que não geraria ambigüidade. Nela fez a divisão da Matemática em cinco disciplinas, assim: a Álgebra Abstrata seria a mais geral e capaz de gerar todas as outras, a Aritmética, a Combinatória, a Lógica e a Álgebra Exterior (em termos modernos, a Álgebra Linear).

No desenvolvimento da *Teoria das Formas,* destacamos a parte que nos interessa, a Aritmética. Em 1861, Hermann Grassmann publicou um livro didático intitulado *Lehrbuch der Aritmetik,* que foi alvo de crítica e inspiração. Crítica no sentido de apresentar a Aritmética revestida de axiomas que, explicitamente, foi rejeitada pelos matemáticos de sua época, e inspiração para o desenvolvimento de uma abordagem axiomática do conceito de número.

A virada do século XIX para o XX foi rica em transformações. Acreditamos que Hermann Grassmann muito contribuiu para que elas acontecessem, seja de forma implícita, no caso do desenvolvimento da Análise ou explícita como é o caso da Álgebra Abstrata. Atribuímos a ele parte do mérito dessas mudanças notáveis nas ciências exatas. Na introdução de sua tese Palaro (2006) lembra-nos que o *nascimento* da teoria da relatividade de Einstein, 1905 foi um fato marcante na virada do século e que está relacionado com a nova concepção de espaço, proporcionado pelo desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas.

Conforme as questões acima levantadas que resgatamos da história, as transformações ocorridas na ciência Matemática no século XIX e início do XX, podem ser equiparadas à uma revolução, pois trouxeram conseqüências significativas às Ciências Exatas, sobretudo, à Matemática.

Uma compreensão dessas transformações pode revelar elementos que justifiquem a não definição do conceito – número – de forma absoluta. Número é um conceito presente em todos os ramos das ciências exatas; no entanto, não existe ainda uma conceituação de forma abrangente.

No estudo dos fundamentos da Matemática, há que se fazer uma digressão na história e dependendo do caminho a ser adotado, um ou outro aspecto poderá ser beneficiado. Dessa forma, a escolha do caminho torna-se importante. Por exemplo, ao falarmos da Aritmética, poderemos seguir o caminho que privilegia a teoria dos conjuntos que, desse ponto vista, define número privilegiando a ordinalidade. Nosso caminho será traçado objetivando a epistemologia do conceito número.

O homem utiliza a noção de número desde o tempo das cavernas, apesar disso na Matemática as teorias existentes não respondem de forma definitiva à questão: o que é número? Então nos indagamos: por que um conceito, por quase dois mil anos, foi entendido como pronto e acabado pelos matemáticos, passou a requerer uma teoria capaz de conceituá-lo de forma abrangente? Constatamos ser essa a preocupação de vários matemáticos. Vejamos o que dizem alguns.

Halmos inicia o capítulo – Números – de sua obra "Teoria Ingênua dos Conjuntos", questionando:

> Quanto é dois? Como mais geralmente, definimos os números? Para nos prepararmos para a resposta, consideremos um conjunto X e formemos a coleção P de todos os pares não ordenados {a, b} com a em X, b em X e a ≠ b. (HALMOS, 1970, p. 45)

O autor citado adota o caminho da teoria dos conjuntos para responder à questão, demonstrando as relações e propriedades que são válidas sob o ponto de vista dos conjuntos, que é assumido por Bertrand Russell.

Bertrand Arthur William Russell (1872 -1970), filósofo e matemático contribuiu bastante para a Filosofia, Lógica e Teoria dos Conjuntos. No período de 1910 a 1913, publica em três volumes a obra "Principia Mathematica", escrita com Whitehead (1861-1947), considerada um importante tratado da Lógica do século XX.

A questão sobre a definição de número também foi posta por Frege na introdução de sua obra, quando disserta sobre os fundamentos da Aritmética,

> A questão o que é o número *um*? Ou: o que significa o sinal 1? Receberá, freqüentemente, como resposta: ora, uma coisa. E se fazemos, então, notar que a proposição "o número *um* é uma coisa" não é uma definição, porque há, por um lado, o artigo definido; por outro, o indefinido que apenas é afirmado que o número *um* pertence às coisas, mas não que coisa seja, seremos talvez convidados a escolher uma coisa qualquer que desejamos chamar de *um*. (FREGE, 1974, p.203)

O estudo do conceito número pode ser comparado ao de uma árvore, que tem partes, tais como: copa, tronco, e a raiz. Podemos, então, estudar a copa, o tronco ou a raiz. Na presente pesquisa o objetivo do estudo do número, não é a "copa" nem o "tronco", mas, sim, sua raiz, isto é, sua epistemologia.

Estudar a epistemologia do conceito de número é relevante para a Matemática e, por conseqüência, à Educação Matemática, visto que a busca da sistematização desse conceito representou um avanço de muitos ramos da Matemática.

Representou, também, uma nova perspectiva de abordagem da Matemática, pois a partir do momento em que a sistematização do conceito de número é alvo da atenção dos matemáticos, o interesse pela ciência real (caracterizada pela Geometria e a Mecânica) é deslocado para a ciência formal.

A respeito do método axiomático, Otte (2005)[2] cita que: "matemáticos começaram a refletir mais profundamente sobre suas próprias construções mentais e atividades, ao invés de refletir sobre determinados objetos do mundo externo".

Observa-se que a Aritmética demorou quase dois mil anos para ser axiomatizada. Uma das razões dessa demora foi o fato do conceito número ser admitido como algo perfeito e que nada poderia ser modificado. O número era apreendido intuitivamente e sua abordagem era, portanto a sintética. Nesse contexto, Kronecker apresentou os números naturais como um presente do "Bom Deus". Com isso atribuiu o papel pré-científico à gênese do número, esquecendo-se que as atividades de todos os representantes do "Bom DEUS", como as

[2] Fala de Otte (2005) em seminários na Pontifícia Universidade Católica, nos grupos de pesquisas.

crianças e até os periquitos de Otto Kohler assemelham-se às atividades dos matemáticos.

A mudança na conceituação da noção de axioma possibilitou aos matemáticos conceberem a Aritmética axiomatizada. No desenvolvimento deste estudo, serão discorridas as mudanças em torno da noção de axioma. Outro fato que foi constatado no processo da axiomatização da Aritmética, foi a revelação do número natural como um objeto matemático, desse modo, sujeito de transformações e desenvolvimento.

Grassmann[3] foi o autor da axiomatização da Aritmética, mas não percebeu no desenvolvimento de seu trabalho a proposição de uma axiomática, mesmo porque entendia que a ciência formal não poderia ser constituída por axiomas. Assim, rejeitava a abordagem axiomática não só à Aritmética, mas, para toda a Matemática pura. (RADU, 2003)

A abordagem utilizada em seu trabalho apresentava uma nova forma de conceituar número a partir de uma simples operação x + 1, e, portanto, ele próprio não a viu como uma axiomatização.

Os matemáticos compreendiam que a proposta de Grassmann para a Aritmética feria os fundamentos do próprio conceito, por isso contestaram, porque acreditavam que o conceito número jamais poderia ser definido por meio de fórmulas recursivas, avaliando, assim, o que se apresentava no trabalho de Grassmann. Entendiam que a abordagem da Aritmética apresentada por Grassmann apelava ao logicismo e que as questões dos fundamentos não poderiam ser tratadas como tal. Na verdade, não compreendiam que Grassmann estava considerando aquelas fórmulas fora de um sistema de linguagem formal.

Enfim, a abordagem da Aritmética, comum em nosso meio, ou seja, a axiomática foi proposta por Grassmann. No entanto, o reconhecimento acabou

[3] É interessante notar que a família Grassmann era composta por vários integrantes, e os responsáveis pela discussão do conceito número foram pelo menos três Grassmann , são eles: Justus Grassmann (pai) , Hermann Grassmann (filho) e Robert Grassmann (filho), além de Hermann Grassmann Filho (1859), isto é, filho de Hermann, também matemático.

sendo de Peano, seu discípulo, que a consolidou com a publicação em 1889 da obra *Arithmetices Principia nova methodo exposita*.

A presente pesquisa é teórica e de ordem histórico-epistemológica, com foco na questão: o que é número? Assim sendo terá como procedimento de investigação estudos bibliográficos, leituras, e a realização de sínteses e análises. O equacionamento histórico-epistemológico da sistematização de um conceito matemático, como, por exemplo, o de número interessa à Educação Matemática, pois, na medida que o questionamento pode explicitar possíveis conflitos geradores da constituição do conceito, tais conflitos podem ter deixado marcas no processo de ensino-aprendizagem.

Este estudo está dividido em três momentos: o primeiro, é composto dos dois primeiros capítulos, sendo apresentado um levantamento histórico dos três grandes acontecimentos: o desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, a libertação da Álgebra Abstrata das veias da Aritmética e o processo de Aritmetização da Análise. No segundo momento, apresentado no terceiro capítulo resgatamos a história de Hermann Grassmann e os elementos de sua concepção da Matemática e no terceiro momento, composto pelo quarto e último capítulo, apresentamos as reflexões geradas por um debate entre dois matemáticos importantes da época, no qual o foco da discussão era a pertinência do princípio axiomático constituir-se como fundamento da Aritmética.

Para o desenvolvimento dos dois primeiros capítulos, apoiamo-nos na história e epistemologia dos conceitos. Consultamos as obras: *introdução à história da Matemática* de Howard Eves (2004) e *História da Matemática* de Carl B. Boyer (1974), que revelaram os aspectos históricos. As obras: *Conceitos Fundamentais da Matemática* de Bento de Jesus Caraça (2003), *O que é Matemática?* de Richard Courant e Herbert Robbins (2000) e Essays on the Theory of Numbers de Richard Dedekind (1963) atenderam ao aspecto epistemológico.

No desenvolvimento do terceiro capítulo, apoiamo-nos na obra: Teoria de La Extensión – Nueva disciplina Matemática expuesta y aclarada, mediante aplicaciones de Hermann Grassmann (1947), além do contexto histórico extraído das obras de História da Matemática, anteriormente citadas.

No quarto capítulo, o estudo foi elaborado por meio da análise do artigo intitulado: *A debate about the axiomatization of arithmetic: Otto Hölder against Robert Graßmann*, de Mircea Radu (2003), que trata do tema em questão. Nele, a axiomatização da Aritmética é apresentada sob distintos pontos de vista. Por um lado, está Otto Hölder, um matemático pouco reconhecido pertencente à corrente filosófica intuicionista e, de outro, Robert Grassmann, um alemão que, apoiado nas idéias de seu irmão Hermann Grassmann, publicou, em 1891 *o Die Zahlenlehre oder Arithmetik*, que é foco da critica de Hölder.

No final do trabalho, apresentamos como anexo I, a tradução para o português de uma versão em espanhol de uma parte da obra *Die Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann. Julgamos ser interessante apresentá-la, pois nela Grassmann discorre sobre sua concepção de Matemática e apresenta os elementos essenciais que usou na construção de sua teoria. A parte que traduzimos inclui a Introdução, contando de 16 páginas, e o prólogo utilizado pelo autor para explanar a respeito da obra. A nossa tradução foi confrontada com o original em alemão e adequada convenientemente. O trabalho de confrontação foi realizado pelo Professor e Doutor Michael Otte. E, como anexo II incluímos uma tabela que indica a abordagem estrutural algébrica, proposta por Grassmann.

No corpo do trabalho, fizemos à tradução de citações, cujo texto original é apresentado em notas de rodapé.

Apresentamos no final da introdução dessa pesquisa, uma tabela cronológica com a maioria dos matemáticos, referenciados no trabalho, cuja finalidade foi localizá-los no tempo e, com isso, talvez, contribuir para a sua compreensão.

Nossa concepção da ciência assemelha-se á visão do português Bento de Jesus Caraça que no prefácio de uma de sua obra cita que a ciência deve ser vista como:

> [...] um organismo vivo impregnado de condição humana, com as suas forças e suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social. (CARAÇA, 2003, p. xxiii)

O caminho que assumimos encara a ciência da forma descrita por Caraça (2003), pois acompanhamos o desenvolvimento progressivo do conceito e assistimos ao modo como foi elaborado, o que nos permitiu descobrir hesitações, dúvidas, contradições e que só após uma longa investigação, será possível eliminá-las para que, posteriormente, novas hesitações e controvérsias surjam a fim de que reflexões seguintes venham também eliminá-las.

Quadro I – Linha cronológica dos matemáticos referenciados no trabalho

**300 a.C.**

**Eudoxo de Cnido** (390 – 338 a.C) Sobre proporção e exaustão.
**Euclides** (330 – 270 a.C.) – os *Elementos* (Teoria dos Números e Números Primos)

**1600**

**Girolamo Saccheri** (1667 – 1733) – *Euclides ab omni naevo vindicatus (1733)*

**1700-1800**

**J. d'Alembert** (1717–1783) – *Traité de dynamique* (1738)
**J. H. Lambert** (1728–1777) – *Die Theorie der Parallellismo*; Die freye Perspektive (1759)
**J.L.Lagrange** (1736–1813) – *Mécanique analytique* (1788); Fonctions analytiques (1797)
**A.M.Legendre** (1752–1833) – *Éléments de Géometrie* (1794)
**F.J. Servois** (1767–1847) – *Geometria Projectiva*

**1800-1900**

**B.Bolzano** ( 1781–1848 ) – *Rein analytischer Beweis* (1817)
**A. Cauchy** ( 1789–1857) – *Calcul dês Residus* (1827)
**A.F.Möebius** (1790–1868) – Coordenadas homogêneas (1827)
**N. I. Lobachevsky** (1793–1856) – *Kasan Bulletin* (1829)
**George Peacock** (1791–1858) – *Treatise on algebra* (1830)
**Janos Bolyai** (1802–1860) – Ciência Absoluta do Espaço (1832)
**W.R.Hamilton** (1805–1865) – *Quatérnions* de Hamilton (1843)
**H. G. Grassmann** (1809–1877) – *Die Ausdehnungslehre* (1844)
**J.B.Listing** (1808–1882) – *Vorstudien Zur Topologie* (1847)
**E.E.Kummer** (1810–1893) – Teoria dos Ideais
**Arthur Cayley** (1821–1895) – Teoria dos Invariantes
**B.Riemann** (1826–1866) – *Habilitationschrift* de Riemann Boole: Laws of Thought (1854)
**Felix C. Klein** (1854–1912) – Erlanger Programm (1872)
**R.Dedekind** (1831–1916) – *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872)
**C. Hermite** (1822–1901) – Prova que *e* é *transcendente (1873)*
***F.L.G.Frege*** (1848–1925) – *Die* Grundlagen der Arithmetik (1884)
**G.F.L.P.Cantor** (1845–1918) – Mengenlehre de Cantor (1874)
**Giuseppe Peano** (1858–1932) – Axiomas de Peano (1889)

**1900**

**Robert Grassmann** - *Die Zahlenlehre oder Arithmetik* (1891)
**B. A. W. Russell** (1872–1970) – *Principia Mathematica* (1910)
**Otto Hölder** ( 1859–1937) – *R.Grassmann, Die Zahlenlehre oder Arithmetik* (1892)
**Kurt Gödel** (1906–1978 ) – Teorema de Gödel (1931)

Quadro I

# Capítulo I

## AS TRANSFORMAÇÕES OCORRIDAS NA GEOMETRIA E NA ÁLGEBRA NA VIRADA DO SÉCULO

### I.1 – Introdução

Na história da Matemática, houve duas grandes revoluções que trouxeram conseqüências significativas no modo de compreender e abordar os conceitos matemáticos. Entre estas transformações, está o descobrimento das Geometrias não-euclidianas e o desenvolvimento da Álgebra abstrata por um lado e, por outro, a possibilidade de sistematizar o conceito de número pela axiomatização. Até então, a Matemática era concebida e construída com base na observação e na experiência. As novas descobertas fizeram com que o eixo temático se deslocasse dos problemas entre o conhecimento do mundo externo e se movesse ao problema da dinâmica e da cognição, conseqüentemente, matemáticos começaram a refletir sobre suas próprias construções mentais.

A existência das Geometrias não-euclidianas, a adoção da Álgebra como ramo da Matemática, desvinculado da Aritmética e a concepção do princípio axiomático para o conceito número implicaram transformações em diversos ramos da Matemática. Entre estas transformações, citamos neste capítulo somente a topologia da reta, por ser essencialmente constituído com base no conjunto dos números reais, que por sua vez, será remetido aos axiomas que descrevem o número natural que é nosso foco principal.

As transformações ocorridas na virada do século XIX para o XX, forçaram os matemáticos a que se adentrassem às questões filosóficas, sendo uma das mais fundamentais a relativa à natureza do pensamento matemático.

Podemos dizer que elas colocam em questionamento as teorias embasadas por correntes filosóficas, como, por exemplo, o intuicionismo, cujo princípio está fundamentado na natureza sintética da Matemática e o método direto de prova. Elas marcaram o início de uma reorganização do pensamento humano no que se refere ao pensamento matemático. Isto implica novas formas de abordar os conceitos matemáticos.

Tais transformações resultaram, conseqüentemente, em mudanças de concepções. Entre elas, a conceituação do termo axioma, a existência do objeto número e a possibilidade da abordagem analítica dos objetos matemáticos e o princípio axiomático inserido na ciência formal.

A percepção de regularidades e a constatação das características comuns aos objetos nos possibilitam chegar à abstração e à generalização. Isso mostra que a noção dual: extensional e intensional dos objetos matemáticos, definidos pelo termo complementaridade de Niels Bohr[4] (1885 – 1962), que são resgatados por Otte (2003) – noções: extensional e intensional – e renomeados por Sfard (1991) – estrutural e operacional – é uma exigência implícita aos conceitos para que eles sejam apreendidos de forma plena. A noção *intensional* ou *estrutural* corresponde à sistematização do conceito e a noção *extensional* ou *operacional,* a sua aplicabilidade.

Neste capítulo, delineamos um panorama histórico do período concernente a dois momentos importantes da Ciência Matemática.

[4] Niels Henrick David Bohr, físico dinamarquês que formulou em 1928 o princípio da complementaridade. Seus trabalhos contribuíram decisivamente para a compreensão da estrutura atômica e da física quântica. Enciclopédia eletrônica, acessado: http://pt.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr , acesso em 20/09/2006 às 16h15m.

## I.1.1 - Panorama histórico em torno de dois grandes acontecimentos

Na história da Matemática, houve dois grandes acontecimentos que alteraram profundamente a concepção no que se refere aos conceitos matemáticos, até então, desenvolvidos. Um dos grandes acontecimentos foi a descoberta de outras Geometrias, para além da euclidiana, e o outro foi o surgimento de uma Álgebra diferente da habitual. Ambos os acontecimentos marcaram o início do avanço da Ciência Matemática e ocorreram na primeira metade do século XIX, denominado, hoje, por muitos, como idade de ouro da Matemática. Expresso em,

> Mais do que qualquer outro período, o século dezenove merece ser considerado a Idade de Ouro da Matemática. Seu crescimento durante estes cem anos é de longe maior que a soma total da produtividade em todas as épocas precedentes. (BOYER, 2003, p.343)

Próximo de 1829 houve a descoberta de uma Geometria autoconsistente com bases diferentes da Geometria de Euclides e, por volta de 1843, o surgimento de uma Álgebra que se distinguia da Álgebra admitida até então. Os dois eventos podem hoje, ser chamados, de grande revolução na Matemática, pois se atribui a eles a responsabilidade do passo inicial de avanços significativos e transformações na Ciência Matemática, marcando historicamente esse momento.

Os dois momentos parecem que se contrapõem; por um lado, a Geometria que era toda axiomatizada, consistindo de provas por meio de construções rigorosas em que todo seu desenvolvimento estava embasado; por outro lado, o desenvolvimento da Álgebra distinta da existente na época, a Álgebra abstrata, cujo abandono da lei comutativa permitiu aos matemáticos desenvolver outras Álgebras. O desenvolvimento da Álgebra Abstrata foi o que possibilitou foi o primeiro passo na axiomatização do conceito número, até então, este era concebido intuitivamente e pertencendo à ciência formal, que não permitia um princípio axiomático para seu fundamento.

Tão grandes foram estas transformações que, embora nosso foco principal nesta pesquisa seja a axiomatização do conceito número, não podemos deixar de mencionar as mudanças ocorridas, também, na forma de pensar e abordar os conceitos geométricos.

## I.2 - O desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas

Na Matemática, como em toda a ciência, tudo ocorre a respeito de um problema insolúvel, e com a Geometria não foi diferente. Um dos problemas enfrentados pelos gregos antigos foi construir de forma consistente a teoria das paralelas. As considerações abaixo são referências disso:

> Euclides enfrentou essa dificuldade definindo retas paralelas como retas co-planares que não se interceptam por mais que sejam prolongadas em ambas as direções e adotou como suposição seu agora famoso postulado das paralelas.( EVES, 2004, p. 539)

Matemáticos, sobretudo, os geômetras, ocuparam-se por quase dois mil anos em tentativas para demonstrar que o famoso postulado das paralelas pudesse ser um teorema deduzido a partir de outros nove *axiomas* e *postulados.* As tentativas para demonstrar o postulado das paralelas fecundaram o desenvolvimento da Matemática moderna, com a descoberta e construção de outras Geometrias.

Muitas das tentativas de demonstração do postulado das paralelas foram tornadas públicas. Entretanto, a maioria recaia em suposições implícitas a ele próprio. Uma demonstração que se distingue das demais como um passo consistente em direção à descoberta das Geometrias não-euclianas, foi dada por Saccheri em 1733.

Saccheri encantou-se com o método de Euclides nas demonstrações de suas teorias, o método da redução ao absurdo. A leitura dos *Elementos* de Euclides foi inspiração para a formalização de uma lógica demonstrativa que consistia na aplicação do método de redução ao absurdo no tratamento da lógica formal. Então, aplicou os procedimentos de Euclides para tentar demonstrar o postulado das paralelas, cujo trabalho resultou no livro intitulado: *Euclides ab omni naevo vindicatus*, (Euclides livre de toda imperfeição), publicado, em 1733, poucos meses após sua morte.

O modo como Saccheri pensou a demonstração do postulado das paralelas está expresso em,

> Saccheri aceita as vinte e oito proposições iniciais dos *Elementos* de Euclides que, como já observamos antes, não necessitam do postulado das paralelas para sua demonstração. Com a ajuda desses teoremas, ele empreendeu o estudo do quadrilátero ABCD, nos quais os ângulos A e B são retos e os lados AD e BC são iguais. (EVES, 2004, p.340)

Como já mencionado Saccheri conhecia os esforços de Nasir Eddin para provar o postulado quase meio milênio antes e, inspirado no método de *reductio ad absurdum* já aplicado por Euclides.

A forma como pensou a demonstração do postulado das paralelas está expressa,em :

> [...] começou com um quadrilátero birretangular isósceles agora chamado de "quadrilátero de Saccheri" – tendo lados *AD* e *BC* iguais entre si e ambos perpendiculares à base *AB.* Sem usar o postulado das paralelas ele mostrou facilmente que os ângulos de "topo" *C* e *D* são iguais e que há, portanto, somente três possibilidades quanto a eles, descritas por Saccheri como (1) a hipótese do ângulo agudo, (2) a hipótese do ângulo reto, (3) a hipótese do ângulo obtuso. Mostrando que as hipóteses (1) e (3) levam a absurdos, ele pensava estabelecer por raciocínio indireto que a hipótese 2 é uma conseqüência necessária dos postulados de Euclides com o das paralelas excluído.
> Saccheri sentiu pouca dificuldade para excluir a hipótese 3, porque ele assumia de modo implícito que uma reta é infinitamente longa. Da hipótese 1, ele derivou teorema após teorema sem encontrar dificuldades. (BOYER, 2003, p. 301-302)

Na verdade, ele estava construindo uma Geometria não-euclidiana; mas, por acreditar fielmente na Geometria de Euclides como a única merecedora de confiança, permitiu que essa crença interferisse no raciocínio que até então guiava seus trabalhos. Como na hipótese 1, não havia contradição ele destorceu o raciocínio até pensar que ela também levaria a um absurdo. Por isso, deixou de fazer o que teria sido, sem dúvida, a descoberta mais importante do século XVIII – a Geometria não-euclidiana (BOYER, 2003, p. 301-302)

Os argumentos iniciais de Saccheri para o desenvolvimento de suas idéias implicaram a existência de muitos teoremas, atualmente, clássicos, pertencentes às Geometrias não-euclidianas. Se suas idéias não tivessem caído em descrédito, ou seja, se ele não tivesse partido por um caminho que o conduziu às noções obscuras sobre os elementos infinitos, seria, hoje, reconhecido como o precursor das Geometrias não-euclidianas.

Alguns matemáticos apoiaram-se nas idéias de Saccheri e traçaram caminhos diferentes, como Johann Heinrich Lambert com a obra *Die Theorie der Parallellismo* e Adrien-Marie Legendre com *Éléments de la Géometrie*. Mesmo não obtendo sucesso, ambos contribuíram, de certa forma, para que o alemão Gauss, o húngaro Janos Bolyai e o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky formulassem a hipótese de que "o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais" (EVES, 2004, p. 541).

A admissão de que o postulado das paralelas não podia ser visto como os demais, fez com que aqueles matemáticos caminhassem em outra direção, embora a hipótese relativa ao ângulo agudo, na qual todos os seus predecessores depararam-se, era ainda a grande incógnita norteadora dos trabalhos.

A seguir, vejamos qual foi o caminho que conduziu efetivamente à descoberta das outras Geometrias denominadas autoconsistentes e quais os responsáveis pelo surgimento delas.

## I.2.1 - Os matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas

Tudo indica que Gauss participou desse episódio da Matemática; entretanto não publicou nada sobre o assunto e, sendo assim, o mérito do desenvolvimento da Geometria não-euclidiana foi atribuído aos matemáticos, Bolyai em 1832 e Lobachevsky entre 1829-1830.

De acordo com (BOYER, 2003, p. 359), Gauss durante a segunda década tinha chegado à conclusão que seria em vão tentar provar os postulados das paralelas feitos por Saccheri, que Geometrias diferentes da de Euclides eram possíveis; no entanto, não compartilhou suas idéias com ninguém apenas as formulou para si próprio.

A não publicação de Gauss incidiu na continuidade de tentar provar o postulado das paralelas. Entre os matemáticos, estavam o jovem Nicolai Ivonovich Lobachewsky (1793 – 1856) e o filho de um amigo de Gauss, Jonas Bolyai (1802 – 1860) concentrando esforços em tal prova.

A história nos leva a crer que o fato de Bolyai ser húngaro e Lobachevsky russo, associado à lentidão com que, antigamente, a informação era processada, implicou que eles não tiveram acesso aos escritos um do outro e que ambos construíram independentemente suas idéias.

Talvez Bolyai tenha se inspirado em seu pai, um professor, para estudar o postulado das paralelas, tema de seu interesse. Assim, ocorreu e em prazo curto chegou à conclusão que “do nada, eu criei um universo novo e estranho” (EVES, 2004, p.542). Esta frase aparece nos manuscritos de Bolyai que foram encaminhados a seu pai e este, por sua vez, publica-os, como apêndice (de 26 páginas) de sua própria obra.

Lobachevsky desenvolveu vida acadêmica, tendo iniciado como aluno e posteriormente, assumiu a posição de professor universitário, chegando a conquistar o cargo de reitor. Sua primeira publicação sobre o postulado das paralelas foi, em 1829, a obra *Kasan Bulletin* em russo, que não contou com a apreciação de seus conterrâneos e tão pouco entre matemáticos de outros lugares do mundo. Assim, inconformado com a depreciação de seu trabalho publicou mais duas obras, uma em alemão, em 1840, intitulada *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigação Geométrica sobre a Teoria das Paralelas) e outra, em francês, 1855, pouco antes de sua morte, nomeada *Pangéométrie* (Pangeometria).

Atualmente, a Geometria de Lobachevsky é um dos ramos frutíferos da Matemática, mas, como muitos matemáticos ele só veio a ser reconhecido após a morte. Contudo, a investigação a respeito do postulado das paralelas de Euclides, não se tornou evidente e inquestionável com Lobachevsky, foi sim mais um passo fundamental em direção a sua consolidação. Entretanto, outros matemáticos seguiram seus passos, e apresentaram em pouco tempo uma demonstração consistente da hipótese do ângulo agudo.

> A real independência do postulado das paralelas dos outros postulados da Geometria euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente quando se forneceram demonstrações da consistência da hipótese do ângulo agudo. Estas não demoraram a vir e foram produzidas por Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henri Poincaré e outros.(EVES, 2004, p. 543)

O próximo avanço na Geometria resultou do trabalho de Riemann, em 1854, que não considerou a infinitude da reta, mas, apenas a ilimitação da mesma, apoiando-se e ajustando alguns postulados da Geometria euclidiana e, com base na hipótese do ângulo obtuso, demonstrou a existência de outra Geometria não-euclidiana, a elíptica.

Muitas controvérsias existiram como sempre acontece com o surgimento de algo novo e com a Geometria não poderia ser diferente. As mesmas foram motivo de debates acalorados. Em 1871, Klein identifica a existência de três Geometrias: Geometria hiperbólica de Bolyai e Lobachevsky, Geometria parabólica de Euclides e, por fim, a Geometria elíptica de Riemann.

Toda revolução tem seus efeitos, sendo esse o caso da revolução ocorrida na Matemática nesse momento histórico. A seguir, vejamos alguns efeitos que pudemos detectar, sabendo-se que podem existir outros.

## I.2.2 - Efeitos da constatação da existência das Geometrias não-euclidianas.

Como a própria semântica do termo revolução sugere, são notáveis as mudanças advindas das transformações ocorridas no século XIX. É possível que algumas passem despercebidas a nossos olhos, mesmo porque nossa atenção está voltada à outra grande revolução do século XIX, que não a relativa à Geometria. Mesmo assim, mencionaremos aqui alguns aspectos importantes referentes ao período do surgimento das Geometrias não-euclidianas, um fato marcante da história.

A mudança mais notável foi tornar a *Geometria independente*[5] dos postulados e axiomas euclidianos. Com a demonstração da hipótese do ângulo agudo, abre-se outro caminho e, conseqüentemente, outra forma de demonstrar afirmações, libertando-se da realidade física e assumindo uma outra dimensão, a abstrata.

Há que se destacar, também, a *mudança na concepção de axioma e postulado*. Até então, a noção de axioma distinguia-se de postulado. A diferença entre eles era considerável, os postulados não se referiam às afirmações tão evidentes como os axiomas. Além disso, os postulados só eram aplicáveis a uma ciência específica e os axiomas, às mais gerais.

Conforme explícito em:

> Os postulados da Geometria tornaram-se, para os matemáticos, meras hipóteses, cuja veracidade ou falsidade físicas não lhes diziam respeito. O matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seu gosto

[5] Os grifos são para destacar os efeitos causados com o surgimento das Geometrias não-euclidianas.

> desde que eles sejam consistentes entre si. As características de "auto-evidencia" e "veracidade" atribuídas aos postulados desde os tempos dos gregos deixaram de ser consideradas pelos matemáticos. (EVES, 2004, p. 544)

A mudança na concepção dos matemáticos em relação aos dois termos, de certa forma, liberta-os da limitação à realidade do espaço físico. Assim, a Geometria euclidiana foi desenvolvida baseada em uma ciência experimental e de observação, restrita, então, ao espaço físico, o que não mais era suficiente para avançar no desenvolvimento de outros conceitos, de uma forma mais ampla, requerida por conceitos abstratos. Como é o caso das Geometrias não-euclidianas; a libertação possibilitou aos matemáticos a construção de Geometrias artificiais marcando, assim, um momento de intensa mudança no modo de pensar e provar as constatações referentes aos objetos geométricos.

No período do desenvolvimento das idéias de Lobachevsky, a própria *definição de espaço* é desfigurada, surge, também, como um dos efeitos do desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, que ora ressaltamos. A noção de espaço passou a ser compreendida do ponto de vista relativo, ou seja, o espaço ora existe fisicamente, ora não. Isso significa que depende dos aspectos e das características das entidades manipuladas e o que se deseja delas pode ser: uma demonstração, a existência, a aplicação, etc.

A existência das Geometrias não-euclidianas põe em questionamento o próprio pensamento filosófico da época, concernente a Kant, acerca da noção de espaço que matemáticos seguiam fielmente como uma única verdade. A definição de Kant está expressa em,

> O espaço é uma representação necessária *a priori*, que serve de fundamento para todas as intuições externas. Nunca se pode formar a representação da inexistência do espaço, ainda que se possa perfeitamente pensar que, no espaço não haja objeto algum. O espaço deve ser, portanto, considerado como a condição da possibilidade dos fenômenos e não como uma determinação dependente deles: é uma representação *a priori* que está necessariamente no fundamento dos fenômenos externos" (KANT apud ABBAGNANO, 2000, p. 351)

Na época do surgimento da Geometria de Lobachevsky, a teoria kantiana prevalecia e tinha uma visão intuicionista da noção de espaço. Assim, acreditava-se que os postulados da Geometria Euclidiana eram juízos *a priori*, impostos ao espírito humano e sem eles era impossível pensar a noção de espaço. A Geometria de Lobachevsky mostra a independência dos postulados, sendo assim, contrapõe-se à teoria de Kant.

Os surgimentos das outras Geometrias mostram claramente a *ruptura no modo de pensar os conceitos matemáticos*, expressos em,

> A criação das Geometrias não-euclidianas, puncionando uma crença tradicional e rompendo com um hábito de pensamento secular, desferiu um golpe duro no ponto de vista da verdade absoluta em Matemática. Nas palavras de Georg Cantor "A Essência da Matemática está em sua liberdade". (EVES, 2004, p.545)

A Geometria de Lobachevsky foi a ponta do *iceberg que surgiu durante o século XIX*, as mudanças foram significativas do ponto de vista conceitual, filosófico e epistemológico.

As próprias questões dos fundamentos no que tangem ao aspecto epistemológico dos conceitos, necessitaram de revisões e, conseqüentemente, novas formas de abordagem dos conceitos matemáticos.

O desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas proporcionou um espaço muito mais amplo para que matemáticos pudessem trabalhar as noções no aspecto cognitivo. Assim, abriram-se caminhos para o desenvolvimento de novos conceitos e, até mesmo, novos ramos da Matemática. Um exemplo é a Topologia e, em particular, a Topologia da reta.

## I.3 – O desenvolvimento da Álgebra Abstrata

Os trabalhos de Grassmann revelaram a possibilidade de axiomatizar o conceito de número natural. O desenvolvimento de uma teoria que possibilitou a construção de uma abordagem do conceito – número natural – cujo princípio foi o axiomático, muito nos interessa, pois sabemos que, antes de 1861, número era concebido como um conceito bem definido e perfeito, não necessitando de qualquer alteração. Em 1861, com a publicação de um livro didático Hermann Grassmann refere que número natural é um objeto matemático, deixando de ser um presente de Deus. Grassmann estava bastante envolvido com o desenvolvimento de uma nova teoria, atualmente, conhecida como Álgebra Linear.

## I.3.1 - O contexto histórico do desenvolvimento da Álgebra Abstrata

Outro importante marco no desenvolvimento da Matemática foi a libertação da Álgebra das veias da Aritmética. Até o início do século XIX, a Álgebra era concebida como uma Aritmética simbólica, generalizadora de modelos, isso fazia com que suas raízes estivessem presas às da Aritmética dos números inteiros. Assim, prevaleciam as propriedades e os postulados definidos e aplicados no domínio dos números, o que significa que a Álgebra não existia, como uma entidade matemática, mas, como extensão da Aritmética.

O primeiro a enxergar a Álgebra sob outro prisma, foi George Peacock, em 1830, na Inglaterra, pois via as propriedades, tais como: comutativa da adição e multiplicação, associativa da adição e multiplicação e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, aplicadas aos números inteiros, como estruturas algébricas e aplicáveis a outros elementos diferentes dos habituais. Peacock foi o pioneiro a elaborar um estudo a respeito dos princípios fundamentais da Álgebra; que consistiu em tratá-la sob um princípio lógico, equiparando-a aos elementos de Euclides, por isso ficou conhecido como o "Euclides da Álgebra".

Ele entendeu duas maneiras distintas de tratar a Álgebra, Álgebra aritmética e a Álgebra simbólica. Os elementos da Álgebra aritmética são números e, suas operações são as da Aritmética; ao passo que a Álgebra simbólica é uma ciência que lida com as combinações de sinais e símbolos de acordo com certas leis que são totalmente independentes dos valores específicos dos símbolos. (BOYER, 2003, p. 400)

Esta nova visão possibilitou o avanço no vasto ramo da Matemática, que é importante para diversos campos que dela se utilizam. Vejamos como Peacock entendia as duas formas de ver a Álgebra,

> [...] distinguia entre o que chamava Á*lgebra aritmética* e Á*lgebra simbólica*. A primeira era considerada por ele como estudo resultante do uso do símbolo para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como os de adição e multiplicação, aos quais se podem sujeitar esses números. Assim, na Álgebra aritmética, certas operações são limitadas por sua aplicabilidade. Numa subtração, a – b, por exemplo, devemos ter a > b. A Álgebra simbólica de Peacock, por outro lado, adota as operações da Álgebra aritmética, mas ignora suas restrições. (EVES, 2004, p. 547)

A extensão da *Álgebra aritmética* à Á*lgebra simbólica*, era justificada por Peacock por meio de um princípio, o princípio da permanência das formas equivalentes, que lembra o princípio da preservação das leis formais, formulado pelo matemático francês F. J. Servois. (1767 – 1847). Vejamos:

> Qualquer forma equivalente a outra, quando expressa em símbolos gerais deve continuar equivalente, seja o que for que esses símbolos denotem.
> Reciprocamente:
> Qualquer forma equivalente que pode ser descoberta na Álgebra aritmética considerada como ciência da sugestão, quando os símbolos são gerais em sua forma, embora específicos em valor, continuará a ser uma forma equivalente quando os símbolos forem gerais em natureza assim como em forma. (BOYER, 2003, p.400)

O princípio de permanência das formas equivalentes foi considerado um conceito importante da Matemática, e teve um papel histórico significativo no desenvolvimento inicial da Aritmética do sistema de números complexos, e a extensão das leis de potenciação aplicada a expoentes inteiros positivos e estendida a outros mais gerais.

Vejamos uma aplicação do princípio,

> Na teoria dos expoentes, por exemplo, se $a$ é um número racional positivo e $n$ é um inteiro positivo, então $a^n$ é, por definição, o produto de $n$ fatores iguais a $a$ . Dessa definição decorre facilmente que, para quaisquer inteiros positivos m e n, $a^m a^n = a^{m+n}$. Pelo princípio de formas equivalentes, afirmava Peacock que na álgebra simbólica se tem, então, $a^m a^n = a^{m+n}$, não importa de que natureza possam ser a base $a$ e os expoentes $m$ e $n$. (EVES, 2004, p. 547)

Atualmente, o princípio da permanência das formas equivalentes não é mais relevante ou mesmo estudado, porém direciona muitas ações na Matemática, por exemplo , quando queremos generalizar alguns conceitos, temos o cuidado de averiguar, em um contexto mais amplo, se este conceito preserva as propriedades daquilo que queremos generalizar.

Outros matemáticos seguiram o exemplo de Peacock e avançaram com estudos sobre os fundamentos da Álgebra. Entre eles, temos: Gregory que em uma publicação, em 1840, enfatizou as leis comutativas e distributivas da Álgebra. Augusto de Morgan, cujo tema central de estudo foi a propagação da Álgebra como estrutura, que contribuiu com o desenvolvimento da Álgebra organizada por postulados.

Dois grandes nomes, cujas produções intelectuais impulsionaram de vez a desvinculação da Álgebra da Aritmética, logo a sua independência, Hamilton e Grassmann. Vejamos um relato sobre o trabalho deles,

> [...] o matemático irlandês William Rowan Hamilton ( 1805-1865) e o matemático alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877) tinham publicado resultados de grande alcance , resultados esses que levaram a libertação da álgebra , da mesma maneira que as descobertas de Lobachevsky e Bolyai levaram a libertação da Geometria, e que abriram as comportas da álgebra abstrata.(EVES, 2004, p. 547)

Ambos contribuíram muito para o desenvolvimento desse ramo da Matemática, entretanto não foram, tão reconhecidos, sobretudo Grassmann, em razão da generalidade com que escrevia; tinha consciência de que seu resultado diferia muito dos estudos da época e ansiava pela compreensão de seus contemporâneos, a qual só veio aparecer muito mais tarde. Nas palavras do próprio Grassmann, observamos esta preocupação,

> Na exposição de uma nova ciência, é absolutamente imprescindível, para que se reconheça sua posição e seu significado, mostrar suas aplicações e sua relação com temas análogos. Para isto, também, deve servir a introdução. Esta é de natureza bem mais filosófica e, ao havê-la separado do conjunto de toda a obra, minha intenção foi não atemorizar os matemáticos com uma forma filosófica. Porque existe, ainda, entre os matemáticos, e, em parte, não sem razão, certa aversão contra as disquisições filosóficas sobre os objetos matemáticos ou físicos; [...][6] ( GRASSMANN, 1947, p.17-18)

Grassmann sabia da necessidade da apreciação por parte dos matemáticos de seu trabalho, só isso lhe traria o reconhecimento, sabia também do surgimento de um novo ramo da Matemática.

Ele difere de Hamilton, no sentido de que este trabalhava o aspecto específico dos quatérnios, enquanto ele trabalhava no sentido mais geral. Hamilton abandonou a lei comutativa para consolidar as noções dos quatérnios, exigida pelo próprio desenvolvimento do conceito. Surge, então, uma Álgebra não comutativa, um espanto para época, conseqüentemente, surge, também, o seguinte questionamento: Como aceitar uma Álgebra não comutativa? A indignação não para por ai, pois Grassmann foi muito mais além, mais geral e abstrato, seu trabalho consistia em estender as idéias de Hamilton não só para $R^4$ e, sim, para $R^n$.

Passamos a discutir no tópico seguinte os processos para a consolidação do nascimento da Álgebra abstrata, observando o contexto histórico e as controvérsias que os permeiam.

---

[6] En la exposición de una nueva ciencia es absolutamente imprescindible, para que se le reconozca su posición y su significado, mostrar sus aplicaciones y su relación con temas análogos. Para esto también debe servir la introducción. Es ésta de naturaleza más bien filosófica y al haberla separado del conjunto de la obra, fué mi intención no atemorizar a los matemáticos con una forma filosófica. Porque existe todavía entre los matemáticos, y en parte no sin razón, cierta aversión contra las disquisiciones filosóficas sobre objetos matemáticos o físicos (…).

## I.3.2 - A consolidação da Álgebra abstrata

No início do século XIX, a Álgebra era tratada como uma Aritmética simbólica, ou seja, generalizadora de modelos, cuja noção da Aritmética prevalecia sobre a incógnita ou variável (até hoje, no ensino médio e início do superior, a Álgebra é ensinada usando esta concepção)[7].

Na passagem do século XIX para o XX, esta situação muda de figura, com o surgimento de uma Álgebra diferente da habitual, denominada Álgebra abstrata. O passo inicial foi dado por Peacock com a distinção entre a Álgebra usada na Aritmética e a Álgebra estrutural. Hamilton continua superando a idéia de existir uma Álgebra que não atendesse às exigências das relações e propriedades usadas na mesma. Grassmann segue no sentido de generalização dos trabalhos de Hamilton. Na concepção de Hamilton, a Matemática era constituída, tendo por base as noções de espaço e tempo. Esta concepção aparece em uma de suas primeiras publicações, na qual o espaço e o tempo estão intrinsecamente ligados. Daí, a Geometria estudaria o espaço e a Álgebra seria o estudo do tempo. É, também, norteado por esta concepção que ele introduz o produto entre pares ordenados: (a, b). (c, d) = (ac – bd, ad + bc), combinando dados relativos ao espaço e ao tempo.

A idéia de que os números complexos eram pares ordenados de números reais, já estava presente nas representações gráficas dos trabalhos de Wessel, Argand e Gauss, porém nunca explicitada, com tanto rigor e perceptividade. Hamilton foi o precursor da sistematização e da desmistificação de que o número complexo era um conceito híbrido. É o que se deduz de: "Dessa forma, eliminou-se a aura mística que cercava os números complexos, pois não há nada místico num par ordenado de números reais. Esse foi um grande feito matemático de Hamilton". (EVES, 2004, p. 549)

[7] Para uma visão didática do assunto ver: *As idéias da álgebra*, do The National Council of Teachers of Mathematics (1995).

A evolução de uma ciência, assim como da Matemática pode ocorrer a partir do questionamento de um determinado conceito, já existente, porém não tão claro. Hamilton, assim, agiu quando percebeu que o conjunto de números complexos adequava-se aos estudos de vetores e de rotações no plano. A investigação da suposta adequação fez com que ele descobrisse e propusesse coisas inusitadas na Matemática. Foi quando definitivamente percebeu a necessidade de abandonar a lei comutativa para construir algo novo e propôs diversas Álgebras tão consistentes quanto à Álgebra habitual e que não, necessariamente, têm de valer as leis ou relações válidas na mesma.

O grande feito de Hamilton surgiu como um *insight,* ele refletia muito sobre suas idéias, porém as forças contrárias à sua própria consciência não o deixavam aceitar a possibilidade da existência de uma Álgebra em que a x b fosse diferente de b x a. Isso fez com que ele permanecesse bastante tempo com a questão, em suspenso, quando num átimo percebeu que se adotasse ao invés de ternas (a, b, c), quádruplos ordenados ( a, b, c, d ), poderia provar que o sistema dos números reais e de números complexos constituir-se-iam quatérnios. Para provar isso, definiu que, dois quádruplos (a, b, c, d) e ( e , f, g, h ) seriam iguais se a = e, b = f, c = g e d = h. Definiu a adição e multiplicação de quatérnios, conforme seu propósito e demonstrou que, para a adição de quatérnios, vale a lei comutativa e associativa e que, para a multiplicação verificavam-se as leis associativa e distributiva em relação à adição e que não é aplicável a lei comutativa da multiplicação.

Então, a Álgebra já não estaria mais presa aos conceitos puramente da Aritmética dos números reais, uma vez abandonada uma das leis que claramente era válida nesse universo.

Hamilton mostrou-se bastante versátil, porém não é muito citado atualmente. Entretanto, devemos destacar que sua contribuição foi de fundamental importância para o desenvolvimento da Álgebra em um sentindo amplo.

O desenvolvimento da Álgebra obteve um estágio ainda mais avançado com os trabalhos de Hermann Grassmann, trabalhos estes que, como os de

Hamilton não são mencionados enfaticamente, também, foram de suma importância para o desenvolvimento da Matemática de um modo geral.

Grassmann foi grande, por várias razões, entre elas, a de ter a capacidade de atribuir generalização e abstração aos objetos matemáticos. Pautado em noções simples como igualdade e união de magnitudes, ele mostra quão a Matemática é geral e abstrata, atingindo pontos até então intocáveis.

Em 1844, com a publicação de sua obra *Ausdehnungslehre* generaliza a Álgebra dos quatérnios de Hamilton, pois adota um sistema de n dimensões, isto é, um conjunto ordenado de n números reais, ao invés dos quádruplos. Nesse sistema, os elementos, denominados hipercomplexos, são indicados por $(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n)$, sendo $(x_1, x_2 ... x_n)$, uma n-upla de números reais e ($e_1$, $e_2$, ... $e_n$) as unidades básicas de sua Álgebra. Ele define a adição e a multiplicação de dois elementos do sistema, procedendo da mesma forma que com os polinômios.

Os passos iniciais de Peacock, a possibilidade de abandonar a lei comutativa vista por Hamilton e a generalização apresentada por Grassmann são causadores de mudança de rota em diversos ramos da Matemática, entre eles, a Análise e a Álgebra Linear.

As Álgebras não-comutativas surgem; entre elas, podemos citar uma bastante usual, desenvolvida por Cayley, a Álgebra das matrizes associadas a transformações lineares. Cayley, muito próximo da forma como respectivamente Hamilton e Grassmann introduzem a Álgebra dos quartérnios e a Álgebra Abstrata, provou também que, para as matrizes, a adição satisfaz as propriedades associativa e comutativa, a multiplicação satisfaz a associativa e distributiva em relação à adição e, entretanto, para a multiplicação de matrizes não é válida a comutatividade.

Vejamos como o historiador Eves (2004) relata esse período,

> Desenvolvendo álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, Hamilton, Grassmann e Cayley abriram as comportas da álgebra abstrata. De fato, enfraquecendo ou suprimindo vários postulados da álgebra usual ou substituindo um ou

> mais postulados por outros, consistentes com os demais, pode-se estudar uma enorme variedade de sistemas. (p. 553)

As descobertas trazidas à tona anteriormente mostram o quão foi importante para o desenvolvimento da Matemática a virada do século XIX para o século XX, o tal reconhecimento de *idade de ouro* da Matemática está justificado nessas transformações. Matemáticos mudaram de posturas e concepções relativamente ao próprio objeto desta ciência, a maneira de refletir sobre as construções matemáticas teve outro rumo, matemáticos começaram a refletir sobre suas próprias construções mentais. As transformações refletem um momento muito importante da Matemática, expresso em:

> A maior parte desse trabalho deu-se no século XX e reflete o espírito de generalização e abstração que prevalece atualmente na Matemática. A álgebra tornou-se o vocabulário da Matemática dos dias de hoje e foi apelidada "a chave-mestra da Matemática". (EVES, 2004, p. 553)

De acordo com Hermite, os entes matemáticos, no caso os das Álgebras não-comutativas e das Geometrias não-euclidianas já existiam. Foi perambulando pelas veias da Geometria e da Álgebra, em uma espécie de mundo sombrio e eterno que matemáticos, como os citados acima, depararam-se com descobertas significativas e anunciaram-nas ao mundo. Vejamos como expressa a existência das entidades matemáticas,

> Hermite era um crente declarado na existência desse mundo sombrio da Matemática. Para ele, os números e suas bonitas propriedades sempre tiveram existência própria e vez por outra algum Colombo da Matemática depara-se com algumas dessas propriedades já existentes e anuncia sua descoberta ao mundo. (EVES, 2004, p. 564)

Em seguida, apresentadas de forma sintetizada as possíveis conseqüências que podem acontecer em qualquer transformação brusca, neste caso, o da Álgebra.

## I.3.3 - Conseqüências da estruturação da Álgebra Abstrata

Não esperamos aqui esgotar o tema, mas buscamos apresentar as conseqüências mais significativas para este trabalho.

Como já mencionamos acima, a *ruptura do vínculo com a Aritmética* foi notável no surgimento da Álgebra estrutural. A Álgebra deixou de ser um artefato para provar as propriedades dos números e sua generalização e torna-se um objeto importante de estudo, pois garante a evolução de diversos conceitos matemáticos.

Outro aspecto relevante foi *o conforto* que o trabalho de Hamilton proporcionou aos matemáticos, eles se sentiam muito mais confortáveis com a representação do sistema de números complexos na forma de pares ordenados de números reais ou como coordenadas do plano.

O poder de *generalização e abstração* que propiciou o trabalho de Grassmann mostra o quão geral e amplo é o mundo da ciência Matemática, com reflexos em diversas ciências que dela dependem de alguma forma.

O *abandono da lei comutativa* foi um fator decisivo para levar Hamilton a ser considerado o pioneiro no desenvolvimento de várias Álgebras diferentes da Álgebra da Aritmética. Entre elas, podemos mencionar: a Álgebra das matrizes, das booleanas, dos complexos, dos anéis, dos espaços vetoriais, etc. Além do surgimento de Álgebras não associativas, como, por exemplo, a Álgebra de Lie e a de Jordan.

# Capítulo II

## O CONTEXTO HISTÓRICO EM QUE GIUSEPPE PEANO ESTAVA INSERIDO

No capítulo anterior, mostramos dois grandes movimentos na Matemática, na Geometria e na Álgebra. A Análise também passa por um processo intrincado de transformações que ficou conhecido como a *aritmetização da Análise.* Neste contexto, Giuseppe Peano (1858-1932), autor definitivo do processo da axiomatização do conceito de número está inserido, assim como Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918), cujos trabalhos foram de suma importância para o desenvolvimento da Matemática no século XX.

### II.1 - A aritmetização da Análise

No século XIX, ocorreram transformações significativas para a Matemática no campo da Análise, cujos resultados são a generalização e a adoção de uma base abstrata para seus fundamentos, cujo desenvolvimento anterior baseava-se na intuição geométrica.

Os matemáticos movidos pela aplicabilidade dos conceitos fizeram uso deles de forma incoerente porque, muitas vezes, foram guiados somente pela intuição; o que os levou a levantar questões como: as bases da Análise estão bem delimitadas? Há que se rever os fundamentos desse ramo?

Estes questionamentos faziam sentido pois a base da Análise era sustentada pelo sistema de números reais e este, por sua vez, foi construído, até então, por um processo guiado pela intuição geométrica, assim não garantia sua legitimidade.

Em 1817, Bolzano, movido pela inquietação pela falta de uma definição precisa de *número real,* foi um dos primeiros a sentir a necessidade do rigor na Análise, sendo chamado por Klein ”o pai da aritmetização” (BOYER, 2003, p. 388); entretanto seus trabalhos não o confortaram, pois não conseguiu obter êxito em suas idéias.

Em 1754, Jean-le-Rond d’Alembert (1717-1783) observou a necessidade de uma teoria dos limites, que seria como a cura para o estado insatisfatório a que os fundamentos da Análise estavam submetidos. Entretanto, até 1821, não se verificou o desenvolvimento desta teoria, o que mostra que não obteve êxito em suas idéias, embora tenha contribuindo com sua sinalização.

Outro passo em direção à construção do rigor na Análise foi dado por Joseph Louis Lagrange (1736-1813), um ítalo-francês que também não obteve sucesso, pois, seu trabalho refere-se à representação de uma função por uma expansão em série de Taylor, o que requeria clareza nas questões sobre divergência e convergência da série, o que Lagrange não conseguiu. No entanto, seus estudos contribuíram para o início do processo de distanciamento entre o intuicionismo e o formalismo da Análise.

No século XIX, o corpo de conteúdos da Análise começa a crescer no sentido literal da palavra, sem que suas bases estivessem bem fundamentadas.

A evolução de um conceito requer fundamentos consistentes. Os protagonistas desse processo sentem-se no dever de apresentá-los. No caso da Análise, isso não ocorria, pois ela era centrada no sistema dos números reais que não estava rigorosamente construído.

Em 1821, o francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) atendo-se às idéias de d’Alembert consegue desenvolver a teoria dos limites, tão importante para a Análise, pois a definição dos conceitos de continuidade, de diferenciabilidade e de integrabilidade de função dependia dessa teoria. Além do mais, o conceito de limite possibilita falar em séries convergentes e divergentes. De fato, Cauchy, contribuiu com a Análise, dando um passo importante em sua constituição, como ramo da Matemática, mas até ele as bases da Análise ainda eram centradas nas intuições humanas.

Em 1874, o alemão Karl Weierstrass foi o pioneiro ao dizer que o sistema de números reais precisava ser construído rigorosamente, pois toda Análise sustentava-se nele e tratou de fazê-lo. Assim, defendeu um programa para tornar o sistema de números reais rigoroso e com isso acarretar que tudo na Análise que dele decorresse, inspirasse segurança. Weierstrass com seus trabalhos consolida o processo da aritmetização da Análise. Podemos encontrar traços desse fato em,

> Esse notável programa, conhecido como aritmetização da Análise, revelou-se difícil e intricado, mas acabou se concretizando através de Weierstrass e seus seguidores, e hoje a Análise pode ser deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracteriza o sistema dos números reais. (EVES, 2004, p. 611)

O processo de aritmetização da Análise só se consolidou quando os matemáticos tiveram a possibilidade de enxergar os números reais, como *estruturas mentais* e não como grandezas intuitivas dadas, caminhando assim no mesmo sentido da descoberta das Geometrias não-euclidianas e das Álgebras Abstratas. No sentido de que na Álgebra deixou-se para trás uma propriedade, para avançar no desenvolvimento de novos conceitos; na Geometria, a tentativa de demonstrar o postulado das paralelas como um teorema evidencia a existência de outras Geometrias, senão a euclidiana, com base na demonstração da hipótese do ângulo agudo e na Análise quando se vêem livres da intuição geométrica, conseguem solo fecundo para comportar o crescimento da Análise.

É interessante observar como a Ciência Matemática evolui. Vimos que muito se ganhou com a investigação profunda, dos fundamentos da Análise, pelos matemáticos, se não bastasse isso, os próprios fundamentos da Análise colocam mais questões. Questões essas que fazem com que os matemáticos se empenhem na busca da compreensão, admissível à mente humana. É o assunto que norteia nosso trabalho e direciona nossos passos, cuja discussão iniciamos no próximo item.

## II.1.1 - Responsáveis pelo processo da aritmetização da Análise

Se não bastasse todo o intrincamento em que a Análise foi envolvida mediante seu crescimento notável, tornou-se um corpo tão denso em tão pouco tempo. Para garantir sua permanência e sua veracidade, matemáticos imergiram em seus fundamentos por um longo período.

As questões que se seguem, estão inseridas nesse contexto. O sistema dos números reais será suficientemente consistente para servir de base para vários ramos da Matemática? Se não para todos ou, pelo menos, para quase todos? Se o sistema de números reais não for consistente, colocará em dúvida a própria consistência da Matemática. Talvez estas reflexões, além de outras, tenham conduzido os matemáticos a buscar uma forma para mostrar a consistência dos números reais. O historiador Eves (2004) expressa assim esta dependência,

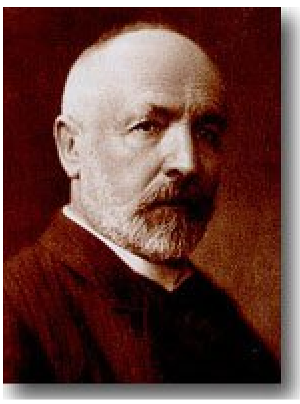
> De fato, pode-se afirmar hoje que, essencialmente, a consistência de toda Matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais. Nisso reside a tremenda importância do sistema dos números reais para os fundamentos da Matemática. ( p. 611)

Peano sempre se envolveu com as questões dos fundamentos, assim objetivava revisar os fundamentos dos números reais, com vista à procura da constituição de uma base sólida para esses números, sustento de toda Matemática. Neste contexto, além de Peano, também, Dedekind e Cantor estavam inseridos no estudo dos fundamentos dos números reais. Eles conseguem mostrar que os números reais repousam sobre a base mais elementar da Matemática, isto é, no sistema dos números naturais. Assim sendo, o sistema dos números reais pode ser deduzido de um conjunto de postulados admitidos para o sistema dos números naturais.

Para tal proeza Peano, Dedekind e Cantor despendem um esforço inigualável em torno da teoria dos conjuntos, na qual inserem os números naturais e reais. Em seguida, vejamos as contribuições individuais.

## II.1.2 – A contribuição de Georg Cantor na aritmetização da Análise

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, foi um dos matemáticos que vivenciou a virada do século XIX para XX, nasceu em S.Petersburgo, Rússia, em 1845, embora tenha ido para a atual Alemanha ainda muito jovem. Interessou-se pela complexidade da Matemática, suas idéias levaram-no a desenvolver ramos intricados e rejeitados para sua época, como o contínuo e infinito em Matemática, os quais contaram com a hostilidade de Kronecker, outro matemático de muita influência na época, que acreditava que os trabalhos de Cantor eram teológicos e não matemáticos.



Figura[8] I

[8] Acessado em http://library.thinkquest.org/22584/photo/cantor.jpg, acesso em 07/08/2006 às 16h33m.

Vejamos à luz da história como Eves (2004), relata seus passos iniciais na Matemática.

> Os primeiros interesses de Cantor voltavam-se para a teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas. A sutil teoria das séries trigonométricas parece tê-lo inspirado a se enfronhar nos fundamentos da Análise. Criou então uma bela abordagem dos números irracionais, que utiliza seqüências convergentes de números racionais e difere radicalmente do inspirado tratamento de Dedekind que, em 1874, começou seu revolucionário trabalho em teoria dos conjuntos e teoria do infinito. (p. 615)

De certo, o desenvolvimento da abordagem dos números irracionais foi o que estimulou Cantor a desenvolver um de seus mais nobres trabalhos que trouxe contribuições significativas à Matemática, pois desenvolveu a teoria do infinito e a teoria dos conjuntos. Tais teorias constituíam um novo ramo de pesquisa Matemática e, hoje, estão inseridas em quase toda ramificação da Matemática, com notáveis contribuições na Topologia e na teoria das funções reais.

De todos os seus trabalhos o que mais gerou controvérsias entre os matemáticos foi a teoria do infinito; com esta teoria propiciou um salto qualitativo no estudo dos números reais. A discussão principal era a respeito da existência de dois tipos de infinito: o potencial e o atual. O infinito "potencial" era consideravelmente aceito, mas, o "atual" das quantidades infinitas, não.

Outra perspectiva desenvolvida por ele foi a de que o "número" de elementos de dois conjuntos infinitos não deveria ser necessariamente o mesmo, isto é, poderia haver um conjunto infinito que tivesse "mais" elementos que outro também infinito. Aqui vale observar que o significado de dois conjuntos terem o mesmo número de elementos, quer dizer que existe uma correspondência biunívoca entre eles e que um ter mais elementos que o outro significa a existência de uma injeção entre eles, mas, não de uma sobrejeção.

Cantor inspirou-se nas noções em torno de conjuntos numéricos e pontos para criar a Teoria dos Conjuntos. Preferia usar a palavra transfinito no lugar de infinito para escapar da interpretação negativa do termo. Chamou de enumerável os conjuntos que podiam ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais, evidenciando que este é o “menor” dos conjuntos infinitos.

Em 1874, estabeleceu que o conjunto dos números racionais é enumerável e, mais tarde, em uma carta a Dedekind (amigo mais próximo) relata seus trabalhos e a dedução de que o conjunto dos números reais não é enumerável, pois não pode ser posto em correspondência biunívoca com os naturais, demonstrando a existência de “quantidades” infinitas distintas .

Um pouco mais tarde provou que existem tantos pontos em um segmento de reta quantos em toda a reta, que existem tantos pontos em um segmento de reta quantos em um quadrado do plano. Estas idéias eram muito acentuadas e bastante complexas para ele mesmo. O que está expresso em uma de suas frases comovente. “*Eu vejo, mas não vejo”.*

Suas idéias referentes ao infinito e à teoria dos conjuntos foram tão originais e revolucionárias para a época que acabaram causando sérios problemas aos matemáticos. Ele próprio aponta a problemática em um de seus trabalhos.

> Estou consciente de que adaptando essas idéias estou me opondo à visão do infinito mais amplamente difundido em Matemática e das opiniões correntes sobre a natureza dos números. (CANTOR apud DURAN, 1996, p.273)

O aparecimento de alguns paradoxos perturbou-o, entre eles o que mais perturbou as suas idéias foi o paradoxo de Russell[9]que surgiu em torno da teoria

---

[9] O **paradoxo de Russell** foi descoberto por Bertrnd Russell, em 1901, um matemático britânico que prova que a teoria de conjuntos de Cantor e Frege é contradictória. Considere-se o conjunto *M* como sendo "o conjunto de todos os conjuntos que não se contêm a si próprios como membros". Formalmente: *A* é elemento de *M* se e só se *A* não é elemento de *A*. Enciclopédia virtual em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_de_Russell , acessado em 17/07/2006 ás 13h45m.

dos conjuntos, acrescido dos conflitos gerados entre os matemáticos com a idéia do infinito contribuíram para que passasse parte de sua vida com problemas psicológicos, morrendo finalmente em um hospital de doenças mentais de Halle, em 1918.

Em sua época, Cantor foi repudiado por seus contemporâneos, por tratar de conceitos inusitados e complexos; no entanto, os pesquisadores atuais encontram em seus trabalhos uma fonte de inspiração para prosseguir no caminho da ciência.

Passamos agora a observar os trabalhos de Dedekind, outro matemático que muito contribuiu para com o processo da aritmetização da Análise e conseqüentemente, com os avanços da constituição dos conceitos matemáticos.

### II.1.3 - Richard Dedekind e sua nobre e duradoura permanência na Matemática

Julius Wilhelm Richard Dedekind, matemático, alemão, nasceu em outubro de 1831 e iniciou sua trajetória acadêmica aos 17 anos. Até então, não havia mostrado habilidade com a Matemática, embora tivesse afinidade com a Física e Química. Em 1850, ingressou na Universidade de Göttingen. Contou com orientadores famosos na Matemática e na Física, como Moritz Abrahan Stern, Gauss e Wilhelm Weber, o físico. Deles recebeu uma base de cálculo, elementos avançados de Aritmética, estudos da geodésia e da Física experimental. Em 1852, Dedekind, com 21 anos recebeu seu grau de doutor por uma pequena dissertação sobre integrais eulerianas, muito elogiada por Gauss. Permaneceu em Göttingen por mais algum tempo estudando com Jacobi, Steiner e Dirichlet.

Dedekind deixa um legado, a todos os cientistas matemáticos com a obra prima – *Continuity and irrational numbers* – Continuidade e os números irracionais. É reconhecido até hoje pelos *cortes* de Dedekind, em que apresentou pela primeira vez uma sistematização dos números reais baseado na noção de corte.

Figura[10] II

Dedekind, também, acreditava que o conceito de limite deveria ser desenvolvido por meio da Aritmética, isto é, abandonando a intuição geométrica atingiria a uma construção rigorosa do conceito. Dessa forma, mostrou o desejo de afastar da Análise o intuicionismo e o formalismo que a cercavam. Podemos entender que o abandono mais uma vez da concepção solidificada, isto é, dos conceitos prontos e bem delineados em Matemática ( aqui as forças presentes do intuicionismo e formalismo) permitiram o desenvolvimento da mesma.

Em seus trabalhos, podemos referenciar os estudos sobre conjuntos infinitos nos quais se depara com uma definição de conjunto infinito incomum para a época. O conjunto é infinito se puder ser colocado em bijeção com uma de suas partes. Esta definição vem contrariar uma verdade até então admitida de que "o todo é sempre maior que suas partes" e se constitui um obstáculo epistemológico.

A teoria dos números irracionais, desenvolvida por Dedekind, pode ser vista como um dos fatores, inseridos no contexto de sanar a crise instaurada nos fundamentos a respeito das noções de incomensurabilidade, cujo produto foi a

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind acessado em 06/10/2006 às 18h24m.

consolidação e adoção do método axiomático na Matemática. Com o objetivo de relembrarmos, como foi instituída a crise em torno dos fundamentos, observamos as palavras expressas,

> A crise se desencadeou com a descoberta de que nem todas as grandezas geométricas da mesma espécie são comensuráveis; mostrou-se, por exemplo, que a diagonal e o lado de um quadrado não admite uma unidade de medida comum. Como a teoria pitagórica das grandezas se baseava na crença intuitiva de que todas as grandezas da mesma espécie deveriam ser comensuráveis, a descoberta de segmentos incomensuráveis provocou grandes transtornos. (EVES, 2004, p. 673)

O desenvolvimento da teoria dos números irracionais de Dedekind remonta aos trabalhos de Eudoxo que, 370 a.C, desfaz um nó atado, com o desenvolvimento da teoria das grandezas e proporções, cujo fruto foi uma das obras-primas da Matemática de todos os tempos. Vejamos como o historiador Eves (2004) relata a semelhança entre os trabalhos de Dedekind e Eudoxo,

> A notável abordagem dos incomensuráveis de Eudoxo pode ser encontrada no quinto livro dos *Elementos* de Euclides e coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais, dada por Richard Dedekind em 1872. (p. 673)

Dedekind talvez possa ser considerado como um dos matemáticos mais brilhantes dos últimos tempos. Com a publicação da obra intitulada *Continuidade e números irracionais*, em 1872, pela primeira vez apresentou um tratamento rigoroso do conceito de continuidade.

Galileu e Leibniz tinham julgado que a continuidade de pontos em uma reta é uma conseqüência da densidade da reta, o que significa que entre dois números sempre existe um terceiro. Entretanto, os números racionais têm essa propriedade e não constituem um contínuo. Foi buscando responder à questão, o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais, que Dedekind formula o princípio da continuidade dos números reais.

Em relação aos números racionais e à noção de continuidade, sua inquietação conduziu-o a uma reflexão sobre a questão, levando-o a concluir que a essência da continuidade está na divisão de um segmento. Assim, enunciou o seguinte princípio,

> Eu encontrei a essência da continuidade na proposição inversa, isto é, no seguinte princípio: Se todos os pontos da reta recaem em duas classes de modo que cada ponto da primeira classe permanece à esquerda de cada ponto da segunda classe, então existe aqui um e somente um ponto que produz essa divisão de todos os pontos em duas classes, isto divide a reta em duas partes. [11] (DEDEKIND, 1963, p. 11)

Dedekind estava confiante em sua descoberta, mas sabia ser impossível encontrar argumentos suficientes para produzir uma prova. Sabia que seu princípio deveria ser enunciado como um axioma. Observamos suas palavras em:

> Como já disse creio não errar admitindo que toda a gente reconhecerá imediatamente a exactidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuidade. A este propósito observo o que segue. Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da reta, isso me satisfaz ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar deste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da reta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que nós pensamos a continuidade da reta, que reconhecemos à reta a sua continuidade. (DEDEKIND, 1872, apud CARAÇA, 2003, p. 58)

Dedekind supôs que o domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais, o que hoje se chama o

[11] I find the essence of continuity in the converse, i.e., in following principle: "If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions".

*axioma*[12] *de Dedekind-Cantor*, em que pontos sobre a reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Isso significa que para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B tais que todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B existe um e um só número real que produz essa classificação.

O axioma ou postulado da continuidade de Dedekind pode ser enunciado, assim: *todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B).* (DEDEKIND, 1872 apud CARAÇA, 2003, p. 58)

Caraça (2003, p. 58-59) fornece exemplos da aplicação da noção de corte, primeiramente, sua observação é pertinente à compreensão. Vejamos, vamos então aplicá-lo ao conjunto $Q_0^+$ .

Coloca-se uma questão – será sempre possível definir, no conjunto $Q_0^+$ , o conceito de corte? Sim, basta que a – estar à esquerda de – em pontos, se faça corresponder – ser menor que – em números.

Assim, tem-se um corte no conjunto $Q_0^+$ , quando existirem duas classes (A) e (B) de números racionais tais que:

1) Todo número racional está classificado ou em (A) ou em (B);

2) Todo o número de (A) é menor que todo o número de (B).

Por exemplo, temos um corte quando colocamos numa classe (A) todos os números menores que 8 e o próprio 8 e numa classe (B) todos os números maiores que 8. Neste caso, 8 é o elemento que separa as duas classes.

Citamos agora outra questão fundamental da comparação que nos trouxe até aqui: do ponto de vista da continuidade, os conjuntos $Q_0^+$ e $P_0$ (pontos da reta) têm a mesma estrutura, como a têm do ponto de vista da infinidade, ordenação e densidade? Ou não?

[12] Quase pela mesma altura, o matemático alemão G. Cantor formulou a caracterização da continuidade por uma maneira semelhante; por isso, a este enunciado se chama, com maior propriedade, axioma da continuidade de Dedekind-Cantor. Nota de rodapé: CARAÇA, (2003, p. 58).

Responde-se à questão investigando se o conjunto $Q_0^+$ satisfaz também o axioma da continuidade de Dedekind-Cantor, isto é, se todo corte no conjunto $Q_0^+$ tiver um número em $Q_0^+$ a separar as duas classes. Vejamos em um exemplo simples que não é bem assim, pois no conjunto $Q_0^+$ existem cortes (A, B) que não têm elemento de separação. Vamos considerar uma repartição da seguinte forma:

> Na classe (A), colocamos todo número racional *r* cujo quadrado seja menor que 2, isto é, tal que $r^2 < 2$;
>
> E na classe (B), todo número racional *s,* cujo quadrado seja maior que 2, isto é tal que $s^2 > 2$.
>
> E agora verificar se esta repartição constitui um corte (A,B).
>
> Supondo o número 0,8. Como $0{,}8^2 = 0{,}64 < 2$ pertence à classe (A)
>
> $1{,}3^2 = 1{,}69 < 2$ pertence à classe (A)
>
> $2^2 = 4 > 2$ pertence à classe (B)
>
> $1{,}5^2 = 2{,}25$ pertence à classe (B)

Conseqüentemente, podemos ver que o critério de repartição abrange todos os números racionais, só lhe escapa o número, cujo quadrado seja igual a 2. que nos remete ao problema da monstruosidade na Aritmética – a saber, o da incomensurabilidade, pois não existe no conjunto dos racionais um número cujo quadrado seja 2. O corte existe, pois de $s^2 > 2 > r^2$ resulta $s > r$.

Então, concluímos que: o conjunto $Q_0^+$ não satisfaz ao axioma da continuidade de Dedekind-Cantor e, portanto, não é contínuo. A existência de cortes no conjunto $Q_0^+$ que não tem um elemento de separação em $Q_0^+$, é que possibilita a definição de número real. Expressa em,

> Chamo número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse

> número racional; se não existe tal número, o número dir-se-á irracional. (DEDEKIND apud CARAÇA, 2003, p. 60).

Dedekind observou que os teoremas fundamentais sobre limites podem ser provados rigorosamente sem apelo à Geometria. A Geometria que deu parâmetros para o desenvolvimento de uma definição conveniente do princípio da continuidade, agora precisava ser abandonada para ser introduzida a definição aritmética formal do conceito. Como apresentada anteriormente, a noção de *corte de Dedekind* no sistema de números racionais ou uma construção equivalente dos números reais torna-se, desta forma, a espinha dorsal da Análise, anterior a isto, era considerada a grandeza geométrica como sua base.

Os trabalhos de Dedekind tornaram-se uma pedra preciosa. Ele distinguiu-se de muitos outros matemáticos, pois teve seu reconhecimento em vida e presenciou sua teoria alastrando-se no meio acadêmico, com estudantes e professores apropriando-se dela para desenvolver os conceitos matemáticos. Existe uma anedota que diz que, Dedekind viveu vários anos depois de sua célebre introdução dos "cortes", quando a famosa editora Teubner deu como data de sua morte, o dia 4 de setembro de 1899, no calendário dos matemáticos. Dedekind enfrentou essa situação com muito humor, escrevendo ao editor que passara a data em questão em conversa estimulante com seu amigo Georg Cantor. Ele viveu ainda mais 12 anos.

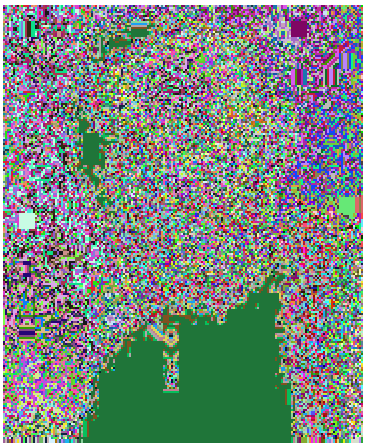
Podemos constatar aqui mais uma vez algo sendo abandonado nesse caso, a intuição geométrica, foi a partir dela que o trabalho de Dedekind consistiu-se. Presenciamos o fortalecimento da teoria dos conjuntos, como uma forma que busca explicar os fundamentos da Matemática. Para muitos, a teoria moderna dos conjuntos é a mais bela criação do espírito humano e é o que possibilita o entrelaçamento com as outras ciências. Expressa em,

> Ela enriqueceu, tornou mais claro e generalizou muitos domínios da Matemática, e seu papel no estudo dos fundamentos da Matemática é essencial. E constitui também um elo entre a Matemática, por um lado e a filosofia e a lógica por outro. (EVES, 2004, p. 662)

Aqui podemos resgatar alguns pontos que entendemos ser importantes na discussão do período da aritmetização da Análise com a finalidade de mostrar o quão complexa é a discussão em torno do conceito de número. Muitos matemáticos foram decisivos em determinados momentos; na axiomatização da Aritmética, podemos citar Giuseppe Peano, pois foi quem instituiu de vez a questão. No próximo tópico, traçaremos o percurso que fez de Peano autor dos axiomas da Aritmética.

## II.1.4 – Giuseppe Peano e a incumbência na axiomatização da Aritmética

Giuseppe Peano foi um lógico e matemático italiano, cujas inúmeras publicações científicas conferiram-lhe o mérito de ser um dos maiores matemáticos de sua época. Nasceu em Spinetta, Piemonte, em 27 de agosto de 1858. Produziu trabalhos na perspectiva filosófica e suas contribuições teóricas estão presentes nas áreas de Análise Matemática, Lógica, Teoria dos conjuntos, Equações diferenciais e Análise vetorial. Faleceu em Turim em 1932.



Figura[13] III

Na vasta lista de suas publicações, podemos destacar as obras *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* publicada em 1884 e "Lezioni di analisi

[13] Enciclopédia virtual-Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano acessado em 12/07/2006 às 15h22m.

infinitesimale" publicada nove anos depois, como sendo duas das mais importantes no desenvolvimento da teoria geral das funções, posterior aos trabalhos de Augustin Cauchy.

Em outra obra, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* publicada em 1887, introduziu os elementos básicos do cálculo geométrico e deu novas definições ao cálculo do comprimento de um arco e para a área de uma superfície curva. No livro *Calcolo geometrico,* de 1888, encontramos seu primeiro trabalho em Lógica Matemática. Ele é, sobretudo, conhecido pela criação de um sistema de símbolos que permite a descrição e o enunciado das proposições lógicas e matemáticas sem recorrer à linguagem verbal, apropriando-se ao máximo de uma simbologia. Podemos encontrar aqui uma distinção entre ele e Hermann Grassmann nesse aspecto; pois, Grassmann buscava uma harmonia entre as definições conceituais e expressões verbais.

No período em que atuou como professor assistente, Peano percebeu a necessidade de uma revisão dos fundamentos da Matemática. Baseado em suas aulas de Cálculo, decidiu lançar seu primeiro livro com o nome do mestre Genocchi sob o título *"Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale"* (Cálculo diferencial e princípios do cálculo diferencial) em 1884. Em 1887, Peano escreveu o livro *"Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale"* (Aplicação geométrica do cálculo infinitesimal).

Neste período, o movimento a favor da axiomatização, da Matemática teve grande impulso com Cantor e com o surgimento das geometrias não-euclidianas. A contribuição de Peano foi decisiva, originando, naturalmente, o desejo de uma axiomatização de toda a Matemática, isto é, o desenvolvimento dos postulados (axiomas) e definições que são bases do sistema matemático.

Em 1889, Peano propõe a axiomatização dos números naturais, na forma de panfletos, escritos em latim, "*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita"* (Princípios Aritméticos: Novo Método de Exposição*)*.

Em sua primeira versão, esta obra contém um sistema da Lógica Matemática, incluindo os famosos axiomas que definiram os números naturais em termos de conjunto, denominados de *axiomas de Peano*. A sua importância na Lógica e nos Fundamentos da Matemática foi imediatamente reconhecida.

Assim, foi por meio de cinco axiomas e três noções primitivas que Peano introduziu a série dos números naturais. E com essa forma, ele apresenta os números naturais de modo rigoroso e cria condições de sustento para os fundamentos dos números reais, dos quais a Álgebra e da Análise dependem.

Para instituir a axiomatização da Aritmética, Peano lança mão da linguagem simbólica, com o objetivo de atrair um grande público que seria composto de seus seguidores. Obteve sucesso, pois atualmente os axiomas estão presentes em todos os ramos da Matemática. Peano adotou uma linguagem formal contendo símbolos, tais como $\in$ ( pertence à classe de ), U ( soma lógica ou união), $\cap$ ( produto lógico ou intersecção) e $\supset$ ( contém ).

Os três conceitos primitivos definidos por Peano são – zero, número e sucessor – satisfazendo aos cinco postulados seguintes:

1. Zero é um número.
2. Se *a* é um número, o sucessor de *a* é um número.
3. Zero não é sucessor de um número.
4. Dois números cujos sucessores são iguais, são eles próprios iguais.
5. Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S, então, todo número está em S.

A similaridade entre seus trabalhos na Aritmética e os de Grassmann é notável, embora sem presenciar registros históricos atribuindo a Grassmann o mérito de ser o pioneiro na abordagem axiomática da Aritmética.  Sabemos que, em 1861, com a publicação do livro didático, intitulado *Lehrbrch der arithmetik*, Grassmann já apresentava uma abordagem axiomática do conceito de número, os mesmos axiomas definidos e adotados por Peano para a construção da

Aritmética. Talvez isso se deva ao fato de Grassmann jamais admitir que sua abordagem fosse constituída axiomaticamente.

Peano foi um discípulo de Grassmann, um dos primeiros a ater-se aos trabalhos de Grassmann. Seus trabalhos podem ser vistos como frutos da leitura do l'Ausdhenungslehre. Peano referenciou Grassmann com a publicação, em 1888, de *Calcolo Geometrico secundo l'Ausdhenungslehre di H. Grassmann e precedutto dalle Operozioni della Logica Deduttiva* (DORIER, 2000, p.31). No entanto, Peano só consegue mostrar os aspectos geométricos da teoria, não atingindo a essência da natureza de sua origem. Mesmo assim demonstra seu apreço pela obra de Grassmann, consegue resgatar conceitos já definidos por Grassmann em 1844, por exemplo, o de espaço vetorial que Grassmann chamou de sistemas lineares.

O tratamento de Peano é um tanto diferente de Grassmann, pois ele utilizou os termos da lógica e o rigor do formalismo, os quais eram conhecidos por Peano profundamente. Isso mostra que seus trabalhos concernentes à axiomatização dependeram muito de suas contribuições. Contudo, podemos salientar que a obra *l'Ausdhenungslehre* de Hermann Grassmann foi mais que uma fonte de inspiração. Em 1844, ele já havia construído uma abordagem da Aritmética, cujo princípio era definido pelas fórmulas fundamentais. Grassmann buscava um equilíbrio entre a abordagem sintética e analítica da Matemática muito mais do que uma formalização dos conceitos.

Além disso, vale lembrar que foi Grassmann quem trouxe para a Matemática a abordagem analítica dos conceitos. Por meio desta abordagem, conseguiu estabelecer novas relações e novos conceitos.

Não podemos deixar de reafirmar, Peano instituiu a axiomatização da Aritmética; no entanto, o precusor na axiomatização foi Hermann Grassmann, podendo ser confirmada pela leitura da obra *Lehrbrch der arithmetik*, publicada em 1861.

Conforme Boyer (2003, p. 415), Peano está entre os matemáticos que se interessavam pela Lógica Matemática, até mesmo, um dos mais conhecidos. Seu objetivo era semelhante ao de Frege, contudo, mais ambicioso. Esperava com seu trabalho *Formulaire de Mathématiques* (1894) desenvolver uma linguagem que contivesse a Lógica Matemática e todos os ramos da Matemática e com isso atrair um grande público. O que veio acontecer, resultando do fato de ele não usar uma linguagem metafísica e fazer opção por simbolos. Muitos desses símbolos são usados até hoje.

Peano é considerado como o fundador da Lógica Matemática, entretanto, é atribuída a Frege a paternidade da Lógica Matemática.

O nosso objetivo era de mostrar o contexto em que Peano estava inserido, quando instituiu de vez o conjunto dos números naturais, constituído pelo princípio axiomático. Encontrava-se (como muitos matemáticos) imergido em investigações profundas referentes aos fundamentos dos números reais. Nestas, ele constatou que o sistema dos números naturais é a base que fundamenta a existência dos números reais.

Vimos que toda a Matemática está centrada no sistema dos números reais e este repousa seu fundamento no conceito mais elementar, que é o sistema dos números naturais ou inteiros positivos.

# Capítulo III

## REFERÊNCIAS HISTÓRICAS DA VIDA DE HERMANN GRASSMANN E ELEMENTOS DE SUA CONCEPÇÃO DA MATEMÁTICA

### *III.1 – Referências Históricas*

Hermann Günther Grassmann nasceu em Stettin, 1809; era um matemático autodidata, totalmente, desconhecido pelos matemáticos de sua época. Em 1844, publicou parte de sua nova teoria *Die Ausdehnungslebre* (Teoria Geral das Formas) intitulada *Die Lineale Ausdehnungslebre.* Nela expressava que um novo ramo da Matemática estava surgindo e que não se limitava ao contexto geométrico. Assim, considerou a Geometria como sendo somente uma aplicação específica. A receptividade de seu trabalho foi ruim, pois ele era criticado pela: (...) "falta de clareza na sua apresentação, especialmente, em relação à extensa introdução filosófica a qual impediu muitos matemáticos de qualquer leitura mais aprofundada." [14](DORIER, 2000, p. 18)

Grassmann foi um ser humano versátil, o que está expresso em,

> Foi um homem de preocupações intelectuais muito amplas. Foi não só professor de Matemática, mas também de religião, Física, Química, Alemão, História e Geografia. Escreveu sobre a Física, e compôs textos escolares de Alemão, Latim e Matemática. Nos tumultuados anos de 1848 e 1849 participou de um semanário político. Interessava-se por música, e na década de 1860 foi critico de ópera de um jornal diário. Preparou um tratado sobre filológico sobre plantas alemãs, editou um jornal missionário, investigou leis fonéticas, escreveu um glossário para o Rig-Veda e traduziu o Rig-Veda em versos,

[14] He was mostly reproached for lack of clarity in his presentation, especially regarding the long philosophical introduction that prevented most mathematicians from reading any further..

harmonizou canções folclóricas para três vozes, compôs seu grande tratado *Ausdehnungslebre* e criou nove de seus onze filhos.(EVES, 2004, p.556)

Sua formação pode ter sido influenciada por seu pai, Justus Grassmann, um matemático que pertenceu à *escola combinatória* de matemáticos no início do século. Ele muito aprendeu com seu pai e com os livros de sua própria biblioteca. Como vimos na citação, ele era apreciador da Matemática, da música e das línguas. Era um lingüista e especialista em literatura sânscrita, ofício que foi sua válvula de escape, quando se decepcionou por não ter sido reconhecido na Matemática.

Figura[15] IV

Hermann Grassmann era modesto e humilde, nunca escondeu seu apreço pela Matemática, aspectos estes que presenciamos no prefácio de sua obra, o qual apresentamos no anexo I. Ele contribuiu para com a formação de seu irmão Robert Grassmann e seu filho Hermann Grassmann nascido em 1859, que também se tornou matemático. Ambos deram continuidade a seus trabalhos, prova disto, são as publicações por parte de Robert, de 1872 e 1891, e de um trabalho sobre Geometria Projetiva elaborado por seu filho.

---

[15] Disponível em:www.cimm.ucr.ac.cr/.../Cap20/Parte05_20.htm, acessado em: 06/10/2006 às 18h51m.

Almejava uma posição de professor universitário, pois acreditava que isto o favoreceria na elaboração de suas idéias e, conseqüentemente, na divulgação de sua nova teoria.

Por isso, Grassmann inúmeras vezes submeteu seus trabalhos à apreciação de especialistas, com o objetivo de adquirir uma cadeira entre os docentes universitários da época, mas eles não o compreendiam e, por conseqüência, rejeitavam-no. Kummer foi o matemático responsável em pôr um ponto final em sua carreira, dando um parecer desfavorável à sua teoria, que foi definitivo, fazendo com que Grassmann permanecesse como professor de escola secundária.

O significado de sua obra demorou até que fosse percebido e um dos motivos era a terminologia inusitada usada, além de tratar de assuntos com extrema generalidade em relação à extensão dos conceitos. (BOYER, 2003, 406).

Möbius foi o matemático que mais incentivou Grassmann a reescrever o *Ausdehnungslebre*, que publicou como uma reescritura em 1862. Não só a nova versão, mas também uma série de artigos publicados no Journal de Crelle em que ele deu seminários referentes a seus resultados. A estes feitos, podemos atribuir a responsabilidade na propagação de seu trabalho e, por meio deles, Grassmann conseguiu atrair um maior número de apreciadores de sua teoria.

No prólogo de sua obra, expressa a necessidade de ter um tempo livre para dedicar-se aos estudos referentes à Matemática, para ele isto seria o ideal, o que está expresso em:

> Também é motivo de esperar indulgência, o fato de que o tempo de que disponho é breve e esporádico, em virtude do cargo que ocupo, e o tal cargo tampouco me dá a oportunidade de receber notícias do campo dessa ciência ou, ainda, de assuntos relacionados a ela, o que representa a frescura que, como um sopro vital, deve animar ao todo para que este apareça como um membro vivente do organismo que é o conhecimento. (GRASSMANN, 1947, p. 19)[16]

[16] También es causa de esperar indulgencia, el hecho de que el tiempo de que dispongo es, en virtud del cargo que ocupo, breve y esporádico, y dicho cargo tampoco me da la oportunidad de recibir, mediante comunicaciones del campo de esta ciencia o aún de asuntos relacionados con ella, la frescura que como un soplo vital debe animar al todo para que éste aparezca como un miembro viviente del organismo que es el conocimiento.

O reconhecimento e a compreensão de sua obra, por parte dos matemáticos, seriam para ele o sopro vital para a continuidade de seus trabalhos. Podemos presenciar esta propagação a partir da publicação em 1867, do trabalho de Hankel sobre sistemas de números complexos que proporcionou a que Felix Klein conhecesse Grassmann. Klein escreveu a F. Engel em 1911:

> Como é bem sabido, Grassmann em sua *Ausdehnungslebre* é um geômetra afim mais do que projetivo. Isto se tornou claro para mim no fim do outono de 1871 e (além do estudo de Möbius e Hamilton e da elaboração de todas as impressões que recebi em Paris) levou à minha concepção de meu posterior Erlanger Program. (KLEIN, apud BOYER, 2003, p. 407)

Podemos dizer que William K. Clifford foi quem difundiu sua obra na Inglaterra e Josiah Williard Gibbs quem sustentou o *Ausdehnungslebre* nos Estados Unidos da América.

## III. 2 – Elementos da concepção de Grassmann da Matemática

O anseio e o desejo de ser compreendido por seus contemporâneos estão presentes em seus escritos, quando diz que de nada adiantam as palavras que não são compreendidas, "(...), com efeito, a maioria de tais estudos, sobretudo, os realizados por Hegel e sua escola, são de uma arbitrariedade e falta de clareza que anulam todos os frutos dos mesmos."[17]( GRASSMANN, 1947, p. 18)

Vimos que a primeira versão de sua obra *Die Lie Ausdehnungslehre* publicada, em 1844, contou com forte crítica em relação à maneira dele expressar-se, o que o levou a reescrevê-la e publicá-la em 1862.

[17] (…) en efecto, son la mayoría de tales estudios, sobre todo los realizados por Hegel y su escuela, de una arbitrariedad y falta de claridad que anulan todos los frutos de tales estudios.

Na obra publicada em 1862, isto é, a segunda versão, Grassmann define os conceitos e, imediatamente, passa a apresentar as aplicações, fez isso na tentativa de tornar claras suas idéias. A primeira versão foi criticada por carecer de clareza, já que Grassmann escrevia utilizando termos em alemão desconhecidos, até mesmo, pelos matemáticos.

A genialidade de Grassmann distanciava-o de todos, em razão da forma geral e abstrata com a qual escrevia e do que escrevia. Ele era erudito em línguas, talvez fosse essa a razão de sua dificuldade em escrever de modo simples, solicitado por todos que tiveram contato com a obra, um exemplo foi Kummer. Além disso, ele tinha uma visão avançada da Ciência Matemática, para a época.

Mesmo assim, em 1862, reescreve a obra na tentativa de adequar sua teoria ao mundo contemporâneo. Para isso, suprimiu o aspecto filosófico, o que era contra, pois julgava necessário em um estudo epistemológico, um novo ramo da Matemática, mas julgou que tal supressão era condição para facilitar a compreensão dos matemáticos. Era consciente das limitações dos matemáticos em relação aos aspectos filosóficos das teorias matemáticas e tratou de construir as demonstrações dos fatos de sua teoria por meio de aplicações, de uma forma bastante estruturada, adequando os termos e usando uma simbologia conhecida pelos matemáticos.

Contudo, nem assim obteve sucesso imediato. A abstração e a generalidade ainda não eram concebidas pelos matemáticos, que não compreendiam a originalidade de sua teoria, muitos, só viam os aspectos geométricos da teoria. (DORIER, 2000, p.18)

A Matemática ainda era realizada baseada na observação da experiência física, talvez se deva a isto a não compreensão da obra de Grassmann, pois os matemáticos faziam Matemática, apoiados nesse modelo de desenvolvimento da ciência, o que os impedia de romper com laços tão fortes.

Dorier (2000) salienta a importância de Grassmann:

> De fato, no contexto, da segunda metade do século XIX, quando novos tipos de vínculos foram estabelecidos entre a álgebra e a Geometria, Grassmann apresentou uma abordagem epistemológica muito original que antecipava, em muitas formas, resultados redescobertos somente na metade do século seguinte, além disso, apesar de certos aspectos frágeis as visões de Grassmann permanecem únicas, embora nossa compreensão da natureza da Álgebra Linear ainda possa ser enriquecida com uma análise minuciosa de sua contribuição. [18] (p.19)

Entre 1844 a 1862, foi um período muito frutífero para Grassmann, tempo em que reescrevia a sua obra; em paralelo, publicou 17 artigos científicos, nos quais contribuía com a Física e com a Matemática, sua pluralidade permitia-lhe transitar em várias vias. Assim, no aspecto político-social publicou material até sobre a evangelização da China.

Professor da escola secundária publicou, em 1861, *Lehrbush der Aritmetik*[19] *o* livro didático cujo fruto consistiu na axiomatização da Aritmética, que gerou muita polêmica entre os matemáticos que compreendiam que a abordagem de Grassmann resultaria na axiomatização do conceito número, o que era visto pelos matemáticos, como uma ofensa aos fundamentos do conceito.

A leitura que Peano fez da obra mencionada proporcionou-lhe prestígio. Atualmente, ele é reconhecido e citado pelos os axiomas que levam seu nome.

O reconhecimento de Grassmann só veio após sua morte, em 26 de setembro de 1877. Alguns matemáticos, como: Hamilton, Cauchy, Möbius, familiarizaram-se com a obra e conseguiram compreender a generalidade e a importância de seus trabalhos e trataram de divulgá-la. Da parte apreendida pelos matemáticos, foi desenvolvida consideravelmente a Álgebra Linear, hoje

[18] Indeed, in the context of the second half of the 19 th century, when new kinds of bridges were established between algebra and geometry, Grassmann presented a very original epistemological approach which anticipated, in many ways, results rediscovered only half a century later. Moreover, in spite of certain weak aspects, Grassmann's views remain unique; therefore, our understanding of the nature of linear algebra can still be enriched from a close analysis of his contribution.
[19] Curiosidade: Esta obra nunca foi traduzida em outra língua.

referenciada em várias ciências e ensinada em diversos campos do conhecimento, nomeada por Grassmann de Álgebra Exterior.

Mesmo assim, Grassmann não é tão referenciado. Mas a importância de sua obra é fato; talvez, ainda possa contribuir para com o desenvolvimento da Matemática. Um dos primeiros matemáticos a aproximar-se de sua obra, a ponto de aderir mesmo que, parcialmente, foi Giuseppe Peano, embora abordasse apenas os aspectos geométricos, isto é, não absorvendo a generalidade de sua origem. Dorier expressa isso,

> Giuseppe Peano foi um dos primeiros matemáticos que tentou chamar a atenção para o trabalho de Grassmann. Em 1888, publicou o *Calcolo Geométrico secundo l'Ausdhenungslehre di H. Grassmann e precedutto dalle Operazioni della Lógica Deduttiva* (Peano 1888), no qual ele apresentou os aspectos básicos da teoria de Grassmann, ainda limitado à Geometria.[20] (DORIER, 2000, p. 31)

Em diversas áreas, as habilidades de Grassmann podem ser encontradas, como, por exemplo: Teologia, Filosofia, Matemática, Física, Lingüística e Química. Se observarmos a epistemologia de inúmeros conceitos, em diversas áreas, encontraremos as contribuições de Grassmann. Prova disto foi seu ingresso na Universidade de Berlim, em 1827, no curso de Teologia, mostrando-se habilidoso com a Filosofia. Os cursos de idiomas clássicos e Literatura também fizeram parte de sua vida acadêmica. A habilidade com a Matemática apareceu quando prestou um exame para ser professor em um ginásio, cuja preparação deu-se em um ano, e sua boa colocação permitiu que pudesse ensinar numa escola primária.

Em 1834, iniciou o curso de Didática da Matemática no Gewerbeschule em Berlim. Um ano depois, voltou a Stettin para ensinar Matemática, Física, Alemão, Latim, e Estudos Religiosos em uma escola nova, o Otto Schule. A

[20] Giuseppe Peano was one of the first mathematicians to have tried to draw attention to Grassmann's work. In 1888, he published *Calcolo Geometrico secundo l'Ausdhenungslehre di H. Grassmann e precedutto dalle Operazioni della Logica deduttiva* (Peano 1888), in which he presented the basic aspects of Grassmann's theory, still limited to geometry.

gama extensiva de domínios revela novamente que ele foi qualificado para ensinar no primário, ou seja, era polivalente. Durante os quatro anos seguintes, passou em exames que lhe permitiram ensinar Matemática, Física, Química, e Mineralogia em escolas secundárias.

Grassmann não foi reconhecido em sua época e os matemáticos não podiam sequer plagiá-lo. É um aspecto interessante de observar, pois difere de outros matemáticos.

Desse modo, passaram-se quase quarenta anos para que suas idéias aparecessem novamente. Se fosse concomitante poderia ser dito que houve má vontade dos matemáticos em não copiar suas idéias, o que não ocorreu. Isto mostra claramente que havia dificuldade para compreender suas idéias, por parte dos matemáticos.

A consciência da nobreza do que desenvolvia, pode ser notada na leitura do prólogo de sua obra. Grassmann relata que um novo ramo da ciência Matemática estava surgindo, mas não presumia o quão era fecundo o terreno que havia pisado, porém tinha a certeza: quem o apreendesse jamais o largaria. De fato, a Álgebra Linear está presente em diversas áreas do conhecimento. Não só a Álgebra Linear, mas também a consolidação do processo da aritmetização da Análise a qual possibilitou a axiomatização, definitivamente, do conceito de número natural.

A visão da possibilidade de combinar aspectos projectivos com os vetoriais foi o fator fundamental no desenvolvimento de sua teoria. Grassmann tinha uma visão ampla, enxergou os segmentos de retas como objetos matemáticos dotados de sentidos, e não, simplesmente, de comprimentos. Dessa forma, considera o negativo na Geometria (uma impossibilidade na época, em que se construía a ciência baseada na observação e na experiência).

É interessante observar que Grassmann não tinha a pretensão de desenvolver um novo ramo da Matemática, mas só se deu conta desse desenvolvimento quando enxergou a amplitude que seus trabalhos abrangiam.

Esta conscientização fez com que persistisse na divulgação de sua obra, pois sabia que muito contribuiria para a Ciência Matemática.

Não é do escopo deste trabalho um estudo mais aprofundado da obra de Grassmann, até pela dificuldade em diversos âmbitos. Considerando sua importância para a constituição da Matemática, esperamos poder fazê-lo em outro momento. Nosso ponto de vista é que a concepção da Matemática no aspecto abstrato e geral é fundamental na investigação da aprendizagem, quando conflitos epistemológicos, possivelmente, presentes possam de certa forma ter repercussão no processo de ensino-aprendizagem.

# capítulo IV

## A Axiomatização da Aritmética sob ponto de vista de Otto Hölder e Robert Grassmann

### IV.1 – Introdução

Neste capítulo, as idéias apresentadas estão apoiadas no artigo: *Um Debate sobre a Axiomatização da Aritmética: Otto Hölder contra Robert Grassmann*[21],escrito por Mircea Radu, em 2003.

Nele estão as reflexões geradas por um debate entre dois matemáticos importantes da época, no qual o foco da discussão era a pertinência do princípio axiomático constituir-se ou não como fundamento da Aritmética. As controvérsias reveladas entre os dois matemáticos confirmam a complexidade relativa à constituição dos fundamentos da Matemática. O referido artigo é uma peça fundamental para este estudo, pois nele está reproduzida uma discussão de pioneiros, na jornada da axiomatização, seu estudo, objeto de nossa investigação, é sempre importante para matemáticos e educadores matemáticos.

### IV.2 - Axioma e postulado: significados e transformações

[21] Título original: A debate about the axiomatization of arithmetic: Otto Hölder against Robert Graβmann.

Neste tópico, faremos algumas considerações sobre os significados das noções de postulado e axioma e as transformações que essas noções sofrem na virada dos séculos XIX e XX, para isto nos apoiamos no texto de Abbagnano (2000).

Entre os gregos, as noções de axioma e postulado tinham diferenças sutis, o que procuramos evidenciar no que se segue. Com o decorrer dos tempos, os significados das duas noções aproximam-se e mais que isso com o formalismo matemático e lógico introduzido por: Peano, Russell, Frege e Hilbert essas noções passam a ter o mesmo significado, assim o significado da noção de axioma sofre uma transformação, possibilitando a axiomatização da Aritmética.

## IV.2.1 - Axioma

Para os povos primitivos, axioma significava dignidade ou valor e os escolásticos[22] usavam-no com o significado de dignidade. Para os estóicos, o axioma assumia o papel de indicar o enunciado declarativo que Aristóteles chamava de apofântico[23]. Para os matemáticos, na Antiguidade, os axiomas significavam os princípios indemonstráveis, porém evidentes de sua ciência.

Aristóteles (384 a 322 a.C) foi o primeiro a fazer uma análise dos axiomas, definindo-os como as proposições primeiras de uma demonstração. Para ele, os axiomas eram os princípios que o ser humano teria de necessariamente interiorizar para aprender qualquer coisa. Nesse sentido, o axioma distinguia-se do postulado, pois não necessitava de demonstração.

[22] São os seguidores da filosofia escolástica, esta assume a tarefa de ilustrar e defender racionalmente determinada tradição ou revelação religiosa. (ABBAGNANO, 2000, p. 345).
[23] No uso filosófico significa algo declarativo ou revelativo.

Axioma visto como princípio mostra que o próprio princípio de contradição[24] é um axioma e é o princípio de todos os axiomas. O significado de axioma, como um princípio, permaneceu por toda Antiguidade e Idade Moderna. Para S. Tomás (1224/5 – 1274), os axiomas, isto é, os princípios imediatos eram conhecidos por meio de seus próprios termos e não pelos termos intermediários e sua verdade é manifestada pela simples intuição dos termos que a compõem.

Por muito tempo, buscou-se justificar a validade absoluta da noção de axioma, mas esta não foi posta em dúvida. Alguns julgavam que os axiomas poderiam ser obtidos por deduções ou induções, deixando assim de ser admitidos como princípio, como foi o caso de Bacon (1561 -1626). Descartes (1596 – 1650) compreendia-os como verdades eternas, que residem em nossa mente. Apesar das diferenças de concepção sobre a noção de axioma ambos acreditavam que eles se constituíam em verdades imutáveis. Leibniz (1646 – 1716) e Locke (1632 – 1704) comungavam da idéia de que os axiomas são verdades evidentes; considerou-os como princípio inato na forma de disposições originárias que a experiência torna explícita; já Locke contrapôs-se a Leibniz, considerou-os como proposições, experimentos e experiências imediatas. Stuart Mill (1806 – 1873) afirmou que eles eram verdades experimentais e generalizações da observação.

Para Kant (1724 -1804), os axiomas são verdades evidentes *a priori* e os definiu como princípios sintéticos a *priori, cuja* característica é a certeza imediata, isto é, a evidência. Para Kant, a existência dos axiomas na ciência Matemática justifica-se, pois sua concepção da Matemática é que ela procede, mediante a construção dos conceitos. Sendo assim, a utilização de axiomas é vinculada a sua natureza. A filosofia, ao contrário da Matemática, não constrói seus conceitos e, portanto, não necessita de axiomas.

---

[24] O **princípio da contradição** informa que duas proposições contraditórias não podem ser ambas falsas ou ambas verdadeiras ao mesmo tempo. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Contradi%C3%A7%C3%A3o , acessado em 07/09/2006 ás 15h59m

O formalismo matemático e lógico estabelecido, com os trabalhos de Peano (1858 – 1932), Russell (1872 – 1970), Frege (1848 – 1925) e, especialmente, de Hilbert (1862 – 1943) é que conduziu o processo de transformação da noção de axioma, pois nega a imediação (isto é, o fato do ser imediato ou o imediatismo) da verdade, da certeza e a evidência da definição na qual essa noção repousava até então.

Podemos perceber essa transformação; analisando por um lado a certeza apresentada na afirmação "por dois pontos distintos passa uma única reta" e, por outro, a verdade admitida em " 0 é um número"

Do ponto de vista formalista, o axioma não é uma verdade evidente, nem verdadeiro e nem falso, mas assumida por convenção como fundamento ou premissas do discurso matemático. Após essa transformação, os axiomas não mais se distinguem de postulados. Atualmente, a escolha dos axiomas é livre e ditos "convencionais" ou assumidos por convenção. Entretanto, a escolha é limitada às exigências ou condições precisas que atendam aos seguintes aspectos: coerência, completude, independência e elegância lógica.

*1.* Os axiomas devem ser coerentes de modo que o sistema que deles depende se torne um sistema contraditório, isto é, aquele que possibilita a demonstração ou dedução de qualquer proposição, assim como sua negação. No aspecto coerência, a realização é um processo importante, isto é, a referência do sistema a um modelo real, pois o pressuposto do que é real é possível e garantirá a não contradição.

*2.* O sistema de axiomas deve ser completo, de modo que de duas proposições contraditórias formuladas corretamente nos termos do sistema, em uma deve existir a possibilidade de ser demonstrada. O que significa que, em presença de uma proposição qualquer do sistema, pode-se sempre demonstrá-la ou refutá-la e, portanto, decidir sobre sua verdade ou falsidade em relação ao sistema dos postulados. Nesse caso, o sistema chama-se decidível.

*3.* Em relação ao aspecto independência, podemos observar que se refere à sua irredutibilidade recíproca. Mesmo não sendo uma característica indispensável, garante que as premissas não sejam tão numerosas.

*4.* A elegância lógica é desejável, ou seja, um sistema é dito elegante quando consegue a simplicidade e o menor número possível de axiomas.

Atualmente, um axioma ou sistema de axiomas está constituído quando satisfaz as quatro exigências supracitadas e, assim sendo, a definição de axioma como verdade inerente ao pensar, evidência e certeza imediata ficam para trás.

## IV. 2.2 - Postulado

Em geral, é uma proposição cuja admissão se deseja com o objetivo de poder demonstrar um processo. Sendo assim, o termo postulado na Antiguidade distinguia-se de axioma, pois axiomas não são demonstráveis, são evidentes e devem ser admitidos necessariamente. Postulado, apesar de ser demonstrável, é assumido e usado sem demonstração. De fato, é uma proposição ainda não admitida como verdadeira.

A distinção entre axiomas e postulados já estava presente nos Elementos de Euclides (330 – 270 a.C.), enquanto os axiomas expressam as verdades evidentes, chamadas de noções comuns por Euclides; os postulados expressam o que é proposto a ser admitido e referem-se à existência de determinados elementos, neste caso, elementos geométricos. Como ilustração, destacamos as dez pressuposições[25] que aparecem na maioria dos manuscritos do*s Elementos.*

**Postulados.**

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.

[25] As ilustrações foram extraídas de (BOYER, 2003, p. 73).

2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.

3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

4. Que todos os ângulos retos são iguais.

5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos anteriores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas se prolongadas indefinidamente, se encontram, desse lado, em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

**Axiomas ou noções comuns**

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.

2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.

3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.

5. O todo é maior que a parte.

Kant aproximou o termo mais à experiência e ao mundo real, classificou dois tipos de postulados. Chamou de *postulado do pensamento empírico*, os princípios correspondentes *a priori* às naturezas do pensamento, com os quais é possível tudo o que está conforme as condições formais da experiência, e o que está de acordo com as condições materiais da experiência é real e aquilo, cuja conexão com a realidade é determinada, segundo as condições universais da experiência é ou existe necessariamente. E de *postulado da razão prática,* as condições que tornam possível a moralidade, isto é, a liberdade, a imortalidade e a existência de Deus.

A diferença entre os termos axiomas e postulados deixaram de existir na lógica e na Matemática contemporânea, como mostramos anteriormente.

Com base nas diversas concepções e empregabilidade das noções de axiomas e postulados, é possível indicar a relação entre elas. Vimos que axioma e postulado sempre tiveram uma relação intrínseca aos conceitos, justificando, assim, a sutileza em relação às diferenças entre as duas noções. Os axiomas eram evidentes por si, e eram admitidos necessariamente mesmo não sendo demonstrados, já o postulado, era uma proposição ainda não aceita como verdadeira, embora seja demonstrável, é assumido e usado sem demonstração.

Quando os axiomas deixam de ser concebidos, como uma verdade imutável e evidente ou como princípio sintético *a priori*, ou ainda, como julgava Descartes, verdades eternas que residem na mente (isto é, aceitas intelectualmente sem grandes problemas), passam a ser concebidos como fundamento ou premissas do discurso matemático nos quais desaparecem de vez a distinção entre axiomas e postulados.

A negação da definição de axioma, como a certeza absoluta, foi propagada com o formalismo matemático, e lógico, proposto, especialmente, com os trabalhos de Hilbert na virada do século XIX. Atualmente, um sistema axiomático requer a escolha dos axiomas de modo livre, isto é, convencionais ou assumidos por convenções. Um sistema axiomático é dito consistente, quando estiver atendendo aos seguintes aspectos: coerência, completude, independência e elegância.

Como aparece expresso nas palavras de Ávila (2001),

> (...) um sistema axiomático deve satisfazer três condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas conseqüências; deve ser completo, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e por fim, cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é conseqüência deles, sob pena de ser supérfluo. (p.8)

Como vimos no capítulo II, Peano mostrou como construir número natural baseado em noções primitivas, e postulados, isto é, em um sistema axiomático.

## IV. 3 – Contexto histórico do conceito número

O trabalho consiste em debruçar sobre elementos histórico-epistemológicos que interferiram ou resultaram na sistematização do conceito de número, que teve como efeito o avanço de diversos ramos da Matemática, com bases no conceito - número natural.

Por quase dois mil anos, o conceito de número permaneceu estático, ou seja, sem sofrer alteração conceitual, esta estagnação é obra do próprio ser humano. Matemáticos acreditaram por muito tempo que a Aritmética[26] não necessitaria evoluir, como se espera de todo conceito científico, já que o conceito de número era admitido como perfeito por todos, sendo utilizado sem que se percebesse a necessidade de dar ao número o estatuto de objeto matemático. Entendiam assim que o número natural era um conceito bem formado e o interpretavam de acordo com a definição de Kronecker "Deus criou os números naturais; tudo o mais é produto da mão do homem" (KRONECKER apud ROBBINS ;COURANT, 2000, p.1) portanto, não necessitava de uma melhor conceituação, compatível com o avanço do desenvolvimento de qualquer conceito científico.

A axiomatização consiste em termos gerais de um quadro ordenado e explicativo, no nosso caso, de fenômenos[27] formais que, até antes da apresentação de Grassmann, os matemáticos não consideravam isso, entendiam não ser possível sua utilização, para além da Geometria de Euclides. Esta impossibilidade foi então questionada por necessidade da própria Matemática em

[26] Robbins; Courant (2000) explicam que "a teoria Matemática dos números naturais ou inteiros positivos é conhecida como Aritmética".
[27] Entendemos por fenômeno tudo que é percebido pelos sentidos ou pela consciência.

dar ao conceito de número natural o estatuto de um objeto matemático possível ao conhecimento humano. A busca por uma definição de forma única para o conceito de número foi objeto da teoria axiomática de Peano, da teoria dos conjuntos de Russell; ou ainda, mais atualmente da teoria de Conway[28] com a utilização de jogos.

O enfrentamento do que era admitido como impossibilidade, ou seja, a constituição dos números naturais de forma sistematizada baseada no princípio axiomático torna esse conceito como um objeto[29] matemático e traz para a Matemática um novo campo a ser pesquisado. Podemos dizer que Grassmann baseou-se no princípio de extensão[30] que, por sua vez, recai no conceito de igualdade.

Caraça (2003) faz uma analogia entre o homem primitivo e o moderno, em relação ao conceito de número:

> Para o primitivo, e mesmo para o filósofo antigo, os números estavam impregnados de Natureza – a Natureza em cuja labuta o homem adquiriu todos os seus conhecimentos – os números estavam ligados às coisas que eles se serviam para contar. Para o homem civilizado de hoje o número natural é um ser puramente aritmético desligado das coisas reais, e independentes delas – é uma pura conquista do seu pensamento. Com essa atitude o homem de hoje, esquecido da humilde origem histórica do número, e elevando-se (ou julgando elevar-se) acima da realidade imediata, concentra-se nas suas possibilidades de pensamento e procura tirar delas o maior rendimento. (CARAÇA, 2003, p. 9)

Esta analogia nos possibilita dizer que o percurso traçado por Grassmann para efetivamente chegar à axiomatização foi baseado no princípio de extensão que significa a passagem de um plano real para um plano abstrato. O que quer dizer que a origem histórica da conceituação do número foi uma fonte de pesquisa para a generalização e extensão de todas as aquisições do pensamento de Grassmann, seja qual for o caminho trilhado para obtenção dessas aquisições.

---

[28] John Horton Conway nascido em 26/12/1937 em Liverpool, Inglaterra. É um matemático ativo na teoria dos grupos finitos, teoria dos nós, teoria dos números, teoria combinatória dos jogos e teoria de códigos, sendo mais conhecido entre os matemáticos amadores pela teoria combinatória dos jogos e pela invenção do jogo da vida.

[29] GARDIES (2004): Du Mode D'existence des objets de la mathématique fala sobre a existência do objeto matemático.

[30] Ver Caraça (2003, p.9); Halmos (1970, p. 3).

Russell e Carnap, segundo Abbagnano, discorrem sobre a tese da extensionalidade;

> A tese da extensionalidade propõe que "para cada sistema não extensional há um sistema extensional e que o primeiro pode ser transformado no segundo". Como os enunciados intensionais mais importantes são os modais, a tese em questão afirma a tradutibilidade dos enunciados modais em enunciados não modais. Por exemplo, os enunciados "A é possível", A = não A é impossível", A ou não A é necessário", "A é contingente" equivaleriam respectivamente aos seguintes enunciados: "'A = não A' é contraditório", "' A ou não A' é analítico", "'A' é sintético". (ABBAGNANO, 2000, p. 422)

## IV. 4 – As características de Hermann Grassmann e Robert Grassmann

Hermann Grassmann e Robert Grassmann eram irmãos e filhos de Justus Grassmann, o pai era um matemático que pertenceu à escola combinatória no início do século XIX (BOYER, 2003, p.406) que também discutiu sobre o conceito de número.

Talvez seja importante notar que a publicação do livro didático *Lehrbuch der aritmetik*, em 1861, escrito por Hermann Grassmann, foi o marco decisivo na abordagem axiomática da Aritmética . Mais duas publicações foram feitas em 1872 e 1891. Segundo Radu (2003), os três livros foram publicações feitas pelos irmãos, apoiados nas idéias desenvolvidas por seu pai. Embora todo o desenvolvimento fosse em colaboração dos irmãos, as publicações foram feitas no nome de somente um deles, sendo a obra publicada em 1861, de autoria de Hermann Grassmann e as outras duas de Robert Grassmann.

Para Otte[31] (2005), os irmãos Grassmann, sobretudo Hermann, tinham idéias inusitadas, porém o teor filosófico dessas idéias fazia com que elas não

[31] Fala de Otte (2005), em seminários nos grupos de pesquisa. Grande parte deste trabalho foi desenvolvido apoiada em suas reflexões.

fossem compreendidas por seus contemporâneos; por isso, foram pouco aproveitadas e até os dias atuais não são tão bem compreendidas. Consta que a obra Die Ausdehnungslehre (1844) foi pouco vendida e lida muito menos.

Mas a Hermann Grassmann é conferido o mérito de ser o precursor da axiomatização da Aritmética, pois foi ele quem apresentou pela primeira vez o conceito número sistematizado, além de ter idéias avançadas em relação a seu irmão.

Em 1861, Hermann Grassmann publica um livro didático, no qual o conceito de número natural aparece axiomatizado. Este livro gerou um intenso conflito entre os matemáticos, pois, para eles era inconcebível axiomatizar os números.

A obra gerou polêmica e também foi fonte de inspiração para Robert Grassmann que publicou mais dois trabalhos em 1872 e 1891. Este último foi o alvo de critica de Hölder que trouxe elementos para a construção do artigo que ora é nosso apoio. Hermann Grassmann muito contribuiu com seu irmão, há indícios que trabalhavam juntos, pois nos estudos de Robert, segundo Radu, existe muita similaridade entre eles, mostrando assim, que Robert inspirou-se em seu irmão, que mesmo depois de sua morte continuou propagando suas idéias.

Nós, pouco sabemos a respeito de Robert Grassmann nem tivemos a oportunidade de ler suas obras; quanto a Hermann Grassmann, tivemos o prazer de consultar sua obra, publicada em língua espanhola que tem como fruto parte do presente capítulo e do capítulo III.

Quando falarmos, no *Grossenlehre* estaremos nos referindo ao trabalho de Robert que pode ser visto, como uma nova versão do *Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann, ao qual Otto Hölder fez profundas criticas; pelo fato de ora falarmos de Hermann, ora de Robert, durante o percurso, assim, quando nos referimos a Hermann Grassmann, falaremos apenas Grassmann, como tratado no capítulo III e para referenciar Robert Grassmann chamá-lo-emos de Robert. Robert publica *Die Zahlenlehre oder Arithmetitik* , em 1891, inspirado em Grassmann; na obra descreveu a disciplina Matemática que chamou de mais geral, o Grossenlehre. Nele, a Aritmética, assim como, as outras três disciplinas, ditas individuais, Lógica, Álgebra Exterior e Combinatória eram geradas baseadas em três conceitos-chave: conexão, igualdade e desigualdade. Na verdade, esta obra aparece com ligeiras modificações na abordagem dada à Aritmética contida no livro de Grassmann, de 1861, podendo ser considerada como uma reescritura.

A possibilidade de axiomatizar a Aritmética foi o ponto chave para evolução da Ciência Matemática; pelas quais diversas áreas solucionaram problemas, até então colocados, como é o caso do processo de aritmetização da Análise.

Nesse caminho, Grassmann foi o pioneiro e apresentou em pouco tempo a Aritmética axiomatizada, da forma como proposta e vista por ele. Inicialmente não se tratava de uma forma axiomática, pois ele próprio não aceitava axiomas em ciência formal, como era o caso da Aritmética.

O conceito de número, por volta de 1889, já foi concebido em uma abordagem axiomatizada, cujo mérito é remetido a Peano, reconhecido até os dias atuais pelos axiomas da Aritmética.

## IV.5 – Otto Hölder e os elementos que caracterizam seu pensamento

O artigo escrito por Radu (2003) é um forte instrumento de análise, pois fornece um debate entre dois matemáticos interessados em estudar os fundamentos da Matemática. Eles apresentam características que ora se assemelham e ora se contrapõem que discorreremos durante o percurso, a seguir.

Otto Hölder (1859 – 1937), matemático alemão, cuja formação deu-se em Berlin e Tubigen. Assistiu às aulas ministradas por excelentes matemáticos, como Leopold Kronecker, Eduard Kummer[32] e Karl Weierstrass e teve como orientador de sua tese Paul du Bois-Reymonnd. Trabalhou em Leipzig com Felix Klein. Podemos conjecturar que seu modo de pensar pode ter sido influenciado pelas idéias de seu orientador que, na época, escrevia um livro[33] sobre os fundamentos da Análise e é referenciado por Hölder em sua tese.

Por um lado, temos Otto Hölder, cujos princípios são baseados na corrente filosófica do intuicionismo[34] e, por outro, Robert Grassmann seguiu o caminho trilhado por seu irmão Hermann Grassmann, um matemático autodidata cujo reconhecimento só veio na posteridade.

A trajetória acadêmica de Otto Hölder mostra que caminhou no sentido oposto à maioria dos matemáticos de sua época, pois, enquanto seus contemporâneos seguiam no sentido de construir os aparatos técnicos usados na lógica formal, como busca do desenvolvimento dos conceitos pela sistematização em uma lógica formal, ele, ao contrário, mantinha-se numa direção muito mais crítica do que produtiva, pois trabalhava no sentido de mostrar as limitações da tendência formal. Justificando, assim, seu baixo prestígio, pois dificilmente é citado na comunidade acadêmica, porém há quem o julgue importante no desenvolvimento da Álgebra e Análise, julgamento justificado pelas suas contribuições ali encontradas.

Radu (2003) apresenta uma das razões para seu não reconhecimento, quando afirma:

> As idéias de Hölder sobre os fundamentos da Matemática estão quase esquecidas. (...) Isto se deve ao fato de que, embora tenha sido um matemático importante em sua época, quando escrevia sobre questões dos fundamentos, Hölder deliberadamente recusou-se a adotar o caminho

[32] Curiosidade – Ernst Eduard Kummer (1810 – 1893), foi o matemático que colocou um ponto final na trajetória acadêmica de Hermann Grassmann, quando solicitado pelo ministro prussiano da educação que desse um parecer sobre a teoria de Hermann Grassmann, pois Grassmann tinha submetido seu trabalho à análise na tentativa de conquistar a posição de professor universitário. Foi Kummer quem deu parecer final, dizendo que a teoria era boa, entretanto, expresso numa forma deficiente.

[33] (Du-Bois-Reymond,1882/1968).

[34] O intuicionismo refere-se à corrente Matemática fundada por Brouwer, inspirada nas idéias de L.Kronecker (1923-91), para quem o conceito de número natural fora dado à intuição humana, afirmando que os números naturais foram feitos por Deus e os outros pelos homens. Para maiores detalhes ver, (ABBAGNANO, 2000, p.583-584).

> seguido por eruditos, tais como: George Boole, Charles S. Peirce, Gottlob Frege, Giuseppe Peano e Hilbert[35].(p. 342-343).

A história de Hölder é importante para compreender os motivos que o conduziram à hostilidade, à abordagem da Aritmética proposta por Grassmann, em 1861, exposta na publicação de um livro didático intitulado *Lerbuch der Arithmetik* em que Hermann apresenta pela primeira vez a Aritmética sistematizada.

Hölder escreveu sobre tópicos dos fundamentos, delineando sua própria Filosofia Matemática; criticava correntes filosóficas[36], tais como: convencionalismo, positivismo, formalismo, psicologismo e a lógica silogística. A rejeição ao formalismo nos possibilita compreender seu pensamento crítico.

Sua concepção do formalismo era que essa corrente instaurada no final do século XIX consistia na matematização no tratamento dos fundamentos da Matemática. Para ele, isso significava um exorcismo às considerações epistemológicas dos fundamentos da Matemática, não considerando a questão do pensamento matemático e mais, substituindo-o por cálculos simbólicos.

Hölder tentava mostrar que as questões dos fundamentos da Matemática não poderiam seguir a tendência formalista, pois acreditava que essa lógica distanciaria o objeto do pensamento "natural" e perderia muito nesse percurso. Por isso, buscava desenvolver uma lógica apropriada para tratar as questões dos fundamentos, a qual difere da formal. Neste ponto, Hölder e Grassmann comungam da mesma idéia.

No século XIX houve muitas transformações na Ciência Matemática, sendo mesmo considerado por alguns, como a Idade de Ouro da Matemática, uma das partes atingida foi o conceito – número – por estar presente em toda ramificação da Matemática; incluso as transformações, estão as mudanças de

---

[35]Hölder's ideas on the foundations of mathematics are almost forgotten. (…) This may be due the fact that, even though a leading mathematician of his time, when writing on foundational issues Hölder deliberately refused to embrace the path pursued by scholars such as George Boole, Charles S. Peirce, Gottlob Frege, Giuseppe Peano e Hilbert.

[36] Para uma definição das correntes ver Dicionário de Filosofia Nicola Abbagnano (2000).

ponto de vista sobre o conceito de número natural que deixa de ser um presente do Bom Deus, como chamou Kronecker. Assim, passa a ser abordado como um objeto matemático, instaurando um processo de evolução do conceito que se deve à sua sistematização e ao modo como foi abordado, posteriormente.

Neste contexto Hölder está inserido, cuja rejeição em conceber a Aritmética como proposta por Hermann e Robert Grassmann é explícita, aliás, os próprios responsáveis pelo desenvolvimento dessa abordagem nunca a viram como uma axiomatização, pois rejeitavam a idéia de que em ciência formal pudessem existir axiomas.

Axiomas eram possíveis só na Geometria que fazia parte da ciência real.

Com base no estudo genético da epistemologia da Lógica, podemos dizer que o pensamento de Hölder aproxima-se do matemático Pasch que, segundo Piaget,

> O matemático Pasch sustentou que os métodos da formalização orientam-se em sentido contrário ao das tendências espontâneas do pensamento natural. Se nos limitamos a caracterizar este pelo conteúdo da consciência dos indivíduos, é obvio que ele tem razão, pois o pensamento comum tende a ir em frente, ao passo que a formalização consiste num esforço retroativo para determinar as condições necessárias e suficientes de todas as asserções e destacar explicitamente todas as intermediárias e todas as conseqüências. (PIAGET, 2002, p.74)[37]

A rejeição de Hölder à abordagem da Aritmética proposta por Grassmann, está expressa em,

> A saber, eu também tenho que me opor decisivamente à visão (...) de que todas as deduções devem ser colocadas em forma de um (...) cálculo simbólico, e que uma dedução precisa só é dada até o ponto em que possa ser alcançado. É possível refutar essa idéia através da seguinte consideração: é fácil reconhecer que quando, por exemplo, novos sinais (símbolos) são introduzidos durante o processo de uma investigação Matemática (...), não é possível representar os pensamentos que levam a introdução de novos sinais por meio de outro cálculo simbólico. É (...) claro que se esse fosse o caso, e se a visão supracitada estivesse correta, o último cálculo simbólico ele próprio, teria de ser provado por meio de

[37]Jean Piaget Epistemologia Genética. Trad. Álvaro Cabral. Título original: L'Épistémologie Génétique.

> outro cálculo e, assim por diante, até o infinito. Isto conduziria ao que é conhecido como um *recursus in infinitum* : mas isto (...) é um absurdo na argumentação lógica. [38] (HÖLDER, 1924 apud RADU, 2003, p.344)

Para Hölder, a lógica silogística, seja ela formalizada ou não, não era apropriada para descrever teoricamente o raciocínio matemático. Por isso, concentrava seus trabalhos na busca de uma lógica apropriada que pudesse descrever as questões referentes aos fundamentos da Matemática.

Foi um dos primeiros a defender o intuicionismo de uma forma mais próxima de Poincaré do que de Brouwer, pois apresentava uma diferença em relação a ele, não era egocêntrico, além de não rejeitar o uso das provas indiretas.

Hölder defendia a natureza sintética da Matemática e seu trabalho nos fundamentos da Matemática era desvendar a “verdadeira” natureza do pensamento matemático, sendo esse o passo que o levaria ao desenvolvimento de uma lógica matemática apropriada e não formal.

Hölder interpretava que a abordagem da Aritmética proposta por Robert, era constituída por um princípio axiomático e o estabelecimento da Álgebra Abstrata como o único fundamento rigoroso para a Aritmética. Sendo assim, o *Grossenlehre* (isto é, a Álgebra Abstrata) era a disciplina Matemática mais geral e capaz de gerar todas as outras, tais como: Lógica, Aritmética, Combinatória e Álgebra Exterior. Por esse motivo rejeitava a proposta de Robert, como um fundamento para a Aritmética.

---

[38] Namely, I also have to decisively oppose the view (…) that all deductions have to be put into the form of a (…) symbolic computation, and that a strict deduction is only given to the extent that this can be achieved. It is possible to refute this idea through the following consideration: It is easy to recognize that when, for example, new signs (symbols) are introduced during the course of a mathematical investigation (…) it is not possible to represent the thoughts that led to the introduction of the new signs through yet another symbolic computation. It is (…) clear that if this were the case, and if the above-mentioned view were correct, the latter symbolic computation itself would have to be proved through yet another computation and so on up to infinity. This would lead to what is known as a *recursus in infinitum*; but this (…) is absurd in a logical argumentation.(HÖLDER ,1924,p.5)

Acreditava na natureza sintética da Matemática e, de certa forma, acreditava que a série dos números ordinais era o que melhor descrevia o pensamento matemático. Então, sua crítica ao trabalho de Robert é que a Aritmética não poderia ser de certa forma subordinada à Álgebra, ele interpretava que ela era uma mera linguagem simbólica e, que a Aritmética não poderia ser desenvolvida por meio de símbolos, cujos entes eram dados como axiomas.

As idéias de Hölder desenvolvidas anteriores a 1892, época em que fez a revisão do trabalho de Robert Grassmann de 1891, foi o que possibilitou a Hölder questionar a abordagem da Aritmética de R. Grassmann.

## IV.6 - O significado da síntese e da análise em Matemática

O termo síntese no sentido amplo pode representar: a unificação ou a composição; em um sentido específico pode representar: método cognitivo oposto à análise.

A síntese como método cognitivo oposto à análise, é o método fundamental do conhecimento, significando a organização dos objetos, cuja natureza pretende-se explicar, significa ir do simples ao composto dos elementos às suas combinações.

A análise, em termos gerais, significa: a descrição, a decomposição de um todo em suas partes constituintes, ou ainda, a interpretação de uma situação ou de um objeto qualquer nos termos dos elementos mais simples pertencentes à situação ou ao objeto em questão.

A diferença entre síntese e análise começa a aparecer na lógica do século XVII. As noções eram apresentadas, como métodos de ensino, classificado por Jungius (1587 – 1657) como uma ordem didática; esta poderia ser sintética, isto é, compositiva ou, analítica, isto é, resolutiva. Para ele, a ordem sintética vai dos princípios ao principiado, dos constituintes ao constituído, das partes ao todo, do simples ao composto, enquanto a analítica procede por via oposta.

A síntese e a análise deixam de ser método de ensino, passam a partir de Descartes (1596 – 1650) a ser dois processos diferentes de demonstração. Para ele, a maneira de demonstrar é dupla, uma o faz por meio da análise, ou resolução, a outra por meio da síntese ou composição. Adotou o processo analítico ao invés do sintético, por acreditar que o analítico parecia ser o mais verdadeiro e adequado ao ensino. (ABBAGNANO, 2000, p. 52). Leibniz (1646 – 1716) mostrou estar de acordo com Descartes quando disse:

> Chega-se muitas vezes a belas verdades por meio da síntese, indo do simples ao composto, mas quando é preciso encontrar o meio de fazer aquilo que se propõe a síntese normalmente não basta (...) e cabe à análise dar-nos o fio condutor, quando isso é possível porque há casos em que a natureza do problema exige que se proceda tateando, e nem sempre é possível cortar caminho. (LEIBNIZ apud ABBAGNANO, 2000, p. 906)

Para Kant (1724 – 1804), o método sintético é progressivo, ao passo que o analítico é regressivo, vai do objeto às condições que o possibilitam.

As definições acima mostram que, em várias épocas a síntese e a análise não sofreram tantas transformações, ora eram concebidas, como método de ensino, ora como processo de demonstração. Agora, existem correntes na Matemática que se apropriam de um ou de outro método para a construção dos conceitos matemáticos.

A bandeira da natureza sintética da Matemática era levantada pela corrente filosófica intuicionista, fundada por Brouwer, que acreditava na existência das entidades matemática na medida em que fossem possíveis suas construções, e adotava o método direto de prova. A saber, o método sintético, apóia-se no método direto de prova, isto é, na construção da entidade por meio de um número finito de passos. E rejeita explicitamente o método indireto de prova que, por sua vez, é constituído no princípio de contradição, isto é, para provar a existência de A, admite a existência de não A e prova que não A leva a um absurdo, provando, assim, a veracidade de A.

Hermann Grassmann na obra Teoria da Extensão (1844) apresenta uma – sinopse da Teoria Geral da Formas – nessa sinopse, ele discute que o método analítico possibilita encontrar relações que, no método sintético, não seria possível. Para ele, o método analítico consiste em lançar mão de um resultado obtido no método sintético e conduzir de forma que chegue ao ponto de partida, trilhando outro caminho.

Hermann Grassmann uniu os dois processos, o sintético e o analítico e era um de seus objetivos encontrar o equilíbrio entre síntese e análise nas abordagens dos conceitos matemáticos.

Segundo Otte (2005), Hermann Grassmann foi o pioneiro em trazer para a Matemática a abordagem analítica dos conceitos, pois antes de seus trabalhos a abordagem que se tinha era a sintética.

No próximo tópico, apresentamos a abordagem da Aritmética sob o ponto de vista de Grassmann.

## IV. 7 - A abordagem da Aritmética proposta por Grassmann

O primeiro passo rumo à axiomatização da Aritmética foi dado por Hermann Grassmann já mencionado. Todavia o responsável pelo desenvolvimento da abordagem não a considerava, como uma axiomática. Então, aqui é pertinente alertar para o seguinte: os próprios construtores diziam que sua abordagem não era uma axiomática. Então, o que eles compreendiam por axiomatização? Qual o caminho que eles queriam trilhar se não a axiomatização ou o formalismo? Estas questões envolvem diretamente a sistematização do conceito de número. Como já sabemos mais tarde a axiomatização do número veio a ser consolidada por Giuseppe Peano, cujo reconhecimento perpetua-se até os dias atuais. Atualmente, podemos identificar o trabalho de 1861 de Hermann Grassmann, como o despontar de uma estrela – a saber, o formalismo – na Matemática. Entretanto, em 1931, essa estrela foi obscurecida com os trabalhos de Kurt Gödel (1906 – 1978) com a apresentação do teorema da incompletude. Este teorema possibilitou que Gödel questionasse a perfeição da Matemática instaurada pela corrente formalista.

Grassmann considerou que os axiomas só poderiam ser admitidos nas ciências reais, e rejeitava explicitamente axiomas na ciência formal, conforme dividiu a ciência.

Radu expressa a rejeição de Grassmann em,

> Nem Hermann nem Robert Grassmann jamais consideraram sua abordagem da Aritmética como uma axiomatização. Além disso, em 1844, o primeiro (Hermann Grassmann) identificou o método axiomático com os axiomas de Euclides e explicitamente rejeitou sua adoção, não só na Aritmética, mas na Matemática pura como um todo. Em Ausdehnungslehre, Grassmann explicou que um axioma é uma afirmação que expressa o que é dado pela "intuição pura". [39] (GRASSMANN, 1844/ 1894, p.10, 22-23 apud RADU 2003, p. 345)

Mesmo não aceitando a pertinência de axiomas nas ciências formais, sabemos que mais tarde veio a ser considerada uma axiomatização. Interessante a rejeição de Grassmann; então, o que significava para ele as definições conceituais ou princípios formais. Isso sugere que noção de axioma para a Aritmética difere da noção de axioma da Geometria.

O termo axioma não foi usado por Grassmann, podendo dizer que em seu lugar aparece definição ou princípios formais, mediante sua própria rejeição da adoção de axiomas na ciência formal. Sendo assim, (LEWIS, 1977, p.138-139

[39] Neither Hermann nor Robert Grassmann ever considered their approach to arithmetic to be an axiomatization. Moreover, in 1844, the former identified the axiomatic method with Euclidean axiomatic, and explicitly rejected its adoption not only in arithmetic but in pure mathematics as a whole. In Ausdehnungslehre Hermann Graβmann explained that an "axiom" [Grundsatz]is a statement expressing what is given by "pure intuition"( GRASSMANN,1844-1894,p.22 apud RADU,2003, p.345-346)

apud RADU, 2003, p.346) *propôs o termo axioma intuicional,*[40] como uma adequação ao termo usado em Ausdehnungslehre.

Para Grassmann, como já mencionado, a ciência divide-se em dois aspectos: real e formal. Relativamente ao aspecto real, temos que os objetos que a descrevem são dados do meio físico, da experiência; enquanto os objetos que caracterizam a ciência formal são dados da mente, vêm do pensamento.

A ciência formal ou Matemática pura, ou ainda, abstrata trata dos conceitos que são desenvolvidos por meio dessa ciência, que estão mais próximos do pensamento. Esta divisão sugere, também, que os conceitos desenvolvidos com base no aspecto real, como é o caso da Geometria e a Mecânica tornam-se aplicações dos conceitos desenvolvidos na ciência formal.

Grassmann (1947, p.22) explicita na introdução de sua obra[41], *(...) que antes de mostrar a divisão da teoria das formas, devemos excluir um ramo, até agora, incluso erroneamente nela, a saber, a Geometria.*

Chamou de definições e princípios formais, o que hoje denominamos de axiomas, dizia que em ciência formal não poderia ter axiomas, no sentido dos axiomas da Geometria de Euclides que são conhecidos há mais de dois mil anos. Grassmann enxergava-os como criações livres da mente e, em regra, eram chamados de definições. Estas definições ou princípios formais eram considerados por ele como as descrições conceituais, isto é, expressões verbais, cuja tradução para expressões simbólicas representava o pensamento puro.

Embora os construtores da abordagem da Aritmética não falassem em axiomatização e tivessem muito cuidado ao introduzir a linguagem simbólica no desenvolvimento de seus trabalhos; mais tarde, esta proposta foi vista como uma axiomatização.

---

[40] Ou axiomas da intuição, esse termo era usado por Kant que indicou com essa expressão os princípios sintéticos do intelecto puro que derivam da aplicação das categorias à experiência e que exprimem a possibilidade das proposições da Matemática e física pura. (ABBAGNANO, 2000, p.102)

[41] Obra intitulada: Teoría de La Extensión: nueva disciplina Matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones.

Um dos primeiros acadêmicos a enxergar que a abordagem da Aritmética proposta pelos irmãos Grassmann fosse uma axiomatização, foi Von Helmontz e outro foi Giuseppe Veronese que em um livro inspirado em *Ausdehnungslehre*, afirma que :

> [...] em Matemática pura, as definições usadas para introduzir os conceitos básicos devem ser vistas como estipulações hipotéticas, e afirmou que, em relação às suas verdades, não há diferença entre axiomas, postulados e definições. [42] (VERONESE, 1894, p.7-26 apud RADU, 2003, p.346)

Hölder foi o primeiro a realizar uma análise cuidadosa da abordagem da Aritmética dos irmãos Grassmann, as idéias fluidas dessa análise emergiram mais tarde, no afamado debate[43] , entre Frege e Hilbert.

Com a revisão de Hölder do trabalho de Robert, algumas questões foram levantadas e justificam de certa forma suas críticas à abordagem da Aritmética, que listamos a seguir:

1. Qual a relação entre Matemática, Lógica, língua natural e pensamento?

2. Qual a relação entre Aritmética e teoria formal das expressões simbólicas[44]?

Na primeira questão, o que estava em jogo era a descrição da prova matemática e a relação entre descrições conceituais (isto é, expressões verbais) e expressões simbólicas. Na segunda, conforme foi proposta por Robert, a Aritmética era uma disciplina específica e o *Grossenlehre* parecia ser uma disciplina mais geral e capaz de fundamentar todas as outras disciplinas.

---

[42] (...) in pure mathematics the definitions used to introduce basic concepts must be seen as hypothetical stipulations, and stated that with respect to their truth, there is no difference between axioms, postulates, and definitions.

[43] Esse debate pode ser encontrado em Frege, 1976, p.56-80). Segundo Radu (2003).

[44] A teoria das expressões simbólicas foi nomeada por Robert Grassmann de Grossenlehre e concebida como uma disciplina Matemática.

A concepção de R. Grassmann da Matemática está expressa na seguinte declaração,

> Formenlehre (isto é, a Matemática) deveria nos ensinar estritamente as leis do pensamento científico. Ela não pode tomar outras leis do pensamento como uma condição prévia (...) Conseqüentemente, ela também não pode se basear nas leis da linguagem, ela não pode prosseguir na dependência das leis e das formas da linguagem. Ela só pode aceitar como verdade a habilidade humana de pensar[45]. (R. GRASSMANN, 1872, p. 5 apud RADU, 2003, p.347).

Em relação à Aritmética, ele reforça sua concepção afirmando que,

> Quase todos os tratamentos introdutórios do Zahlenlehre[46] (...) contam com (e isso é um erro que deve ser primeiramente censurado, porque ele já exclui a possibilidade de uma abordagem estritamente científica) provas baseadas em inferências lógicas, ainda que os alunos nunca tenham estudado lógica e mesmo que nenhum tratamento científico da lógica estivesse disponível até pouco tempo. Esses tratamentos [da zahlenlehre] fazem isso mesmo que o rigor da Matemática não requeira qualquer aplicação da inferência lógica, mas podem e devem estar embasados independentes de tal lógica, somente em proposições sobre magnitudes peculiares, sua igualdade ou desigualdade[47]. (R. GRASSMANN, 1891,p.3 apud RADU, 2003,p. 347)

Robert sempre enxergou a Matemática como uma ciência, digamos, formada, por isso rejeitava a idéia de que qualquer precedente da lógica servisse como base aos fundamentos da Matemática, ou mesmo, da Aritmética. Colocou a Lógica em um patamar abaixo da Matemática, pois defendia que nenhuma descrição científica da lógica existiria senão apoiada na Matemática.

Dessa discussão, propôs uma hierarquia às disciplinas matemáticas que em sua concepção são cinco, e apresenta isso na seguinte passagem:

---

[45] Formenlehre [i.e. mathematics] should teach us the laws of strictly scientific thinking. It may not take other laws of thinking as a precondition: (…) hence , it also may not build on the laws of language,, it may not proceed in dependence on the laws and the forms of language. It only takes for granted the human ability to think.

[46] Zahlenlehre termo alemão que significa Aritmética.

[47] Almost all [introductory] treatments of *Zahlenlehre* (...) rely on ( and this is an error that has to be censured first, because it already excludes the possibility of a strictly scientific approach) proofs based on logical inferences, even though students have never studied logic and even though no scientific treatment of logic was available until recent times. And these treatments [of Zahlenlehre] do this even though rigorous mathematics does not require any application of logical inference, but it can and must be founded independently of such a logic only on propositions about single-value magnitudes, their equality or inequality.

**As cinco disciplinas de Formenlehre**
Formenlehre ou a Matemática divide-se em cinco disciplinas, uma disciplina geral, a Grossenlehre e quatro disciplinas especificas.
1. Grossenlehre, a primeira ou a mais geral das disciplinas de Formenlehre, nos ensina a reconhecer aquelas conexões entre magnitudes que são comuns a todas as disciplinas da Formenlehre. Desenvolve as leis da igualdade, adição ou Fugung, multiplicação ou Webung e exponenciação ou Hochung.

**As quatro disciplinas específicas da Formenlehre**

As quatro disciplinas específicas da Formenlehre emergem da Grossenlehre, pela introdução de novas condições. A principal questão relativa a estas condições é a que emerge quando magnitudes simples e iguais são conectadas. A conexão ***e o e*** pode ser igual a ***e*** ou diferente de ***e*** (...)
A primeira conexão corresponde à conexão de idéias dentro da nossa mente, na qual duas idéias iguais são conectadas para formar uma idéia comum chamamos de conexão interna. Em contraste, a última conexão corresponde à conexão das coisas no mundo exterior, na qual dois objetos iguais jamais se tornam um, mas permanecem distintos no espaço, como objetos acumulados, quanto mais espaços eles preenchem, chamamos de conexão externa.
A característica de conexão interna ou externa pode ser aplicada à adição (Fügung) tanto quanto à multiplicação (Weben) Conseqüentemente, há quatro tipos diferentes de conexão. (R.GRABMANN, 1872, p.11-12 apud RADU, 2003, p. 348)[48]

Nossa interpretação para o termo magnitudes é que são entidades formais que podem representar ou não um objeto matemático, cuja conexão, (isto é, operação em termos modernos) gera um objeto igual ou desigual. Hölder critica a ausência de definição do termo magnitude por parte de Robert, pois, para ele

[48] **The five disciplines of Formenlehre**.

Formenlehre or mathematics branches into five disciplines, one general discipline*, Größenlehre,* and four special disciplines.

*1. Größenlehre,* the first or most general discipline of Formenlehre, teaches us to recognize those connections between magnitudes that are common to all disciplines of Formenlehre. It develops the laws of equality, addition or Füngung, multiplication or Webung, and exponentiation or Höchung.

**The four special disciplines of Formenlehre.**

The four special disciplines of Formenlehre emerge from *Größenlehre* through the introduction of new conditions. The main question regarding these conditions is what emerges when equal simple magnitudes are connected. The connection e $\circ$ e may be either equal to e unequal to e (…).

We call the former connection, which corresponds to the connection of the ideas within our mind and in which two equal ideas are connected to form one common idea, the inner connection. In contrast, we call the latter connection, which corresponds to the connection of things in the outside world and in which two equal things never become one but remain distinct in space so that as things accumulate, the more space they fill, the outer connection.

The character of inner or outer connection can apply to Fügen or addition just as much as to Weben or multiplication. Accordingly there are four different types of connection.

uma teoria que sirva de fundamento à Matemática precisa ser minuciosamente detalhada.

Robert, quanto à concepção da divisão da ciência Matemática em real e formal, define dois tipos de conexões entre magnitudes: a conexão interna e a externa. Quando conectamos (*e o e*) magnitudes que se constituem baseadas em idéias internas à nossa mente, conexão interna, duas idéias iguais formam uma idéia comum. Quando conectarmos magnitudes que são dadas do mundo exterior à nossa mente, a conexão de dois objetos iguais nunca se transforma em um só, ao contrário, permanecerá distinta no espaço. A esta conexão, nomeou de externa.

A característica predominante nas duas conexões, interna e externa, pode ser estendida às operações de adição e multiplicação, resultando em quatro conexões distintas, que podem ser representadas pelas expressões:

$e + e = e$ $\qquad\qquad$ $e + e \neq e$

$e \times e = e$ $\qquad\qquad$ $e \times e \neq e$

Os termos adição e multiplicação não se referem ao sentido usual das palavras.

*Nota: O sinal '∘' vale para '+' ou 'x'*

| | | Tipo de conexão | |
|---|---|---|---|
| | | Conexão interna<br>$\boldsymbol{e \circ e = e}$ | Conexão externa<br>$\boldsymbol{e \circ e \neq e}$ |
| Operação | Adição (Fugung) | | |
| | Multiplicação (Webung) | | |

**Quadro II**

Robert Grassmann indica que o preenchimento do quadro II, baseado na realização de duas operações (adição e multiplicação) com as duas conexões, faz com que seja possível gerar as quatro disciplinas matemáticas ditas individuais. Quando fez uso dos termos adição e multiplicação, não se referia aos termos usados nas operações habituais com números. Segundo Radu (2003, p.349), ele se refere a termos modernos para duas operações algébricas binárias abstratas, porém definidas em um conjunto não especificado.

As quatro disciplinas fundamentais resultantes do preenchimento da tabela têm a forma estrutural-algébrica. Radu entende poder interpretá-las por meio das seguintes matrizes:

Lógica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aritmética $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Combinatórias $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Álgebra exterior $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Considerando a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ combinatória, entendemos que a adição é uma conexão interna, enquanto a multiplicação é uma conexão externa, ou seja;

$e + e = e$

$e \times e \neq e$

Então, na Lógica, a adição e a multiplicação são conexões internas; na Aritmética a adição é uma conexão externa, enquanto a multiplicação é interna. Na Álgebra Exterior, tanto a adição como a multiplicação são conexões externas.

Assim, a Aritmética parece ser uma disciplina em que **e + e ≠ e** e **e x e = e**, no qual **e** denota a unidade básica, da qual todas as outras são construídas. Ele coloca o *Grossenlehre* (a disciplina que definiu, como sendo a geradora das outras) conforme apresentado, como um caminho possível, entre pensamento e disciplinas matemáticas. As fórmulas constituíram-se em um fio condutor que liga o raciocínio ao desenvolvimento das disciplinas tais como: Aritmética, Lógica, Combinatória e Álgebra Linear.

Assim, ele adota o *Grossenlehre* como fundamento para outras disciplinas, o que se torna um ponto conflitante entre Hölder e Robert, pois para Robert, a Aritmética é gerada com base no *Grossenlehre;* para Hölder a Aritmética é uma *a - priori* e seu fundamento não pode ser dado por meio de fórmulas recursivas, como chamou Hölder, a abordagem da Aritmética proposta por Grassmann.

A interpretação de Robert do *Grossenlehre*, como o caminho que conduz à geração de todas as outras disciplinas matemáticas, está expressa na seguinte passagem:

> Existem várias leis e conexões que são comuns a todas as disciplinas de Formenlehre [i.e., Matemática], tais como: as leis que governam a igualdade (...) adição ou Fugung (...) multiplicação ou Webung. Todas estas leis sustentam e são aplicadas na Brigriffslehre (Lógica), assim como Zahlenlehre (Aritmética), Bindelehre (Combinatória) e Ausenlehre (Álgebra Exterior). É anti-científico derivar as mesmas leis em cada disciplina individual separadamente, ou mesmo, tomá-las como verdadeiras sem qualquer derivação ou prova ao invés de derivá-las cientificamente e prová-las em uma única disciplina pertencente à Formenlehre[49]. [R. GRASSMANN, 1872, p.17-18 apud RADU, 2003, p. 350].

Nesse sentido, o *Grossenlehre* funciona como a unificação das leis que são comuns a todas as disciplinas, cuja forma vai do geral ao particular; geral no sentido de que as leis comuns a todas as disciplinas fazem parte do

[49] There are a number of laws and connections that are common to all disciplines of Formenlehre [i.e.mathematics] such as the laws governing equality (…) addition or Fügung, (…) multiplication or Webung. All these laws hold and applied in Begriffslehre (logic), just as in Zahlenlehre (arithmetic), Bindelehre (combinatorics), and Ausenlehre (exterior algebra). It is unscientific to derive the same laws in each individual separately or even to take them for granted without any derivation or proof instead of deriving then scientifically and proving them in a single discipline belonging to Formenlehre. (GRASSMANN, 1872, 17-18, apud RADU, 2003, p. 350).

*Grossenlehre* e, ao mesmo tempo funcionam individualmente em cada uma das disciplinas ditas individuais.

Nesta perspectiva, ao analisarmos o *Grossenlehre* podemos conjecturar que Robert considerou-o apenas como:

- Uma linguagem simbólica;

- Ou uma descrição conveniente e econômica dos resultados dos fundamentos das disciplinas que são independentes entre si e do Grossenlehre;

- Ou uma linguagem universal para podermos falar sobre entidades de qualquer disciplina matemática, cuja semântica é dada pelos significados das expressões.

Grassmann gerou as quatro disciplinas matemáticas, pautado no *Grossenlehre,* tomando-o como uma base formal e introduzindo condições adicionais.

## IV. 8 - Estrutura do Grossenlehre

Robert Grassmann desenvolveu sua teoria, o *Grossenlehre*, apoiado na exploração das regras de conexão entre magnitudes, tomando como princípio a igualdade e a desigualdade. Para ele, estavam em discussão, a própria noção de igualdade e a prova matemática sobre a existência de magnitudes iguais. As idéias de igualdade e desigualdade não têm relação com as noções do termo aplicado na lógica (identidade lógica), pois ele usou o sinal "=" , como uma conexão para formar expressões simbólicas mais complexas.

O *Grossenlehre* foi dividido em quatro partes. Na primeira, Robert apresenta as noções mais gerais, nas quais o *Grossenlehre* está baseado. Noções essas que são relevantes para uma interpretação adequada de sua teoria; entre elas, estão as noções: de magnitudes, de variáveis, de valor e de conexão, de como conectar duas magnitudes, como obter o igual ou diferente, magnitudes simples e magnitudes compostas. Todas as demais noções foram obtidas apoiadas nas noções definidas na primeira parte, por meio de condições adicionais. Desta forma, podemos dizer que todo o trabalho de Grassmann, está sustentado nas noções definidas e apresentadas na primeira parte.

Na segunda seção, Grassmann descreve a prova matemática como uma cadeia de fórmulas conectadas por uma igualdade, como, por exemplo, a = b = b = a, de acordo com sua definição de igualdade a = b implica b = a. Na terceira parte, apresenta várias definições e teoremas, assim como também três fórmulas além de um estudo abstrato das propriedades algébricas de uma operação binária.

Na quarta e última seção, Grassmann considera duas operações binárias introduzidas sobre um conjunto de magnitudes não especificadas. Chama essas duas operações de adição (Fugung) e multiplicação (Webung), que não se tratavam das operações (usuais) da Aritmética. Ainda, nesta seção, são apresentadas cinco fórmulas básicas, além de teoremas e definições.

É importante lembrar que todas essas fórmulas, teoremas e convenções foram desenvolvidas apoiadas nas noções mencionadas na primeira seção. Assim, a compreensão da estrutura do *Grossenlehre* é necessária para entender a origem de suas fórmulas, até mesmo, compreender o motivo pelo qual Grassmann não aceitava que sua proposta para a Aritmética fosse considerada, como uma abordagem axiomática. Entendia que o *Grossenlehre* tinha um aspecto formal e que servia como base para gerar as outras disciplinas e seu conteúdo era composto por expressões diretas da mente. Isso faria com que a distância entre as expressões conceituais e as expressões verbais fossem menores. O que não era o caso da Geometria, pois as noções e definições eram dadas com base na observação e experiências.

Os conceitos gerais de igualdade e desigualdade, união e separação foram fortes instrumentos na construção da teoria dos Grassmann, tanto no Die Ausdehnungslehre (1844/1862) de Hermann Grassmann, como no Die

Zahlenlehre oder Arithmetik (1891) de Robert. Grassmann mencionado na sinopse da TGF[50].

> Devemos estabelecer, primeiramente, o conceito de igualdade e desigualdade. Como igualdade sempre pressupõe a diversidade, embora seja única para estabelecer a existência de dois entes; que sem ela, seriam um só, estaríamos forçados a acreditar que deve existir diversas relações de igualdade e desigualdade. Assim, por exemplo, ao comparar os segmentos estabeleceríamos a igualdade da direção ou da longitude, ou de direção e longitude, ou de direção e posição, etc. Entretanto, ao comparar outros entes estabelecer-se-iam outras relações de igualdade. Não obstante, o único fato que estas relações mudam, de acordo com a natureza das coisas comparadas, demonstra que estas relações não são inerentes ao conceito de igualdade, mas aos objetos a que este conceito é aplicado[51]. (H. GRASSMANN, 1947, p.35)

Grassmann discute a relação de igualdade e desigualdade e diz que a noção de igualdade pertence mais aos objetos que estão sendo comparados do que ao próprio conceito de igualdade. Sendo assim, é inerente aos objetos a que esse conceito é aplicado. Assim é possível nós termos diversas relações de igualdade e desigualdade. Nesse momento, Grassmann estava interessado em discernir entre um conceito mais geral de igualdade e um particular de congruência.

Hermann Grassmann trata do conceito de igualdade em,

> Por exemplo, no caso de dois segmentos de longitudes iguais não podemos afirmar que sejam iguais, somente que são iguais suas longitudes, e são as longitudes as que, portanto estão na relação mutua de igualdade. Desta maneira nós conservamos a simplicidade do conceito de igualdade, podendo afirmar conseqüentemente que é igual todo aquele que se pode afirmar o mesmo, ou em forma mais geral que

[50] TGF- Teoria Geral das Formas, visto também como *Grossenlehre*.

[51] Debemos establecer primeramente el concepto de igualdad y desigualdad. Como la igualdad siempre presupone la diversidad, aunque sólo sea para establecer la existencia de dos entes, que sin ella serían uno solo, estaríamos inclinados a creer que deben establecerse diversas relaciones de igualdad y desigualdad: así por ejemplo al comparar los segmentos estableceríamos la igualdad de la dirección o de la longitud, o de dirección y longitud, o de dirección y posición, etc.: en cambio, al comparar otros entes se establecerían otras relaciones de igualdad. Sin embargo, el solo hecho de que estas relaciones cambian de acuerdo a la naturaleza de las cosas comparadas, demuestra que estas relaciones no son inherentes al concepto de igualdad sino a los objetos a los que se aplica dicho concepto.

> pode ser substituído mutuamente em todo o julgamento (sentença)[52] .(H. GRASSMANN,1947, p.35-36)

A preocupação com o aspecto filosófico esteve sempre presente nos escritos de Hermann Grassmann. Em uma nota de rodapé, esclarece que a definição mencionada anteriormente não é uma definição filosófica do conceito de igualdade, mas, sim, uma explicação para que seja compreendida e para se evitar o entendimento contrário ao pretendido.

A determinação filosófica do conceito exigiria, para entender o contraste do igual e do diferente, um aparato considerável de conceitos que não é pertinente no momento. Aqui observamos o abandono do aspecto filosófico, conforme ele mesmo se propôs a fazer no prefácio da sua obra.

Grassmann buscava distinguir entre um conceito geral de igualdade e um conceito particular de congruência. Entendia que a relação de igualdade entre magnitudes pertencentes às disciplinas, ditas individuais, depende da natureza dos objetos que estão sendo comparados, e não do próprio conceito. Mesmo Grassmann mostrando-se hostil em usar noções lógicas na Matemática suas definições basicamente resultaram em expressões simbólicas, como em:

> (...) mesmo que ele não tenha usado quantificadores, sua definição formal basicamente resultou em $x = y \Leftrightarrow \forall F(F(x) = F(y))$ onde F denota uma fórmula do Grossenlehre. Ao mesmo tempo, ele fez a igualdade dependente do valor. Isso o levou a uma dificuldade, que em nenhum lugar ele discutiu explicitamente [53](RADU, 2003, p. 352)

Outro aspecto tratado por Grassmann é o conceito de união e separação ou união e decomposição, como indicado em,

---

[52]Tradução nossa. Texto Original: Por ejemplo, em el caso de dos segmentos de igual longitud no podemos afirmar que sean iguales, sino solamente que son iguales sus longitudes, y son las longitudes las que por tanto están em la relación mutua de igualdad. De esta manera hemos salvado la simplicidad del concepto de igualdad, pudiendo afirmar por lo tanto que es igual todo aquello de lo que se pueda afirmar lo mismo , o en forma más general aquello que pueda substituirse mutuamente en cualquier juicio.

[53] Even though he did not use quantifiers, his formal definition basically amounted to: $x = y \Leftrightarrow \forall F(F(x) = F(y))$ where F denotes a formula of *Größenlehre*. At the same time, he made equality dependent on value. This brought him into a difficulty which he nowhere discussed explicitly.

> Se uma espécie de união é tal que, sem que varie o resultado, pode-se arbitrariamente colocar os parênteses no caso de três membros, e pode-se mudar a ordem no caso de dois, então também no caso de um número arbitrário de membros pode-se mudar os parênteses e a ordenação[54].( H. GRASSMANN, 1947, p.38)

Grassmann procurava explorar todas as relações e propriedades possíveis no processo de união entre magnitudes quando o recurso à união não fornece mais elementos de exploração, então, o que é indicado é a exploração do resultado baseado na separação dos dados o que chamou de método analítico.

Toda sua teoria foi desenvolvida de uma forma muito geral. Por exemplo, quando ele se refere às magnitudes ou entes, não se trata de um elemento específico, mas, sim, a uma gama de objetos matemáticos, para os quais as propriedades são satisfeitas ou não. Grassmann define adição, subtração, multiplicação e divisão de magnitudes, além da potenciação, a partir da união.

Ele diferenciou dois métodos de união, nomeando-os de método sintético e analítico. Podemos dizer que o método sintético era o caminho de ida na conexão de magnitudes, ao passo que o método analítico consistia na desconexão dos resultados obtidos, pelo método sintético, o caminho de volta. Foi pautado nos estudos dessas estruturas que ele definiu o conceito das quatro operações entre magnitudes. O sentido de operação a que nos referimos, não é ainda o usual, como as operações com números, mas, sim, operações com magnitudes diversas, nos quais o resultado dependia das características dos objetos.

Em termos modernos, a Teoria Geral das Formas de Hermann Grassmann constitui a Álgebra Linear, pois na TGF estão presentes oito propriedades e duas operações que coincidem com aquelas da definição de espaço vetorial. Entre essas propriedades, notamos a associatividade, a comutatividade, a existência de elemento simétrico e de elemento neutro para uma determinada operação.

[54] "Si una especie de unión es tal que, sin que varíe el resultado, se pueden poner arbitrariamente los paréntesis en el caso de tres miembros, y se puede cambiar el orden en el caso de dos, entonces también en el caso de un número arbitrario de miembros pueden cambiarse los paréntesis y la ordenación"(GRASSMANN, 1947)

A Teoria Geral das Formas é responsável pela algebrização das construções geométricas consideradas, então, como um processo da descrição matemática dos objetos. Esta forma de descrição pode ser vista na história, quando matemáticos apropriam-se das relações algébricas para descrever fenômenos geométricos. A possibilidade dessa forma de descrição conduziu a uma mudança de concepção, pois matemáticos começam a refletir sobre suas próprias construções e atividades, ao invés de refletirem sobre objetos do mundo externo. Deslocando, assim, o foco de investigação dos problemas relativos ao conhecimento do mundo externo para problemas da dinâmica do conhecimento e da cognição.

No desenvolvimento dos trabalhos de Robert Grassmann, não estava prevista uma abordagem axiomática, do conceito de número, já que para ele o gerador do número pertencia a umas das fórmulas contidas no Grossenlehre que parece ter sido desenvolvido formalmente e, como conseqüência, não havia como escapar da abordagem axiomática. Grassmann não pensava assim, considerando as afirmações de sua teoria como definições formais e não como axiomas.

Robert e Hermann não admitiram que suas teorias utilizassem o método axiomático, pelo fato de construírem os números naturais, a adição e a multiplicação com base na relação x + 1. O próprio *Grossenlehre foi considerado por eles, fora de um sistema axiomático, pois interpretavam as* fórmulas contidas nele como expressões conceituais, já que conseguia exprimir em palavras as fórmulas, isto é, expressões verbais.

Grassmann entendia que essas expressões eram dadas diretamente do pensamento, por isso, não poderiam ser consideradas como axiomas. Aqui, é pertinente destacar que, na realidade, havia diversas compreensões da noção de axioma, pois, há dois mil anos Euclides propõe a axiomatização da Geometria, na qual seus axiomas vêm da experiência e, hoje, temos axiomas que vêm da intuição. Então, podemos concluir que existem, sim, conceituações diferentes à noção de axioma.

## IV.9 - A natureza da prova Matemática

Outro tema bastante presente na obra de Robert Grassmann é a natureza da prova Matemática. A concepção de prova de Robert emerge na seguinte passagem:

> Porque não admitimos qualquer outra ciência nem mesmo a lógica, como um pré-requisito para Zahlenlehre, não deveríamos também aplicar inferências lógicas e provas para suas provas.
> Felizmente, no entanto, não temos necessidade de contar com a inferência conceitual ou lógica em nossas provas da *Grossenlehre*. A inferência conceitual, a saber, avança somente de um conceito mais geral para um conceito que está subordinado ou mais limitado. Nas provas de *Grossenlehre* em contraste, não estamos tratando com o geral e o limitado, mas unicamente com magnitudes iguais e desiguais. Conseqüentemente, a inferência conceitual ou lógica não tem lugar no *Grossenlehre*. Isso também é indicado pelo fato de que todas provas de Formenlehre podem e devem ser escritas em formulas. A tradução das provas em linguagem é somente uma transposição na área do pensamento comum, algo que é inerentemente estranho ao estrito Formenlehre. As provas em Grossenlehre são conduzidas ao conectar uma fórmula com uma segunda com o igual, essa segunda com a terceira e assim por diante[55]. (R. GRASSMANN,1891,§ 9 apud RADU,2003,p.355).

Conforme explica a citação, ele rejeita qualquer elemento da Lógica como fundamento para a Aritmética. Nesse ponto, as concepções de R. Grassmann e Hölder assemelham-se, pois Hölder abomina qualquer inferência lógica nos fundamentos da Aritmética.

Robert mostra que sua nova criação não se apropria de inferências conceituais ou lógicas, mas, sim, de duas noções bastante elementares que são

[55] Because we do not assume any other science, not even logic, as a prerequisite of *Zahlenlehre* we should also not apply logical inference and proof for its proofs. Fortunately, however, we have no need to rely on the conceptual or logical inference in our proofs of *Größenlehre*. Conceptual inference, namely, advances only from a more general concept to a concept that is subordinate or more narrow. In the proofs of *Größenlehre* in contrast, we are not dealing with general and narrow but solely with equal and unequal magnitudes. Hence, the conceptual or logical inference has no place in *Größenlehre*. This is also indicated by the fact that all proofs of *Formenlehre* can and must be written in formulas. The translation of the proofs into language is only a transposition into the area of common thinking, something that is inherently foreign to strict *Formenlehre*. The proofs in *Größenlehre* are conducted by connecting one formula with a second one as equal, this second one with a third one, and so forth (R. Grassmann,1891,§9. Apud Radu,2003,p.355)

as noções de igualdade e desigualdade entre magnitudes, como mostra quando conduz o processo de prova, conectando magnitudes por meio do igual ou do desigual em uma cadeia de fórmulas.

Considera também, os aspectos direto e indireto de prova. O aspecto indireto não era relevante no *Grossenlehre* somente se fazia presente nas disciplinas ditas individuais. Todo o *Grossenlehre* baseou-se em provas diretas, finitas ou provas por indução completa, um conceito importante da Matemática, conforme Halmos (1970, p.52). “A indução é, freqüentemente, usada não somente para provar coisas, mas também para defini-las”.

## IV. 9.1 - Método de prova dos conceitos matemáticos

Nas ciências exatas, a prova tem a característica de um procedimento quando se deseja mostrar a existência de um ente matemático. Para demonstrar a existência de tais objetos, podemos adotar o método direto ou indireto de prova.

***O método de prova direta*** consiste na construção, passo a passo, partindo de um princípio particular e chegando ao geral. Este método foi adotado pelos intuicionistas que acreditavam na natureza sintética da Matemática e rejeitavam o método de prova indireta. Neste método, objetiva-se provar a existência das entidades matemáticas construindo um exemplo tangível do objeto e rejeita o princípio do terceiro excluído quando se trata de proposições em que haja referência a grandezas infinitas.

**O método de prova indireta** – consiste em demonstrar a verdade de uma proposição, partindo de uma hipótese provisória de que A’, o contrário de A, é verdadeiro. Então, por meio de uma cadeia de raciocínio de caráter não construtivo produz-se uma contradição de A’, demonstrando, assim, o absurdo de A’. Com base no princípio do *terceiro excluído,* o absurdo de A’ demonstra a verdade de A. Em suma, podemos dizer que para estabelecer a existência de uma entidade matemática, basta a demonstração de que ela não implica contradição.

Os seguidores fiéis da corrente intuicionista fundada por Brouwer rejeitam esse método. Não era o caso de Otto Hölder, que acreditava na natureza sintética da Matemática, mas não rejeitava o método indireto de prova.

O uso sistemático da indução está presente nos trabalhos de Robert. Grassmann, embora tenha adotado esse princípio como um teorema demonstrando-o, baseado em sua definição de igualdade.

A discussão seguinte consiste em descrever a atitude de Robert ao defender o Grossenlehre como um fundamento para a Aritmética.

## IV. 10 - A abordagem de Grassmann do Grossenlehre, como o único fundamento para a Aritmética

A distinção entre ciência real e ciência formal era relevante também para Robert Grassmann, como a Aritmética pertencia à Matemática formal, os processos de construção que descreviam os objetos, eram dados por elementos vindos diretamente do pensamento, isto é, sem intermédio da experiência. Dessa forma, então, ele considerava o *Grossenlehre (ou as expressões contidas nele)* também como o meio de descrever os processos que conduzem à existência do objeto.

Assim também ocorreu com o desenvolvimento de uma teoria para a construção dos números naturais, a qual foi vista por eles como o único fundamento da Aritmética. As definições dessa teoria que constam de seus primeiros escritos, parecem ter características do método axiomático, levando mesmo Hölder na discussão com Robert Grassmann a questionar a utilização, ou não, do princípio axiomático na constituição de sua proposta. As definições a que nos referimos, estão explicitadas a seguir e mostram como R.Grassmann pensou a construção da Aritmética:

(113). Definição - Zahlenlehre ou Aritmética é o ramo de Grossenlehre que lida com uma unidade única, o “Um”, com as magnitudes que emergem das sucessivas junções de unidades, os números, assim como as magnitudes geradas pela conexão de números.
(114). Definição - Os números (o arithmoi,o numeri) que surgem por meio de sucessivas junções de unidades são considerados como sendo diferentes um do outro .(...)
(115). Fórmula básica para contagem

Fixamos S1(m+n) ≠ S1(m) ou $\overbrace{1 + 1+...+1+...+1}^{m+n} \neq \overbrace{1 + 1 +...+ 1}^{m}$.
.Todos os números gerados por meio de sucessivas junções da unidade, i. e., números gerados por meio da contagem são desiguais uns aos outros.(...)
(116). Definição - O nome e os símbolos dos dez primeiros números (...) . Os símbolos para os números são chamados dígitos.
(a) Zero (símbolo 0) é a magnitude que pode ser juntado a qualquer outra magnitude sem mudar o valor dessa outra magnitude
(b) Um (símbolo 1) é a unidade do número puro para o qual 1 x $e = e$ (...)
(c) Dois (símbolo 2) é um mais um (...)
(d) Dez (símbolo 10) é nove mais um .(...)
(118). Proposição. $a + ( b + 1) = a + b + 1$
Os números estão sujeitos a uma fórmula básica da Einfugung: em vez de juntarmos uma unidade à segunda parte, pode-se juntá-lo à soma, e em vez de juntar uma unidade à soma, pode-se juntá-la à segunda parte.(...)
(120). Formula básica da junção de números. $a + ( b + 1) = a + b + 1$ e $1 + 1' = 1' + 1$ .
A fórmula básica de Einfungun e Zufugung ou de Einigung e Vertauschung vale para junção dos números.
121. Lei da junção dos números. A lei da Zufugung vale para toda conexão de números pela Fugung. Isto é, pode-se considerar ou remover os parênteses á vontade sem mudar o valor e variar aleatoriamente a ordem das partes, e a soma será novamente um número (R. GRASSMANN, 1891, § 113-116, § 118-121 apud RADU, 2003, p. 356-357)[56].

As definições apresentam muita similaridade com o trabalho de Peano na Aritmética. Entretanto, é pouco provável que Robert tenha se familiarizado com as idéias de Peano. Os trabalhos de Robert podem ser vistos como uma reescritura do trabalho de Hermann Grassmann. A obra de Hermann Grassmann também foi fonte de inspiração para Peano.

A definição (113) mostra que a Aritmética de fato é construída procedendo do *Grossenlehre*. Com ela, Grassmann postula a existência de uma unidade básica para a Aritmética, o “um” e a partir da junção desta unidade com outras

[56] As definições foram reproduzidas na integra de Radu (2003).

são geradas magnitudes, isto é, os números. Conectando sucessivamente uma unidade básica com outra, gera-se a seqüência dos números. Na definição (114), ele afirma que nenhum número gerado a partir de uma junção é igual a outro. Na fórmula (115), apresenta um modo de contagem dos números. A existência do elemento neutro “zero” para a adição e o “um” para a multiplicação estão explicitados na definição (116).

Ao considerar as definições (116) (a) e (b), Grassmann de certa forma utilizou o método axiomático, pois tanto a definição 116 (a) como a 116 (b) podem ser vista como axiomas. Em nenhum lugar está escrito o que significou para ele o “zero” e “um” , adotados como já existindo enquanto as definições 116 (c) e 116 (d) podem ser vistas como definições convencionais.

A proposição (118) representa uma aplicação para a adição de números pelas fórmulas $a + ( b + 1) = a + b + 1$ e $1 + 1' = 1' + 1$.

Sendo assim, a operação de adição dos números naturais é introduzida concomitantemente com a introdução da seqüência dos números naturais com base na simples operação $x + 1$.

De fato, se ele adotou o *Grossenlehre* anteriormente à sua abordagem da Aritmética, então ela não foi constituída em uma base axiomática, o *Grossenlehre,* sim, embora ele nunca admitisse isso.

Robert referenciava o *Grossenlehre* como uma expressão direta do pensamento, isso está expresso em:

> O desenvolvimento da Aritmética toma uma forma axiomática apenas se *Grossenlehre* não for desenvolvido de antemão. Em seu tratamento do *Grossenlehre*, R. Grassmann nunca declarou que ele era de natureza axiomática. Sua referência permanece no fato de que *Grossenlehre* é uma expressão matemática direta do pensamento, assim como, o fato que em todas suas afirmações gerais sobre *Grossenlehre* ele confiou exclusivamente em *definições* e *proposições* como constituintes desta teoria, indica uma rejeição a abordagem axiomática da Aritmética, assim como para *Grossenlehre*. [57](RADU, 2003, p. 358)

[57] The development of arithmetic takes an axiomatic form only if *Größenlehre* is not developed beforehand. As for his treatment of *Größenlehre* itself, R. Grassmann never claimed that it has an axiomatic nature. His permanent reference to the fact that *Größenlehre* is a direct, mathematical expression of thinking, as well as the fact that in all his general statements about *Größenlehre* he relied exclusively on *definitions* and

Ao observarmos as definições contidas no trabalho de Robert Grassmann, notamos a semelhança entre ele e a de Peano, pois a definição (113) estipula que a Aritmética usa a unidade básica que é chamada de *um* e isto corresponde ao primeiro axioma de Peano[58] "1 é um número". Quando Grassmann define que adicionando um número a outro, obtemos um número, estava definindo a função sucessor, que pode corresponder ao axioma de Peano: "O sucessor de qualquer número é um número". E, a definição (114) e a fórmula (115) podem corresponder ao postulado de Peano: "Dois números não têm o mesmo sucessor".

Com as definições, Grassmann constrói a seqüência dos números naturais além de introduzir as operações de adição e multiplicação, bem como as propriedades, associativas da adição e multiplicação, a comutativa para ambas as operações, a existência do neutro, o zero para a adição e o um para a multiplicação.

Ao analisarmos as definições mencionadas anteriormente, sem conhecer a exposição de sua teoria podemos conjecturar que Robert estava errado, quando dizia que sua abordagem não era uma axiomática. Entretanto, de seu ponto de vista, sua abordagem da Aritmética advém do *Grossenlehre*, o que implica que ela torna-se livre do princípio axiomático. Isso também justifica a sua rejeição em admitir o princípio axiomático. Sua abordagem não é de natureza axiomática, já que o *Grossenlehre* é desenvolvido anteriormente à Aritmética.

As idéias de Grassmann, apesar de terem sofrido fortes críticas, perpetuam-se até os dias atuais. A teoria dos números é a base para toda a Ciência Matemática ou, pelo menos, está presente em todas suas ramificações. A construção dos naturais, proposta por Grassmann mostra que a operação de adição é intrínseca ao conceito de número. Os trabalhos de Grassmann formalizaram esta idéia.

---

*propositions* as the constituents of this theory, indicate a rejection of the axiomatic approach to arithmetic as well as to *Größenlehre*.

[58] As formulações dos axiomas de Peano foram reproduzidas de acordo com Radu. Os axiomas que apresentamos no capítulo II é uma apresentação mais moderna e extraída da obra (BOYER, 2003).

Podemos ver relação entre Grassmann e Caraça, quando o segundo afirma que,

> A operação de adição é a operação mais simples e da qual todas as outras dependem. A idéia de adicionar ou de somar está incluída na própria noção de número natural – o que é a operação elementar de passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar uma unidade a um número? (CARAÇA, 2003, p.16)

Podemos concordar com Poincaré, quando diz: "é das hipóteses mais simples que devemos desconfiar; porque são aquelas que têm mais possibilidades de passarem desapercebidas". (BOYER, 2003, p. 417). Grassmann desconfiou que a teoria dos números merecesse um teor científico, entretanto não era seu objetivo principal estudar os números, ou melhor, rever as questões de fundamentos desse objeto matemático, mas revisar sua nova teoria de forma a preencher as lacunas da sua obra.

A discussão apresentada no artigo de Radu nos leva a compreender que Robert pensou o *Grossenlehre*, como uma teoria que expressa as leis do pensamento. Talvez isso se deva ao fato de que na Matemática o pensamento é representado por meio de expressões e os objetos matemáticos só aparecem nas aplicações. Isso responde o porquê do teor operacional da teoria de Grassmann. Toda a construção dos números naturais foi desenvolvida no sentido de junções sucessivas de "um".

A construção do número natural como proposto por Hermann e Robert revela, assim, a existência do objeto matemático número.

É interessante notar que Grassmann sempre introduziu as definições por meio de palavras, o que quer dizer expressões verbais e logo, em seguida, introduz a expressões simbólicas, sempre expressando duas vezes a mesma definição e Robert prosseguiu da mesma forma.

A análise da abordagem da Aritmética proposta por Robert Grassmann finda aqui. Passamos, agora, a analisar a crítica que Hölder fez de seu trabalho.

## IV. 11 – Elementos que justificam a rejeição de Hölder à abordagem da Aritmética proposta por Grassmann

Grassmann trouxe para a Matemática uma nova forma de abordar os conceitos, até então, inexistentes na ciência formal. Esta inovação propõe a abordagem analítica dos objetos que, até o momento, estavam fundamentados na abordagem sintética. Sua compreensão era que o método sintético nos informa algumas propriedades dos objetos, porém a abordagem analítica possibilita a descoberta de outras relações presentes nos conceitos. Assim sendo, ele explora um resultado obtido por meio do método sintético, desfazendo-o e extraindo dele uma gama de propriedades, que o método sintético não possibilitava enxergá-las.

Na proposta de Grassmann para a construção dos números naturais, aparecem os dois métodos de abordagem, o sintético e o analítico. Isso nos conduz a interpretar que a abordagem da Aritmética nesta perspectiva abrange a definição do conceito – número – no sentido ordinal e no sentido cardinal.

Podemos dizer que o método sintético define número, usando as noções de ordinalidade, conforme apresentado na definição 116, ao passo que o método analítico parte da fórmula estruturada e dada por Robert no *Grossenlehre*. Isto é, por meio de um conjunto finito de identidades algébricas que definem simultaneamente os números naturais e suas operações.

Grassmann foi bastante criticado quando propôs esta nova forma de interpretar os conceitos. Até então, os objetos pertencentes à ciência formal eram descritos, segundo o método sintético. A interpretação de Hölder era que o método referenciava a intuição ou a experiência, enquanto o método analítico era puramente lógico.

Hölder reconheceu que a consistência lógica do *Grossenlehre* e sua coerência dedutiva eram inquestionáveis. Esse reconhecimento está expresso em: *Dificilmente qualquer objeção pode ser feita à consistência lógica* *(folgerichtigkeit) dos principais resultados da seção introdutória geral*[59]. (HÖLDER, 1892, p.587 apud RADU, 2003, p.360).

Sua critica direcionou-se ao *Grossenlehre*, quando Grassmann o propõe como o único fundamento rigoroso para a Aritmética. Hölder revela seu descontentamento quanto à abordagem de Robert questionando algumas definições na tentativa de mostrar que a abordagem proposta por ele falharia.

Como mencionamos, Grassmann apropriou-se de alguns conceitos elementares já existentes na Matemática para construir sua teoria, entre eles, o de igualdade e magnitude. Entretanto, Hölder indignado questiona a não explicitação de Grassmann do termo magnitude, o que está expresso em:

> Eu não estou alegando que na definição de “magnitude”, o termo a ser definido tenha sido explicado pela palavra sinônima “valor”. Considero que a exigência de um valor único é para assegurar a natureza exata do princípio da comparação que é estipulado entre as magnitudes. Mas, é impossível pensar em objetos que não podem ser comparados sob o aspecto de um valor? E como deveríamos aplicar o critério dado? As formulações conceituais desse tipo quase poderiam recordar a Filosofia Escolástica[60] que está relutante em extinguir-se completamente na Alemanha[61]. (HÖLDER, 1892, p. 587 apud RADU, 2003, p. 360)

A indagação de Hölder direcionou-se ao modo como Grassmann expôs a noção de comparação entre magnitudes e, sua crítica está, em tal critério não ser

---

[59] Hardly any objection can be made to the logical consistency [folgerichtigkeit] of the main results in the general introductory section.

[60] Literalmente significa – Filosofia da escola, e como as formas de ensino medievais eram duas, *lectio* – que consistia no comentário de um texto, e *disputatio* – que consistia no exame de um problema através da discussão dos argumentos favoráveis e contrários. Na escolástica a atividade literária assume predominantemente a forma de comentários. Pode se chamar de escolástica qualquer filosofia que assuma a tarefa e defender racionalmente determinada tradição ou revelação religiosa. Para isso, via de regra, essa escolástica lança mão de uma filosofia já estabelecida e famosa; nesse sentido a escolástica é a utilização de determinada filosofia para defesa e ilustração de determinada tradição religiosa. Assim sendo, podemos destacar várias filosofias escolásticas, tanto na Antiguidade como no mundo moderno. Na antiguidade neoplatonismo, o neopitagorismo, etc.; na Idade Média, a filosofia dos árabes e dos judeus; no mundo moderno, a filosofia de Malebranche, de Berkeley e de muitos espiritualistas. (ABBAGNANO, 2000, p.344).

[61] I am not claiming that in the definition of “magnitude”, the term to be defined has been explained by the synonymous word “value”. I consider that the requirement of a unique value is used to ensure the definite nature of the principle of comparison that is stipulated between the magnitudes. However, is it impossible to conceive of objects that cannot be compared under the aspect of a value? And how should one apply the given criterion? Conceptual formulations of this kind could almost recall Scholastic philosophy that is reluctant to die out completely in Germany.

explicitado. Na verdade, Grassmann não adotou nenhum critério específico, somente o fez pensando no conceito de igualdade e desigualdade. Todavia deixa claro que a relação de igualdade depende da natureza dos objetos que estão sendo comparados.

Em nosso entendimento é natural, pois já sabemos que Grassmann tratou da Matemática em termos gerais e abstratos. Um exemplo disso é sua contribuição ao desenvolvimento da Álgebra abstrata. Entretanto, Hölder entendeu que, para comparar objetos, temos de primeiramente especificá-los e Grassmann, assim não o fez, ao considerar as noções de magnitudes. Isto aparece como um ponto conflitante entre Hölder e Grassmann que levou Hölder a conjecturar que a abordagem da Aritmética era frágil.

Hölder criticou bastante o tratamento de Grassmann, entendendo o Grossenlehre como um disfarce aos problemas difíceis da Matemática e seguiu, ainda, com fortes questionamentos em relação aos procedimentos adotados no *Grossenlehre*. Compreendia que o conjunto de fórmulas e teoremas provados com base nas definições são inconsistentes. Além disso, muitas demonstrações são pressuposições. Então, como falar que tais expressões sejam representações do pensamento? Esta foi uma questão levantada por Hölder que caracterizou as expressões contidas no *Grossenlehre*, como sendo de *natureza hipotética* e, portanto, necessitaria de axiomas para provas consistentes dos teoremas e das formulas básicas que o compunham.

Na verdade, inicialmente, Hölder não compreendeu o objetivo de Grassmann que era propor um meio de evidenciar as propriedades dos números e, com as mesmas defini-los. Hölder ainda apontou várias dificuldades para tratar a construção dos números na tentativa de mostrar sua fragilidade. Radu agrupou estas dificuldades em seis objeções[62], expressas em,

> As dificuldades fundamentais consideradas por Hölder podem ser agrupadas em seis objeções. Eu gostaria de chamá-las de: Objeção à independência; Objeção à consistência; Objeção à completude ou

[62] Para maiores detalhes dessas objeções ver Radu ,(2003).

perfeição; Objeção ao dualismo conteúdo / forma; Objeção a teoria pura / aplicada; e Objeção a Cardinal e Ordinal[63]. (RADU, 2003, p. 362).

O conjunto de dificuldades explicitadas por Hölder sobre a fragilidade do Grossenlehre revela sua rejeição à abordagem proposta por R. Grassmann. Podemos compreender sua rejeição, pois Hölder era um matemático, cuja concepção da Matemática está embasada nos princípios do intuicionismo, corrente filosófica que, em termos gerais, tem como recurso a intuição.

Hölder considerava a existência dos objetos matemáticos, segundo a interpretação de Brouwer, assim: *A existência dos objetos matemáticos é definida pela possibilidade de construção: por isso, só "existem" entes matemáticos que possam ser construídos. (*ABBAGNANO, 2000, p.583)

Por fim, Hölder focaliza a existência do número natural, conforme proposto por R. Grassmann e apresenta duas maneiras de interpretar o G*rossenlehre*: a interpretação analítica e a sintética. Discute esses dois métodos e conclui que a abordagem de Grassmann cobre o conceito de número natural. Entretanto, Hölder não aceitava a abordagem da Aritmética como o único fundamento rigoroso ao desenvolvimento de todo sistema numérico. A compreensão de Hölder era que Robert contava com identidades básicas e condições adicionais e, sendo assim, sua abordagem não podia ser caracterizada como construtiva. Do ponto de vista de Hölder, uma base teórica consistente não poderia ser admitida e, sim, construída. Expressa isso em,

> [...] até os irracionais são introduzidos sem prova de sua legitimidade. "É simplesmente estipulado que (definição 382): Números irracionais são certas magnitudes que são infinitas, mas para as quais todas as leis de comparação valem para a mesma extensão como para os números finitos". Isto é seguido pela proposição (número 383): "Todas as proposições de *Zahlenlehre* que são válidas para os inteiros e frações também são válidas para os números irracionais". Todavia, se as proposições de existência são pressupostas, o desenvolvimento das

[63] The foundational difficulties considered by Hölder can be grouped into six objections. I should like to call them the: Independence objection; Consistency objection; Completeness objection; Content/form dualism objection; pure/applied theory objection; and Cardinal/ordinal objection.

> proposições é essencialmente consistente[64]. (HÖLDER, 1892, p.594 apud RADU, 2003 p.370-371).

Hölder sentiu-se confortável, por um tempo, com a abordagem da Aritmética proposta por Grassmann; compreendia que a teoria cobria o conceito de número natural e que ambas as interpretações: sintética e analítica estavam em perfeita harmonia. Mas, quando nos deslocamos para os demais domínios numéricos, a abordagem era puramente formal-analítica, o que o faz conjecturar que a abordagem era vulnerável e falharia, uma vez que cobre apenas o número natural.

Nesta perspectiva, a visão de Hölder possibilitou-lhe fornecer uma alternativa para construção dos números, de modo que pudesse ser vista como um fundamento rigoroso à Aritmética e a toda sua extensão.

## IV. 12 - Hölder propõe outra forma para a construção dos números naturais

Hölder propôs a construção dos números naturais, enfocando o conceito de número ordinal, cujos aspectos envolvidos nesta construção eram: estrutura, ordem e série.

**1, 2, 3, 4, 5,...**

Dessa forma, Hölder entendia que o conceito de número era dado pela intuição, ou seja, da intuição lógica do conceito de número natural ordinal, antes mesmo da introdução de qualquer operação; o que difere da abordagem de

[64](...)even the irrationals [are] introduced without proof of their legitimacy. It is simply stipulated that ( Definition 382): " Irrational numbers are such magnitudes that do not terminate, but for which all laws of comparison hold to the same extent as for terminating-numbers." This is followed by the proposition (Number 383): "All propositions of Zahlenlehre that hold for any integers and fraction also hold for irrational numbers. "Nonetheless, if the existential propositions are presupposed, the development of the propositions is essentially consistent (HÖLDER, 1892, p.594 apud RADU,2003, p. 594)

Grassmann, para o qual o número foi construído simultaneamente com as operações de adição e multiplicação. Com base nessa introdução podemos explorar a operação de adição intrínseca ao conceito de número ordinal, assim como também introduzir o símbolo “+” e tomarmos um elemento arbitrário da seqüência, de modo a obtermos o sucessor e defini-lo como “a + 1” e de modo que nenhum elemento dessa seqüência seja igual. Ele entendia que essa forma garantia o uso das fórmulas (mencionadas anteriormente), como uma definição para a adição.

$$\mathbf{a + ( b + 1) = ( a + b ) + 1} \qquad \mathbf{(1)}$$

Com a adição definida, é possível introduzir a fórmula (2), que resulta na definição de multiplicação,

$$\begin{cases} \mathbf{1.a = a} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{(b + 1)\ a = a\ b + a} & \end{cases}$$

Para Hölder, ainda que a construção dos números inteiros negativos seja uma extensão similar do domínio dos inteiros positivos, é a seqüência,

**... – 5, – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,...**

Até aqui a alternativa de Hölder é baseada na intuição, em perfeita harmonia com o contexto histórico que permeia o conceito de número. Agora, quando se trata da extensão dos inteiros aos racionais, o comportamento de Hölder é outro. Passa a utilizar símbolos sem ao menos defini-los, mostrando, assim, um aspecto bastante formal. Expresso nas suas palavras,

> Vamos examinar expressões da forma a/b, a e b sendo inteiros positivos ou negativos diferente de zero. Provisoriamente, a tal símbolo não é dado um conteúdo, ele é uma mera forma em que só podemos distinguir a presença de dois valores numéricos denotados por a e b; (...). Nós então

> estipulamos que dois símbolos a/b e a'/b' deviam ser vistos como equivalente a ab' – ba' = 0 [65]. (HÖLDER, 1892, p. 592 apud RADU, 2003, p. 372)

A alternativa de Hölder torna-se agora contraditória com sua concepção da Matemática, pois ele se apropria de símbolos e fórmulas para definir os números racionais, conforme mostra a citação acima. Todavia, Hölder criticou a teoria de Grassmann, na qual estava prevista a existência de uma disciplina algébrica antes da Aritmética (que é uma das críticas de Hölder).

Agora, Hölder propõe a construção dos números racionais, adotando, a princípio, um aspecto bastante formal e omitindo a definição da simbologia usada por ele na introdução dos racionais.

Não era assim que Hölder via sua construção dos racionais. Sendo assim, ele formulou dois argumentos a favor de sua alternativa: primeiro, defendeu que sua construção dos números racionais partiu da ontologia dos números naturais e não de estruturas, conforme ocorria no *Grossenlehre*; segundo, ele apoiou-se na relação de equivalência e no conceito de produto cartesiano N X N para introduzir uma relação em que definiu como (a, b) Ξ (a', b') se a b' = b a', b ≠ 0 e b' ≠ 0, mostrando, assim, valer as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva, conforme a relação de equivalência.

Hölder usou a noção de equivalência para definir o conceito valor (outra crítica de Hölder ao trabalho de Grassmann era a não definição do termo magnitude). Hölder ainda argumenta que sua proposta define a adição e a multiplicação de maneira usual e que suas propriedades são provadas e não postuladas como no Grossenlehre.

Radu expõe outro ponto em que Hölder contrapõe-se à R.Grassmann,

> Isto sugere a seguinte interpretação: a descrição de Hölder da relação entre igualdade, congruência e valor: considere um conjunto S, para

---

[65] Let us examine expressions of the form *a/b*, *a* e *b* being positive or negative integers that differ from zero. Provisionally, such a symbol is not given a content, it is a mere form in which we can only distinguish the presence of two numerical values denoted by *a* and *b*, (…). We then stipulate that two symbols *a/b* and *a'/b'* should be viewed as equivalent *iff ab' – ba'* = 0. (Hölder,1892,592)

> introduzir a relação de igualdade em S, alguma relação R de equivalência definida em S é necessária.
> Se a pertence a S, então, sua classe de equivalência (a) ( mod R) representa o valor de a. Além disso, (a) = (b) se e somente se a ≡ b (mod R). Isso equivale a uma subordinação da igualdade à congruência, uma posição que vai contra à defendida por Hermann e Robert Grassmann[66].(RADU, 2003, p. 372).

R. Grassmann, também, apoiou-se na relação de igualdade entre magnitudes para construir sua teoria, menos formal do que a de Hölder se considerarmos o *Grossenlehre* antecedendo a Aritmética.

## IV.13 – Pontos divergentes e convergentes entre Robert e Hölder

Vimos que Otto Hölder foi insistente em seu ponto de vista, tentando mostrar que é inadmissível tratar as questões dos fundamentos da Matemática, centrados em elementos da lógica. Era assim que ele inicialmente entendia a proposta de Grassmann. De fato, o tratamento dado por Robert Grassmann à Aritmética, veio posteriormente, a ser constituído em um princípio axiomático, obra consolidada por Peano (1889) que muito se inspirou na obra de Hermann Grassmann (1861).

No entanto, duas questões foram levantadas e permearam toda a discussão entre Hölder e Robert; uma delas é a relação entre pensamento, Matemática pura e a lógica. Vimos que Hölder e Robert comungam a idéia de que a lógica formal não serve como base para a Matemática e a maneira como foi proposta por Robert, a abordagem da Aritmética estaria longe de ser constituída pela lógica do silogismo. Mesmo porque, em 1872, ele conferiu à Lógica a condição de um capítulo da Matemática, isto é, subordinado às leis da

[66] This suggests the following interpretation of Hölder's account of the relation between equality, congruence, and value: Consider a set S. In order to introduce a relation of equality on S, some equivalence relation *R* defined on S is needed. If a belongs to S, then its equivalence class [a] (mod R) represents the *value* of a. Furthermore, [ a ] = [ b ] iff a ≡ b ( mod R ). This amounts to a subordination of equality to congruence, a position which goes against the one defended by Hermann and Robert Graβmann.

Matemática Pura, apresentando, pela primeira vez, uma de suas primeiras formalizações. Segundo Radu esta formalização da Lógica proposta por Robert foi muito elogiada por Peirce[67].

Além do mais, a Matemática pura ou formal era vista como uma atividade humana, cujo desenvolvimento não pode ser resumido a nenhuma teoria declarada da lógica.

As fórmulas contidas no *Grossenlehre* eram vistas por Robert e, também, por Hermann Grassmann, como uma expressão direta do pensamento, sendo assim o *Grossenlehre* era considerado por eles como o caminho mais curto, entre o pensamento e as disciplinas ditas individuais, podendo ser representado como no seguinte esquema:

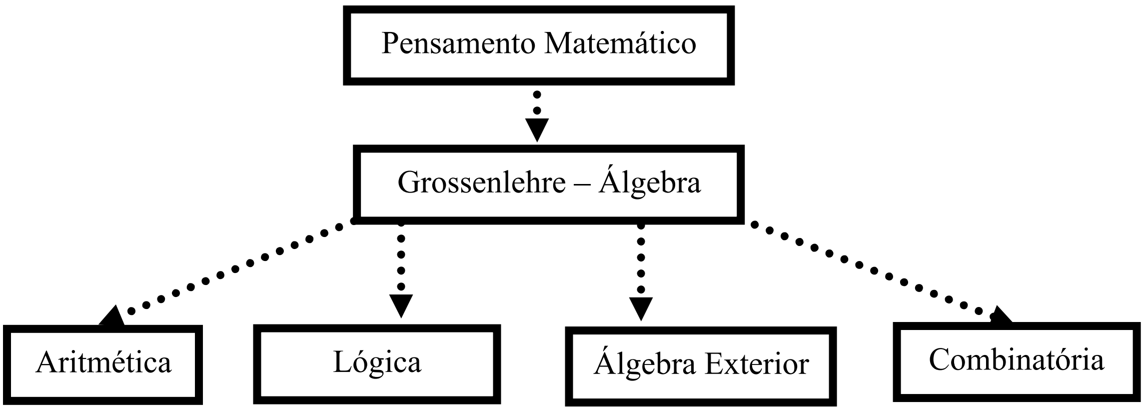



Figura VI

A outra questão é a relação entre pensamento, Álgebra e Aritmética. Neste ponto, eles divergem. R. Grassmann acredita ser a Álgebra a disciplina matemática mais geral e capaz de gerar todas as outras disciplinas, mas a concepção de Hölder é diferente, ele permaneceu defendendo a posição intuicionista. Acreditava que o fundamento da Matemática Pura poderia ser representado pela faculdade do pensamento na construção de infinitas seqüências, das quais as descrições matemáticas podem ser fundamentadas na Aritmética.

[67] (Ver Peirce,1931/1958, nota de rodapé 3.199).

Para Radu a concepção de Robert Grassmann em relação ao *Grossenlehre*, se expressa assim:

> A concepção de Grassmann pode ser resumida como a seguinte: *Grossenlehre* é a expressão matemática primária do pensamento exato. Ela não depende de nenhuma teoria lógica. É o fundamento da Matemática pura, e, conseqüentemente de cada uma das disciplinas matemáticas individuais (Aritmética, Combinatória, Lógica Formal, e o Cálculo da Extensão)[68] (RADU, 2003, p. 373).

O *Grossenlehre* foi desenvolvido como uma teoria algébrico-estrutural, atualmente, a Álgebra Abstrata. Apoiado em noções básicas, entre elas, podemos destacar a de igualdade e de operação. As fórmulas nele contidas não foram introduzidas como axiomas, mas, sim, por meio de definições conceituais expressas verbalmente. Todas as fórmulas caracterizam as noções e são apresentadas como conseqüências das definições. Hermann Grassmann, em 1861, não admitiu que seu trabalho pudesse ser visto como uma proposição axiomática, chamava todas as fórmulas de definições formais e permaneceu defendendo esta posição.

Hölder descreve duas maneiras de interpretar as fórmulas contidas no *Grossenlehre*, são elas: a interpretação analítica e a sintética. Na analítica, os processos são puramente descritivos e, na sintética, são vistos como uma regra ou fórmulas recursivas, conduzindo a dois tipos de abordagem, algébrica estrutural ou analítica e a sintética construtiva.

Na Aritmética, Robert iniciou com um conjunto de definições (mesmo modo de Peano), que pode ser visto como construindo o sistema dos números naturais e, seguia com as definições das operações ao longo da trilha construtiva. Na ampliação do sistema numérico, direcionou-se para uma estratégia postulacional,

---

[68] (...) the conceptions of R. Graβmann and Hölder differ. Graβmann's conception can be summarized as follows. Gröβenlehre is the primary mathematical expression of exact thinking. It does not depend on any logical theory. It is the foundation of pure mathematics, and therefore of each of the four individual mathematical disciplines ( arithmetic, combinatorics, formal logic, and the calculus of extension).

confiando nas identidades algébricas, que correspondem aos axiomas formais. Evidenciando, assim, as duas abordagens, a sintética e a analítica.

Hölder mostrou que o Grossenlehre atende às duas interpretações, tanto a sintética ou construtiva e a analítica ou algébrica estrutural. Para ele, o conflito surge pelo fato dessas interpretações permanecerem disjuntas. Expresso em:

> Hölder mostrou que a abordagem de R. Grassmann admite duas interpretações fundamentalmente diferentes: uma analítica, algébrico-estrutural, *top-down*[69] e sintética *bottom-up*[70]. Segundo a abordagem top-down, os números naturais formam um subsistema do sistema dos inteiros, como Wang (1957, 147) mostrou, forma " um domínio integral ordenado em que cada conjunto de inteiros positivos tenha um elemento mínimo". A abordagem top-down é baseada nos axiomas, tais como: $a + (b + c) = ( a + b ) + c$ e $a + b = b + a$.
> Em contraste, a abordagem *bottom-up* defendida por Hölder dá prioridade à construção dos inteiros particulares independente de qualquer estrutura formal, por exemplo, como uma seqüência de fatos, como indicado na seção 3.5.
> Embora Hölder contrastasse essas duas abordagens ao admitir a possibilidade de dar uma interpretação sintética à abordagem de R. Grassmann com relação à fórmula $a + ( b + 1 ) = ( a + b ) + 1$ , como um dispositivo, visando e definindo simultaneamente, de uma maneira recursiva os números naturais, adição e multiplicação, ele basicamente reconheceu a possibilidade em relação a abordagem de R. Grassmann como o resultado de um esforço para harmonizar a abordagem analítica *top-down* e a abordagem sintética *botton-up*[71].*(* RADU,2003, p.373-374)

Em 1844, Hermann Grassmann já se esforçava para superar o que chamou de natureza cega da abordagem sintética, puramente formal da

[69] O termo top-down significa de cima para baixo.
[70] O termo bottom-up significa de baixo para cima.
[71] Hölder pointed out that R. Graβmann's approach allows two fundamentally different interpretations: an analytic, structural-algebraic *top-down* and a synthetic *botton-up* interpretation. According to the top-down approach, natural numbers form a subsystem of the system of the integers which, as Wang (1957, 147) pointed out, form " an ordered integral domain in which each set of positive integers has a least element." The *top-down* approach is based on axioms such as $a + ( b + c) = ( a + b ) + c$ and $a + b = b + a$.
In contrast, the bottom-up approach advocated by Hölder gives priority to the construction of the individual integers independent of any formal framework, for instance, as a sequence of tokens as indicated in Section 3.5.
Although Hölder contrasted these two approaches by admitting the possibility of giving a synthetic interpretation to Graβmann's approach by regarding the formula $a + ( b + 1 ) = ( a + b ) + 1$ as a device aimed at simultaneously defining in a recursive manner both natural numbers and addition and multiplication, he basically recognized the possibility of regarding R. Graβmann's approach as the outcome of an effort to harmonize the analytic *top-down* approach and the synthetic, *bottom-up* approach.

Matemática e obter um equilíbrio entre síntese e análise na Matemática. (H.GRASSMANN,1844 apud RADU, 2003, p. 356).

Hölder, assim como Robert notam a distinção entre as fórmulas: $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $a + (b + 1) = (a + b) + 1$. A derradeira fornece um meio efetivo de construir uma Aritmética ontológica e a primeira, não.

Hölder formulou dois caminhos para tratar a dualidade. Um deles seria assumir a possibilidade de desenvolver uma técnica, mecanismo formal adequado para produzir uma prova consistente da Aritmética, e o outro, postular a Aritmética como base no pensamento matemático. Então, assumir que esta consistência é dada devido a sua natureza construtiva; adotar o primeiro caminho seria construir a Aritmética como uma teoria axiomática no sentido de Hilbert, e o segundo caminho seria construir uma teoria puramente dedutiva, como Hölder fez.

Em resumo, podemos dizer que existiu uma divergência muito aparente entre Robert e Hölder. Hölder defendia que a Aritmética era a base da Matemática e capaz de sustentar toda sua ramificação. Já Robert Grassmann entendia ser a Álgebra Abstrata a disciplina geradora de toda a Matemática.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

A possibilidade da axiomatização da Aritmética representou um momento importante na história da Matemática, tanto quanto a descoberta de outras Geometrias não-euclidianas e o desenvolvimento da Álgebra Abstrata e a adoção do método axiomático nas ciências formais.

A polêmica levantada por Hermann Grassmann, como nos mostra Mircea Radu (2003), quando apresenta os primeiros passos para a sistematização do conceito de número, gera um conflito entre seus contemporâneos, pois número era concebido por eles  como um presente do Bom Deus e sendo assim não precisava de uma demonstração ou uma apresentação rigorosa.

O seu fundamento, como defendeu Otto Hölder, estava na intuição e qualquer outra forma feria seus princípios. Otto Holder acreditava na natureza sintética da Matemática e por isso concentrava seus esforços em desvendar a verdadeira natureza do pensamento matemático e de uma lógica que fosse adequada ao pensamento.

A abordagem da Aritmética apresentada por Grassmann coloca o conceito de número em um patamar de objeto de estudo e como conseqüência contribui com sua  evolução, assim como também a de outros conceitos matemáticos que são embasados nas noções de número.

Até meados do século XIX, a Matemática era para a maioria dos matemáticos dividida em duas partes, uma tratava dos significados reais, no caso, a Geometria e, a outra era responsável pelos resultados de nossas próprias construções, como é o caso da Aritmética. Esta divisão fazia com que a Matemática fosse realizada de formas diferentes, nas ciências reais a base consistia na experiência e na observação e as ciências formais baseavam na capacidade humana de pensar.

Este estudo mostra o período em que essa diferença gradualmente desapareceu e quão valioso foi para o desenvolvimento da Matemática. Revela a mudança de postura dos matemáticos frente aos objetos dessa ciência. Matemáticos deixam de enxergar os objetos matemáticos como construções completamente humanas *a priori* e passam a considerá-los dentro de um sistema axiomático, em que os axiomas que o constituem são capazes de descrever e gerar todas as afirmações sobre os objetos a que se quer demonstrar.

Segundo Otte (2005) “O foco de interesse desloca dos <<problemas interface>> entre o conhecimento do mundo externo e move-se para a dinâmica do conhecimento e da cognição. Matemáticos começam a refletir mais profundamente sobre suas próprias construções e atividades”.

O estudo histórico-epistemológico proporciona a discussão sobre a problemática em que um conceito se insere quando está sendo constituído ou evoluindo. Dessa forma, um estudo assim mostra às controvérsias, as hesitações, as dúvidas. Esses elementos nos fazem compreender como ocorre o desenvolvimento da ciência e num processo de investigação torna-se importante para prosseguirmos no desenvolvimento de uma nova abordagem ou em uma conceituação que melhor se adapte à nossa realidade.

No processo de investigação desse período rico da Matemática, presenciamos algumas mudanças significativas como: a noção de axioma, a abordagem analítica dos objetos, a constituição de um objeto matemático.

Os axiomas deixam de ser verdades evidentes, imutáveis e necessárias para apreensão dos conceitos, passando a ser premissas do discurso matemático, assumidas por convenção, não sendo nem verdadeiras nem falsas.

A Matemática era até o século XIX realizada sob um aspecto sintético, isto é, partia da intuição e seguia construindo os conceitos, mostrando assim que o contexto do desenvolvimento histórico-primitivo dos conceitos era relevante. Hölder acredita ser esta a melhor forma de descrever os objetos matemáticos e mostra sua construção dos naturais, partindo de uma seqüência preestabelecida – 0, 1, 2, 3,.... – para derivar e provar as propriedades e relações pertinentes ao conceito de número natural.

A abordagem analítica pressupõe outro caminho; um exemplo é a proposta que Hermann Grassmann (1861) traz para a Matemática quando partindo de uma operação, x + 1, derivou todas as leis e propriedades aplicadas aos números naturais.

Esta mudança na forma da abordagem dos conceitos foi discutida por Boutroux (1920). Acreditava que essa forma (como proposta por Grassmann) não feria os fundamentos dos conceitos, como considerado por Hölder, desde que os recursos utilizados fossem vistos como uma linguagem. Assim sendo, ele cita que "a Álgebra e as proposições lógicas são apenas a linguagem na qual se traduz um conjunto de noções e de fatos objetivos". (BOUTROUX, 1920 apud PALARO, 2006, p. 34)

O fato de a Matemática ter tornado uma ciência analítica tendo por fundamento o pensamento conceitual como defendido por Grassmann, foi o que possibilitou dar ao número natural o *status* de objeto matemático, com isso o número torna-se sujeito a transformações.

Outro fato importante foi a convergência no final do século XIX, para os fundamentos da Matemática, devido a densidade com a qual os conceitos se desenvolviam. Isso ocorreu tanto na Geometria como na Álgebra e na Análise. Isso fez com que os matemáticos imergissem nas questões dos fundamentos, pois buscavam uma base consistente capaz de sustentar praticamente toda a

Matemática. Nessa busca, concluíram que a Matemática fundamenta-se no sistema mais simples dela, a saber, o sistema dos números naturais.

A constatação pelos matemáticos, no final do século XIX, que a base da Matemática repousa nos números naturais, faz nos lembrar do pensamento de Poincaré, quando diz: *é das hipóteses simples que mais devemos desconfiar; porque são aquelas que têm mais possibilidades de passarem desapercebidas*. De fato, o número sempre foi um conceito simples e utilizado pela humanidade sem questionamento.

Os objetos matemáticos são suscetíveis de mudanças e dessa forma o notável crescimento dos conceitos matemáticos fez com que os matemáticos buscassem uma construção rigorosa de descrição mostrando que eram consistentes e, conseqüentemente, dignos de confiança. Parece ser esta a grande preocupação no final do século XIX, garantir a confiabilidade dos conceitos que estavam surgindo.

Este estudo mostra que houve mudança de concepção em relação à noção de axioma, sem a qual a axiomatização da Aritmética não seria possível. Axioma deixa de ser uma verdade evidente, como visto na Antiguidade e passa a ser assumido por convenção, como fundamento ou premissas do discurso matemático, eles deixam de ser verdades imutáveis e não são nem falsos nem verdadeiros. Entretanto, um sistema axiomático deve atender aos seguintes aspectos: *consistência*, isto é, não podem contradizer uns aos outros por si mesmos ou por suas conseqüências; *completo*, o que significa dar conta de provar ser verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e por fim, ser independente e elegante, refere-se à irredutibilidade recíproca, isto é cada axioma deve ser independente dos demais, no sentido de que não é conseqüência deles, e elegância significa número mínimo possível de axiomas. Peano, discípulo de Grassmann apresentou um sistema assim.

Os estudos do período da axiomatização da Aritmética, em uma perspectiva histórico-epistemológica do conceito de número, revelam que para apreensão do objeto de estudo – nesse caso, número – as noções extensional e intensional da complementarista[72] é uma exigência intrínseca no processo de aprendizagem do conceito.

A noção extensional era o que guiava a sua aplicação, por isso, matemáticos usavam-no sem grandes problemas, pois o interesse que se tinha era de dar uma aplicabilidade ao conceito,  entretanto, a partir da constituição do objeto número , a noção intensional fez-se presente. Ela surge com os trabalhos de Grassmann, pois aborda o conceito – número – especificando as relações e propriedades verificadas na teoria do conceito.

Nesse sentido até Hölder entende que o conceito – número – não pode ser definido apenas segundo um aspecto ou outro, para ele era importante o aspecto extensional, mesmo assim, admitiu que a abordagem de Grassmann atendesse aos dois aspectos, pois assumiu poder interpretá-la sinteticamente e analiticamente.

Dessa forma, abordar número analiticamente faz corresponder a perspectiva intensional, enquanto na interpretação sintética corresponde a noção extensional.

Podemos mencionar que, a abordagem axiomática do conceito de número, contribuiu para a evolução de uma série de áreas científicas entre elas a Álgebra Linear e a Análise as quais dependem desse conceito. A Álgebra Linear requereu para seu desenvolvimento e apreensão, o rigor e o formalismo, iniciado com os trabalhos de Grassmann e consolidado com Hilbert.

A possibilidade de Grassmann ter visto já em 1844, a Ciência Matemática como uma ciência analítica é grande. Entende-se agora sua rejeição ao uso da noção de axiomas, no sentido de Euclides, em ciências formais. Para ele o desenvolvimento da Álgebra Abstrata foi o caminho que conduziu à axiomatização da Aritmética, pois as expressões contidas nela tinham o fundamento no pensamento conceitual.

[72] Complementaridade ver (OTTE, 2003, p.203-228)

# Referência bibliográfica


ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia.** Tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revista por Alfredo Bosi. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ÁVILA, Geraldo . **Euclides, Geometria e Fundamentos**. Revista do professor de Matemática, nº 45, SBM, 2001, p. 1-8.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide.2ªed. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Edição revista por Paulo Almeida. 5ª ed. Portugal, Editora Gradiva, 2003. ISBN 972-662-616- 1.

DEDEKIND, Richard. **Essays on the Theory of Numbers**. I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers. Tradução: Wooster Woodruff Beman. New York: Dover Publicatiopns Inc., 1963.

DORIER, Jean-Luc.**On the Teaching of Linear Algebra**. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers, v.23, p. 18-33, 2000.

DURÁN, A. J. **Historia, con Personajes, de los Conceptos del Cálculo.** Numerabilidad. p. 269 – 281, 1996.

ENCICLOPÉDIA ELETRÔNICA, disponível em:
http://pt.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr , acesso em 20/09/2006 às 16h15m.

ENCICLOPÉDIA ELETRÔNICA, disponível em:
http://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_de_Russell , acessado em 17/07/2006 ás 13h45m.

ENCICLOPÉDIA ELETRÔNICA, disponível em:
http://en.wikipedia.Org/wiki/Richard_Dedekind , acessado em 06/10/2006 às 18h24m.

ENCICLOPÉDIA ELETRÔNICA, disponível em:
http://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano , acessado em 12/07/2006 às 15h22m.

ENCICLOPÉDIA ELETRÔNICA, disponível em:
www.cimm.ucr.ac.cr/.../Cap20/Parte05_20.htm, acessado em: 06/10/2006 às 18h51m.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FREGE. J.G.**Os Pensadores XXXVI**: Os fundamentos da Aritmética. Trad. Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril cultural, p.193-282, 1974.

GRASSMANN, Hermann. **Teoria de la extension: Nueva disciplina Matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones**. Tradução Emilio Oscar Roxin. Buenos Aires, ESPASA-CALPE ARGENTINA,1947.

HALMOS, Paul R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. Tradução do Prof. Irineu Bicudo. São Paulo: Universidade de São Paulo: Polígono, 1970.

OTTE, M **Complementarity, sets and numbers** . Educational Studies in Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 2003.

______________. **O que é número?** In: Seminário de estudos no grupo de pesquisa. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP. 2005.

PALARO, L. A. **A Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. Tradução: Álvaro Cabral. São Paulo: Ed. Martins Fontes, 2002.

RADU, M. **A debate about the axiomatization of arithmetic**: Otto Hölder against Robert Graβmann. Germany: Elsiever , p. 340-377, 2003.

ROBBINS, Herbert; COURANT, Richard. **O que é Matemática?** Tradução Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

SFARD, Anna**. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions**: Reflections on Processes and as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies Mathematics, vol. 22, nº 1, Kluwer Academic Publishers, p. 1-35, 1991.

# Bibliografia consultada


ÁVILA, G. **Introdução à análise Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

BOOTH, W.C. et al. **A arte da pesquisa**. Tradução: Henriqueta A. Rego Monteiro, São Paulo: Martins Fontes, 2000.

CHAITIN, G. J. **Conversas com um matemático**: Matemática, Arte, Ciência e os Limites da razão. Tradução: Leonor Moreira. Lisboa: Gradiva, 2003. ISBN 972-662-938-1.

COMPTE-SPONVILLE, André. **Dicionário filosófico.** São Paulo. MARTINS FONTES, 2003.

COXFORD, A. F. & SHULTE, P. A. **As idéias da álgebra**. Tradução de Hugyno H. Dominges. São Paulo: Atual, 1995.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa.** 2 ed. Rio de janeiro: Nova fronteira, 1986.

GARDIES, Jean-Louis. **Du mode d'existence des objets de la mathématique**. Paris: VRIN, 2004. ISBN 2-7116-1694-0.

GIUSTI, E. M. **A filosofia da Matemática no *preisschrift de kant*: um estudo sobre as interpretações de Parsons e Hintikka**. São Paulo: EDUC; FAPESP, 2004.

IGLIORI, S B. C.; SILVA, B. A. **Concepções dos Alunos sobre os Números Reais**, *in* João Bosco Laudares (Org.), Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

JACQUES, Montangero. **Piaget ou a inteligência em evolução**. Tradução de Tânia beatriz I. Marques. Porto Alegre: ARTMED,1998.

LATOUR, Bruno. **Ciência em Ação**: Como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora. Tradução de Ivone C. Benedetti; revisão de tradução Jesus de Paula Assis. São Paulo: UNESP, 2000.

LAVILLE, Christian. **A Construção do Saber:** manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**.** Tradução Heloisa Monteiro e Francisco Sttineri: Porto Alegre: ARTMED. Belo Horizonte: UFMG, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

MANSFIELD, H .et al. **Mathematics For Tomorrow's Young Children.** Internacional Perspectives on currículo. Kluwer Academic publishers, v.16, p. 11-30, 1996.

NUNES, Terezinha. **Crianças Fazendo Matemática.** Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: ARTMED,1997.

OTTE, M. **B. Russell's "introduction to mathematical philosophy**". In: Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: EDUC, v. 3, n.1, p.11-55, 2001.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática**. Tradução: Giasone Rebuá. 3 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

# ANEXO I

## TRADUÇÃO DO PRÓLOGO E INTRODUÇÃO DA OBRA DE HERMANN GRASSMANN

**A Teoria da Extensão**[73]

**Nova disciplina Matemática exposta e esclarecida mediante aplicações**

**Hermann Grassmann**

### *Prólogo*

Designa-se esta obra, cuja primeira parte trago a conhecimento do público, como exposição de uma nova disciplina Matemática e ela somente pode estar justificada por si mesma. Desistindo, portanto, de toda outra justificativa, passo diretamente a expor o caminho a que cheguei, passo-a-passo, aos resultados

[73] Título em espanhol : Teoría de la extensión Lineal. Nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones. Tradução de Emilio Oscar Roxin

aqui expostos, mostrando ao mesmo tempo, uma forma resumida da extensão dessa nova disciplina. Encontrei a primeira iniciativa ao considerar o negativo na Geometria; acostumei-me a considerar os segmentos AB e BA como dimensões opostas, do que resulta que se A,B,C são pontos de uma mesma reta, verifica-se sempre que AB + BC = AC, tanto se AB e BC têm sentidos iguais, como também no caso de terem sentidos opostos, isto é, C está entre A e B. No último caso, não se pode considerar AB e BC como simples comprimentos, mas é necessário considerá-los dotados de sentido, favorecendo a que são precisamente opostos. Prevalece, conseqüentemente, a distinção entre a soma dos comprimentos e a soma de tais segmentos em que se considera sua direção. Sendo assim, é necessário determinar o conceito de soma não somente para o caso dos segmentos que tenham sentido igual ou oposto, mas, também para qualquer outro caso. Isto pode ser feito da maneira mais simples mantendo a lei de que AB + BC = AC, ainda no caso em que A,B,C não estejam alinhados. Este foi o primeiro passo para uma análise que me levou posteriormente para o novo ramo da Matemática aqui exposta. Não presumia então a que terreno fecundo e rico havia chegado; antes, o resultado parecia-me de pouca importância, até o momento em que eu o relacionei com uma idéia semelhante. Examinando o conceito de produto na Geometria, tal como havia sido concebido por meu pai[74], cujo resultado revela que se deve considerar não só o retângulo, mas também o paralelogramo, em geral, como produto de seus 2 lados consecutivos, se não se considera o produto dos comprimentos, mas o de ambos os segmentos considerando suas direções. Relacionando, agora, este conceito de produto com o anterior da soma, resultou na mais completa harmonia, porque, se em vez de multiplicar no sentido recém-estabelecido, a soma de 2 segmentos por um terceiro no mesmo plano, também tomada em um novo sentido, multiplicava separadamente somando-os pelo mesmo segmento, adicionando os produtos, considerando seus sinais, obteria, em ambos os casos, o mesmo resultado, e era forçoso que isso acontecesse. Essa harmonia me fez suspeitar de que aqui se abriria um campo de análise completamente novo, que poderia levar a resultados importantes. Não obstante, por minha profissão me levar a atividades distintas, fiquei com essa idéia oculta durante certo tempo. A princípio, também me

[74] Ver: J.G.GRASSMANN, RAUMLEHRE,segunda parte, página 194 e sua trigonometria, p.10.

surpreendeu o resultado curioso de que para essa nova multiplicação existem as demais leis do produto ordinário, em especial sua relação com a soma, mas que somente se podem somente trocar os fatores trocando, ao mesmo tempo, o sinal ( permutando + por – e vice-versa). Um trabalho sobre a teoria da maré que empreendi mais tarde me levou à *Mecânica Analítica*, de La Grange, e, com isso, àquelas idéias da análise. Todo o desenvolvimento daquela obra se transformava de tal maneira, mediante os princípios dessa nova análise, que eram muito mais simples, e o cálculo era, às vezes, mais de dez vezes mais breve do que era naquela obra. Isto me animou para aplicar a nova análise à difícil teoria da maré. Para isso, foi necessário desenvolver novos conceitos múltiplos e introduzi-los na análise; em particular, me levou ao conceito de rotação ao considerar a magnitude exponencial geométrica, a análise dos ângulos e das funções trigonométricas, etc.[75] Tive a alegria de ver como, por meio da analise assim desenvolvido, não só se transformavam as fórmulas assimétricas e muito complicadas em que se baseia está teoria[76], nas fórmulas simétricas é muito simples, mas que também os desenvolvimentos resultavam sempre paralelos ao conceito. Com efeito, não somente podia expressar cada fórmula que se encontrava no desenvolvimento, em forma muito simples mediante palavras, expressando assim, cada vez, alguma lei, mas que cada passo de uma fórmula à seguinte parecia somente como uma expressão simbólica de um desenvolvimento conceitual paralelo. No método comum, a idéia torna-se completamente obscura pela introdução de coordenadas arbitrárias, que nada têm a ver com o problema, enquanto que o cálculo é um desenvolvimento formal mecânico, que nada oferece ao espírito, e, em conseqüência, o aniquila. Ao contrário, aqui, onde a idéia por nada obscurecida, aparece através de todas as fórmulas em toda sua clareza, também o espírito do desenvolvimento conceitual aparecia no desenvolvimento de cada fórmula. Em vista desse êxito, pensei que podia abrigar a esperança de ter encontrado nessa nova análise o único método, segundo o qual deve desenvolver-se toda aplicação da Matemática à natureza, método segundo o qual também se deve tratar a Geometria a fim de chegar a

[75] Ver também mais adiante.
[76] Ver La Place, Mec. C´leste, livro 4º.

resultados gerais e frutíferos[77]. Então madureceu minha decisão de fazer a descrição, ampliação e aplicação dessa análise uma obra de minha vida. Dedicando, desde então, todo meu tempo livre a essa tarefa, preenchi pouco a pouco as lacunas que meus trabalhos anteriores continham. Deste modo, também cheguei à conclusão, como exposto nessa obra, que se pode adotar como soma de vários pontos o baricentro deles, como produto de 2 pontos o segmento que os une, e produto de 3 pontos a superfície (triangular) limitada por eles e o de 4 pontos o espaço delimitado por eles (a pirâmide). O conceito de baricentro como soma induziu-me a comparar o Cálculo baricentrico de Möbius, obra que até então só conhecia pelo título; com grande alegria encontrei aqui o mesmo conceito de soma de pontos ao que me haviam levado os desenvolvimentos. Havia chegado, assim, ao primeiro e, como se viu mais tarde, também ao último ponto de contato que apresenta a nova análise com coisas já anteriormente conhecidas. Como o conceito de produto de pontos não aparece naquela obra, e como inicia há pouco com este conceito, combinado com o de soma, o desenvolvimento da nova análise não podia esperar encontrar ali alguma ajuda para meu propósito. Começando, pois, a repassar os resultados obtidos até então, em forma conexa e começando do princípio, sem basear-me em nenhum teorema demonstrado em algum outro ramo da Matemática, resultou que a análise que havia feito não correspondia unicamente, como me parecia a princípio, ao campo da Geometria, mas que havia chegado a uma nova ciência, de que a Geometria somente era uma aplicação particular. Já há muito tempo, me havia convencido de que a Geometria não deveria ser considerada como um ramo da Matemática, no sentido da Aritmética, ou da combinatória, posto que a Geometria se refere a algo que nos é dado pela natureza (a saber: o espaço), devendo existir um ramo da Matemática que desenvolve, de forma puramente abstrata, leis análogas às que aparecem ligadas ao espaço na Geometria. Mediante a nova análise se torna possível construir um ramo semelhante puramente abstrato da Matemática; ainda mais, essa mesma análise, desenvolvida de forma puramente abstrata e sem pressupor nenhum teorema demonstrado em outras partes, é precisamente esse mesmo ramo. A vantagem

[77] Com efeito, se viu rapidamente como, mediante essa análise, desaparece completamente a diferença entre os métodos analíticos e sintéticos de tratar a Geometria.

obtida com isso era que desapareceriam formalmente, todos aqueles postulados que expressam propriedades intuitivas do espaço, resultando o princípio da ciência tão imediato como o da Aritmética; e quanto ao seu conteúdo, em compensação, desapareceria a restrição a 3 dimensões. Rapidamente, assim, apareciam as leis em toda sua extensão e generalidade, aparecendo também suas relações essenciais, e muitas conexões que, em 3 dimensões, permanecem ocultas ou visíveis só parcialmente, aparecem aqui claramente em toda a sua generalidade. Posteriormente, também vi que, com as correspondentes definições que se encontram na obra, pode considerar-se: o ponto a intersecção de 2 retas, a reta intersecção de 2 planos e o ponto intersecção de 3 planos como produto daquelas retas ou planos[78], de onde resultava uma teoria muito simples e muito geral das curvas[79]. Passei, então, a fundamentar e generalizar aquilo que deixei para a segunda parte desta obra, a saber, tudo o que pressupõe o conceito de rotação ou de ângulo. Como essa segunda parte com que terminará a obra deverá ser impressa brevemente, parece-me conveniente para a apreciação do conjunto, expor aqui, de forma mais precisa, alguns resultados para apreciação no futuro. Para isto, devo indicar, primeiramente, os resultados que já haviam aparecido antes da revisão completa. Disse que como produto de 2 segmentos pode considerar-se o paralelogramo, se, como sucederá sempre, considerarmos a direção dos segmentos; mas esse produto se caracteriza pelo fato de que os fatores somente podem ser permutados com a mudança do sinal, sendo, evidentemente, igual a zero o produto de 2 segmentos paralelos. Semelhante a esse conceito existe outro que também se refere aos segmentos dirigidos. Se projetar um segmento perpendicularmente a outro, o produto aritmético destas projeções pelo segmento sobre o que se havia projetado também é um produto daqueles 2 segmentos, porquanto é válida para ele a relação multiplicativa com a soma. Mas este produto é completamente diferente do primeiro: seus fatores podem permutar-se sem mudança de sinal e o produto de 2 segmentos perpendiculares é zero. Chamei de produto exterior ao primeiro e produto interior a este último, porque aquele só é diferente de zero quando as direções dos segmentos divergem, ao contrário, este último só quando

[78] Ver capítulo terceiro do segundo fragmento.
[79] Ver esse mesmo capítulo.

ambas as direções se aproximam. Este conceito de produto interno, que já havia aparecido como essencial ao estudar a Mecânica analítica me levou ao conceito de comprimento absoluto[80]. Da mesma maneira, a magnitude exponencial geométrica havia resultado no estudo da teoria de fluxo e refluxo. Se ao representar um segmento (fixado em direção e dimensão) e β um ângulo ( fixado também seu plano de rotação), resulta por razões cuja explicação levar-me-ia a demasiados eixos, que a. $e^{\beta}$ , que pode ser considerado como a base natural dos logaritmos, representa o segmento que é obtido fazendo girar a de um ângulo β; isto é, a. $e^{\beta}$ representa o segmento de giro de um ângulo β. Se Cos β , em que β expressa um ângulo no sentido geométrico, representa o mesmo número que cos β' em que β' é um arco correspondente ao ângulo y medido pelo raio: resulta aquele conceito de magnitude exponencial, que

[81] $$\text{Cos}\ \beta = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}$$

Analogamente, se Sen β representa a dimensão que multiplicada por um segmento o faz girar de 90º no sentido do ângulo β , modificando, ao mesmo tempo, seu comprimento absoluto da mesma maneira que sen', resulta

$$\text{Sen}\ \beta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}$$

obtendo-se assim a equação

$$\text{Cos}\ \beta + \text{Sen}\ \beta = e^{\beta}$$

Todas as equações mostram a mais surpreendente analogia com as expressões imaginárias conhecidas.

[80] Também esse conceito, por pressupor o de rotação, corresponde à segunda parte.

[81] Com efeito, se AB ( figura l ) é o segmento primitivo, que girado do ângulo β passa à posição AC, girado do ângulo – β, ao contrário, a posição AD, e se completamos o paralelogramo ACDE, resulta AE a soma dos segmentos AC + AD, e a metade AF desta soma é o cosseno do ângulo β.

Até aqui se trata de conceitos anteriores. Tratando agora de generalizar esses resultados, ampliei primeiro o conceito de produto interior, analogamente como havia ampliado o conceito de produto exterior, relacionando-o com as intersecções das retas e planos. Primeiramente, cheguei então ao conceito de quociente de segmentos de direções distintas, entendendo por a/b, em que a e b representam segmentos de direção distinta, mas de comprimento igual, aquela dimensão que faz gira qualquer segmento do mesmo plano do ângulo ba ( (tomado desde b a a), resultando assim como deve ser (a/ b) . b = a . Disto se deduz, imediatamente, o conceito de que a e b são comprimentos distintos. Aquele simples conceito foi a origem de uma série de relações muito interessantes. Primeiramente, resultou numa nova espécie de multiplicação correspondente a esta divisão que se diferenciava de todas as anteriores pelo fato de que esse novo produto só podia ser zero se fosse zero um dos fatores, enquanto, por outro lado, os fatores eram permutáveis . Em resumo, uma multiplicação, em todas as suas leis, análoga à Aritmética comum. O conceito dessa multiplicação obtém-se, facilmente, multiplicando progressivamente um segmento por vários quocientes semelhantes, encontrando logo um quociente único que pode representar todos esses fatores progressivos. De acordo com a definição, é

$$e^{ab} = b/a$$

sendo ab o ângulo de ambos os segmentos, que são de comprimentos iguais, será também

$$\log b/a = ab.$$

Além disso, se o ângulo ab é a m-ésima parte de ac, resulta

$$(a/b)^m = c/a$$

Porque, aplicando sucessivamente m vezes um giro b/a a um segmento, este permanece em giro total do ângulo c/a. Portanto, se o ângulo ab é a metade de ac, será

$$(b/a)^2 = c/a, \text{ isto é } ,b/a = \sqrt{c}/a.$$

Se, em particular, b/a é o giro de um ângulo reto, correspondendo a c/a, portanto a 2 retos, e como c = - a , isto é, c/a = -1, será b/a = $\sqrt{-1}$, isto é, multiplicando um segmento pela expressão $\sqrt{-1}$, a princípio, permanece um giro de 90º em um sentido qualquer, mas, uma vez fixado este, sempre no mesmo sentido. Este lindo significado de dimensão imaginária é completado pelo resultado de que

$$e^{\beta} \quad \text{e} \quad e^{(\beta)\sqrt{-1}}$$

representam o mesmo valor, se β é o ângulo, (β), em compensação, representa o arco correspondente dividido pelo raio. Com efeito, se obtém com ele

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

como correspondente , e também

$$\sqrt{-1}\,\text{sen}\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

Fórmulas que, por conseqüência, têm um significado puramente geométrico, pois $e^{x\sqrt{-1}}$ é o giro de um ângulo cujo arco, medido com o raio, vale x. Assim, todas as expressões imaginárias têm um significado puramente geométrico, sendo, portanto, representáveis por construções geométricas. Permanecia também o ângulo determinado como logaritmo do quociente b/a, daí seus infinitos valores para uma mesma posição dos segmentos. Inversamente, também resulta que, mediante este significado das expressões imaginárias, podem deduzir-se as leis da análise do plano, sendo, em compensação, impossível deduzir, mediante as expressões imaginárias, as leis do espaço. Em geral, os estudos dos ângulos no espaço apresentam tantas dificuldades que, para solucioná-las totalmente, não encontrei, ainda, tempo suficiente.

Estes são mais ou menos os temas que reservei para a segunda e última parte, pelo menos do que eu preparei até agora; com ela, esta obra terminará. Não posso determinar, ainda, o tempo em que aparecerá essa segunda parte, já que os múltiplos trabalhos a que meu cargo atual me obriga não me dão a tranqüilidade necessária para a revisão e estudo da mesma. Não obstante, esta primeira parte já constitui um todo completo e independente, e acredito ser mais conveniente explicitar esta primeira parte com suas aplicações correspondentes, que ambas as partes juntas, mas separadas das aplicações.

Na exposição de uma nova ciência é absolutamente imprescindível, para que se reconheça sua posição e seu significado, mostrar suas aplicações e sua relação com temas análogos. Para isto, também deve servir a introdução. Esta é de natureza bem mais filosófica e, ao colocá-la separada do conjunto de toda a obra, minha intenção foi não aterrorizar os matemáticos com uma forma filosófica. Porque existe, ainda, entre os matemáticos, e em parte não sem razão, certa aversão às especulações filosóficas sobre os objetos matemáticos ou físicos; com efeito, a maioria de tais estudos, sobretudo os realizados por Hegel e sua escola, são de uma arbitrariedade e falta de clareza que anulam todos os frutos dos mesmos. Apesar disso, creio ser necessário assinalar a posição da nova ciência dentro do campo do conhecimento e, para satisfazer a ambas as exigências, eu fiz esta obra preceder por uma introdução que pode ser passada por alto, sem que isso prejudique muito a compreensão do todo. Também quero ressaltar que, entre as aplicações, podem pular aquelas que se referem a objetos da natureza (física, cristalografia) sem prejudicar com isso a continuidade do desenvolvimento. Mediante as aplicações da física, creio ter mostrado a importância, ou melhor, a necessidade da nova ciência e sua análise. Algumas vezes, penso demonstrar que, em sua forma concreta, isto é, aplicada à Geometria, esta ciência é um excelente tema de instrução, possível de ser tratado de forma completamente elementar; nesta obra, em conseqüência de sua finalidade, não cabe tal demonstração. Principalmente, é absolutamente necessário adotar o conceito de soma e de produto de segmentos, desenvolvendo suas leis principais, em um estudo elementar da estática, se desejam obter-se resultados intuitivos e gerais (e representáveis mediante construções gráficas). Estou convencido de que quem, ao tratar alguma vez de conceber estes conceitos, não os deixará jamais.

Quando eu atribuir, conseqüentemente, toda a importância a esta nova ciência, parcialmente tratada nesta obra, sem diminuir, de forma alguma, sua posição no campo do conhecimento, não acredito que é possível eu ser qualificado como uma pessoa vaidosa; porque a verdade exige seus direitos; ela não é a obra daquele que a descobre ou indica sua importância; ela existe em si mesma; e restringir-lhe os direitos, em virtude de uma falsa modéstia, é uma traição à verdade. Ao contrário, devo pedir indulgência para tudo aquilo que é obra minha, pois estou consciente de que, apesar de todo o empenho que coloquei na forma de apresentá-la, ela é muito imperfeita. Desenvolvi a obra várias vezes, de diferentes maneiras, seja na forma euclidiana com definições e teoremas rigorosos, seja na forma de um desenvolvimento que dá a máxima importância à clareza e à facilidade de compreensão, seja misturando ambos os caminhos, dando primeiro a descrição de fácil compreensão e, em seguida, o desenvolvimento na forma euclidiana. Estou certo de que, se fizesse uma nova revisão, apareceriam algumas coisas de melhor forma, isto é, em parte com mais rigor, em parte mais fácil de compreender. No entanto, estando convencido de que com o todo não chegaria à completa satisfação, e que, em comparação com a simplicidade da verdade, a exposição sempre será pobre, decidi publicar a forma que, atualmente, acredito ser a melhor. Também é motivo de esperar indulgência, o fato de que o tempo de que disponho é breve e esporádico, em virtude do cargo que ocupo, e o tal cargo tampouco me dá a oportunidade de receber notícias do campo dessa ciência ou, ainda, de assuntos relacionados com ela, o que representa a frescura que, como um sopro vital, deve animar ao todo para que este apareça como um membro vivente do organismo que é o conhecimento. Ainda que uma atividade nas comunicações dessa ciência seja o trabalho mais apropriado para mim, creio que não devia esperar isso com a publicação desta obra, apesar de ser esse o meu maior desejo e tenho a esperança de poder alcançar esta meta mediante a publicação dessa primeira parte.

*Stettin, 28 de junho de 1844.*

## *Introdução*

### A. Dedução do conceito de Matemática pura

1. A primeira divisão de todas as ciências as classifica em reais e formais: as primeiras são aquelas que reproduzem no pensamento o ser que é independente ao pensamento, e sua verdade reside na coincidência do pensamento com o ser. As segundas, em compensação, têm por objeto o que é formado pelo pensamento, e sua verdade reside na concordância dos processos mentais entre si.

> Pensar só se pode em relação a algum ser, que se enfrenta e é reproduzido pelo pensamento, mas este ser é, nas ciências reais, algo independente, existente por si fora do pensamento; e nas ciências formais, ao contrário, algo formado pelo pensamento, que faz o papel do ser para um segundo ato de pensar. Se a verdade consiste, de maneira geral, na coincidência do ser com o pensar, então consiste em especial nas ciências formais, na coincidência do segundo ato de pensar com o formado pelo primeiro, isto é, na coincidência de ambos os atos do pensamento. Conseqüentemente, nas ciências formais, a demonstração não excede os limites do pensamento nem entra em outros campos, consiste, pois, puramente na combinação dos distintos atos do pensamento. Essa é a razão pela qual as ciências formais não devem basear-se em postulados, como as reais; sua única base são as definições[82].

2. As ciências formais estudam ora as leis gerais do pensar, ora do particular gerado pelo pensamento. O primeiro corresponde à Dialética (Lógica) e o último à Matemática.

> O contraste entre o geral e o particular cria a divisão das ciências formais na Dialética e na Matemática. A primeira é

[82] Se, apesar disto, se têm introduzido postulados nas ciências formais, por exemplo, na Aritmética, deve ser um abuso que só se pode explicar pelo tratamento análogo da Geometria. Sobre isto, veremos mais adiante com maior atenção. É suficiente aqui demonstrar a necessidade da ausência de postulados nas ciências formais.

uma ciência filosófica, pois busca a unidade de todos os pensamentos. A Matemática, em compensação, tem sentido oposto, considerando o pensado isoladamente como algo particular.

3. A Matemática pura é, portanto, as ciências do *ser particular* gerado pelo pensamento. Ao ser particular, concebido nesse sentido, o chamaremos forma do pensamento, ou simplesmente *forma.* A Matemática é, por conseqüência, a teoria das formas.

O nome da teoria das magnitudes não serve para todos os ramos da Matemática, devido não ser aplicável a uma delas, a combinatória, sendo aplicável à Aritmética somente num sentido impróprio[83]. Em compensação, parece ser a expressão forma, demasiadamente ampla, sendo melhor o nome forma do pensamento; no entanto a forma, em seu significado puro, abstraída de todo o conteúdo real, não é outra coisa que a forma do pensamento, sendo, portanto conveniente esse nome. Antes de passar para a divisão da teoria das formas, devemos excluir um ramo até agora incluído erroneamente nela, a saber, a Geometria. O conceito acima estabelecido evidencia que a Geometria, ou mesmo a mecânica, se baseiam em um ser real, que para a Geometria é o espaço. O conceito de espaço evidentemente não pode ser gerado pelo pensamento, opondo-se em compensação como algo já dado. Quem quiser afirmar o contrário, deverá demonstrar a necessidade das três dimensões no espaço a partir das leis do pensamento, problema cuja solução ver-se imediatamente que é impossível. Se apesar disto quisermos estender o nome de Matemática também para a Geometria, poderíamos fazê-lo, mantendo por outro lado o nome de teoria das formas ou algo análogo, mas neste caso poderia

[83] O conceito de magnitude é representado na Aritmética pelo número; o termo diferencia, pois, entre aumentar e diminuir que se referem ao número, e para ampliar e reduzir que se referem aos valores.

predizer desde já que, havendo incluído abaixo disso nome de coisas tão heterogêneas , esse nome resultaria supérfluo e seria rejeitado com o tempo. A posição da Geometria a respeito da teoria das formas depende da relação em que a intuição do espaço se faz com respeito ao pensamento puro. Se bem temos dito que essa intuição do espaço se antepõe ao pensamento como algo independente, isso não equivale a afirmar que ela nos é dada recém pela observação das coisas espaciais; ela é uma intuição básica que nos tem sido dada, igual como à sensibilidade de nossos sentidos para com o mundo sensível, e que, portanto está tão unida a nós como o corpo a alma. O mesmo pode dizer a respeito do tempo e do movimento, baseado nas intuições do espaço e tempo, razão pela qual a teoria pura do movimento ( forometria ou cinemática) se tem considerado, com a mesma razão que a Geometria, pertencente as ciências Matemáticas. Da intuição do movimento nos vem, mediante o contraste de causa e efeito, o conceito de força motora, aparecendo assim a Geometria, cinemática e mecânica como aplicação da teoria das formas às intuições fundamentais do mundo sensível.

**B. Dedução do conceito da teoria da extensão**

4. Tudo aquilo que é produto do pensamento (ver nº 3) pode ter sido gerado de duas formas: ou bem por um simples ato de criar, ou por um duplo ato de justapor e combinar. “O gerado pelo primeiro método é a “forma contínua” ou “ magnitude” no sentido restrito; o gerado pelo segundo método, a forma discreta ou de concatenação.

O conceito simples de geração nos dá a forma contínua. No caso da forma discreta, aquilo que foi gerado antes da concatenação, também o foi pelo pensamento, mas aparece com referência ao ato da concatenação como algo dado, e a maneira como se forma, a partir do existente, a forma discreta, é simplesmente um ato de pensar junto os elementos. O conceito de geração contínua se vê, mais claramente, se a princípio a supõe análoga à geração discreta que é mais simples. Porque, na geração contínua, se retém o gerado e, enquanto se vai gerando, é pensado junto com o que gera no mesmo instante de sua criação: dessa maneira, se pode distinguir conceptualmente para a forma contínua, analogamente à discreta, um duplo ato de criação e concatenação, mas ambos reunidos aqui em um só ato, e, portanto, em uma unidade inseparável, porque os dois membros que se concatenam (adaptando-se momentaneamente este vocábulo por analogia com a forma discreta), um já foi criado antes, mas o outro é criado ao mesmo tempo em que é concatenado, isto é, não existia antes do ato da concatenação. Portanto, ambos os atos, de criar e de concatenar, confundem-se completamente, não se podendo concatenar antes de criar, nem criar antes de concatenar, ou melhor dizendo: o que se vai gerando se cria já aderido ao preexistente, e o instante da geração aparece como um crescimento.

O contraste entre contínuo e discreto é (como todo verdadeiro contraste) questão de interpretação, podendo-se considerar o discreto como contínuo e o contínuo como discreto. O discreto se pode considerar contínuo se o concebe concatenado como algo novo e a ação de concatenar como o momento da criação. O contínuo se considera discreto se se concebem os distintos momentos da criação como simples atos de concatenação, e o resultado dessa concatenação se considera como elemento preexistente para o seguinte ato de concatenação.

5. O particular (Nº3) resulta tal mediante os conceitos de *distinção*, por meio dos quais se contrapõe a outras idéias particulares e de *igualdade*, mediante ao qual se subordina junto com outras idéias particulares à idéia mais geral. Chamaremos forma algébrica ao que resulta da justaposição do igual, e forma combinatória ao que resulta do distinto.

> O contraste entre o igual e o diferente também é relativo. O igual é distinto já pelo fato de que existe algo que distingue um do outro (já que sem esta distinção seria um só e não dois iguais); o distinto é igual devido à atividade que relaciona ambas as idéias, aparecendo estas como uma só reunião. Isso não quer dizer que ambas as idéias se confundam de tal maneira que se possa medir o quanto contêm de igual e de distinto, apenas que se o igual pressupõe, de certa maneira, o distinto e vice versa, é somente uma de ambas as relações o objeto de nossa atenção em um dado instante, enquanto a outra só aprece como uma condição implícita indispensável.
>
> Assim, entendemos a forma algébrica como não só o número, mas também o que corresponde ao campo do contínuo e a respeito da forma combinatória não só a combinação, mas também o correspondente no contínuo.

6. Entrecruzando-se ambos os contrastes, dos quais o primeiro se refere à forma de geração e o último aos elementos ou objetos da geração em si, resultam quatro espécies de formas e seus correspondentes ramos da teoria das formas. Segundo isso, divide-se a forma discreta em numero e combinação (ligação). O número é a forma algébrica discreta, isto é, é a reunião do que é considerado como igual. A combinação é a forma discreta combinatória, isto é, a reunião do que é considerado como distinto. As ciências do discreto são, portanto, a teoria dos números (Aritmética) e a teoria das combinações (combinatória).

É evidente que a definição de número e de combinação permanece assim estabelecida de modo completo e preciso e o mesmo acontece com a combinação. E como os contrastes de que resultam as definições anteriores são os mais simples inerentes ao conceito de forma Matemática, se pode admitir que a definição feita esteja justificada. [84] Desejo observar, ainda, como este contraste entre ambas as formas se expressa de uma maneira muito pura pela diferente denominação de seus elementos, expressando-se o reunido que forma o número, por um só sinal (1), em compensação, o reunido para formar a combinação, por sinais diferentes e arbitrários (as letras da álgebra). Não é necessário mencionar como se pode considerar, segundo o ponto de vista adotado, todo o conjunto de objetos (diversidades) seja como número ou como combinação.

7. Da mesma maneira se classifica a forma contínua ou magnitude em forma algébrica contínua, ou seja, a magnitude intensiva e a forma contínua combinatória, ou seja, a magnitude extensiva. A magnitude intensiva resulta, pois, da geração do igual, e a magnitude extensiva ou *extensão* da geração do distinto. Aquela é, como magnitude variável, o fundamento da teoria das funções e do cálculo diferencial e integral; esta, em compensação, o fundamento da teoria da extensão.

Destas duas áreas, a primeira está subordinada à Aritmética e, por isso, já é bastante conhecida, enquanto a segunda aparece como uma área ainda desconhecida, e é necessário explicar mais estas considerações, dificultadas ainda pelo conceito do contínuo fluir. Tal como no número aparece a uniformidade e na combinação a diversidade das idéias reunidas, assim também na magnitude intensiva a

[84] O conceito de número e combinação já foi desenvolvido de forma análoga há 17 anos por meu pai em uma dissertação sobre o conceito da teoria pura dos números, que se encontra impressa no programa do "Gymnasium" de Stettin em 1827, que, no entanto, não se divulgou mais.

reunião de seus elementos que, embora conceitualmente sigam separados, é, na sua essencial igualdade, que constituem a magnitude intensiva. Em compensação, na magnitude extensiva aparece a separação de seus elementos que, embora estejam reunidos para formar uma única magnitude, é na sua separação que constituem a referida magnitude. Portanto, a magnitude intensiva é o número fluidificado e a magnitude extensiva é a combinação fluidificada. Para esta última, é essencial a separação de seus elementos e uma retenção destes como elementos separados; o elemento gerador aparece aqui como um elemento variável, vale dizer que passa por uma diversidade de estados, e a totalidade destes estados distintos é precisamente o sistema desta magnitude extensiva. Em compensação, a magnitude intensiva se gera por uma série contínua de estados iguais entre si, cuja quantidade é precisamente a magnitude intensiva. Como exemplo de magnitude extensiva, podemos eleger a linha limitada (segmento), cujos elementos estão essencialmente separados, constituindo precisamente por isso a reta como extensão; em compensação, como exemplo de magnitude intensiva, podemos tomar um ponto dotado de certa força; aqui os elementos não se separam e só se reforçam e representam, portanto, distintos graus de intensificação. Também aqui se nota, de maneira muito linda, a diferença estabelecida na denominação: na magnitude intensiva que é o objeto da teoria das funções não se distinguem os elementos por sinais particulares e onde aparecem sinais especiais estes se referem à magnitude variável completa. Em compensação, na magnitude extensiva ou na sua representação concreta, a reta, se representam os elementos distintos por símbolos distintos ( letras), o mesmo que na combinatória. Também é claro que toda magnitude real pode ser considerada de ambas as maneiras, como magnitude intensiva ou extensiva; também a reta é considerada magnitude intensiva, se não levarmos em conta a maneira como estão dispostos seus elementos e somente se considera a quantidade deles; analogamente, se pode pensar o ponto dotado de uma força como uma magnitude extensiva, para o qual é suficiente imaginar a força abaixo da forma de uma reta.

Historicamente se têm desenvolvido os quatro ramos da Matemática, o discreto antes do contínuo (por ser mais facilmente captado pelo espírito analítico), o algébrico antes do combinatório (porque é mais fácil reunir o semelhante do que o diverso). Ainda que a teoria dos números seja a mais antiga, a combinatória e o cálculo diferencial foram formados ao mesmo tempo, enquanto a teoria da extensão, em sua forma abstrata, teve que ser a última, por outro lado, sua representação concreta (ainda que limitada), a teoria do espaço, já pertence a tempos mais antigos.

8. Pode-se antepor aos quatro ramos da teoria das formas, uma parte geral que estuda as leis de ligações comuns aos quatros ramos e que podemos denominar a teoria geral das formas.

É essencial antepor essa parte ao conjunto, não somente para economizarmos a repetição dos mesmos desenvolvimentos nos quatro ramos e nas partes distintas de um mesmo ramo e reduzir com isto as deduções, mas também para juntar a semelhança que aparece como base fundamental do conjunto.

## C. Exposição do conceito da teoria da extensão

9. A geração contínua decomposta em seus momentos aparece como uma criação contínua contendo o criado. Na forma extensiva, é concebido o elemento criado como algo distinto; se agora não deduzirmos o criado a cada instante, chegamos ao conceito de *variação contínua*. O que experimenta esta variação o denominamos de elemento gerador, e este elemento gerador, em algumas das formas que toma durante sua variação, um elemento da forma contínua. Segundo isso, podemos considerar a forma extensiva como o conjunto de todos os elementos que coincide com o elemento gerador durante a variação contínua deste.

> O conceito de variação contínua do elemento só pode distinguir-se nas magnitudes extensivas; nas magnitudes intensivas, se suprimimos cada vez o criado, somente é deixado em cada momento o começo de um ato da geração como algo completamente vazio.
>
> Na teoria do espaço, o ponto aparece como elemento, o deslocamento ou movimento como sua variação contínua e as diferentes posições do ponto no espaço como seus diferentes estados.

10. O diferente deve desenvolver-se segundo uma lei, se o resultado deve ser algo determinado. Esta lei deve ser, para obter uma forma simples, a mesma em todos os momentos da geração. A forma extensiva simples é, pois, o resultado da variação do elemento gerador segundo uma única lei; o conjunto de todos os elementos gerados por certa lei será chamado de sistema.

> Como o diferente de algo dado pode ser infinitamente variado, resulta que a diversidade se perderia completamente no indeterminado, se não se subordinasse a uma certa lei. Na teoria pura das formas, esta lei não está determinada por conteúdo algum, mas pela idéia puramente abstrata de lei (uniformidade) que determina o

conceito de extensão, e a idéia de uma única lei para todos os instantes da variação, o conceito de extensão *simples*. De acordo com isso, a extensão simples tem uma conformidade de modo que se um de seus elementos, *a,* se obtém outro elemento *b* da mesma extensão, por meio de certa variação, então de *b,* por meio da mesma variação, se obtém um terceiro elemento *c* e que também lhe pertence.

Na teoria do espaço, é a lei da igualdade de direção que compreende as variações individuais; o segmento é, pois, na teoria do espaço, o que corresponde à extensão simples, a reta infinita que corresponde ao sistema.

11. Aplicando duas leis de variações diferentes, obtém-se um sistema de segundo grau como o conjunto de todos os elementos gerados mediante ambas as leis. As leis pelas quais geram elementos do sistema a partir de outros dependem das duas primitivas: aplicando uma terceira lei independente se chega a um sistema de terceiro grau e assim sucessivamente.

Tomemos como exemplo, novamente, a teoria do espaço. Nela são gerados mediante duas direções distintas e a partir de um elemento, todos os elementos de um plano, deslocando-se o elemento gerador em ambas as direções arbitrariamente e reunindo-se conceitualmente o conjunto de todos os pontos ou elementos assim gerados. O plano é, pois, o sistema de segundo grau; e contém uma quantidade infinita de direções que dependem das duas primitivas. Adicionando uma terceira direção independente, todo o espaço infinito é gerado com sua ajuda (como sistema de terceiro grau); e além destas direções (leis de variações) independentes não se pode aqui chegar, enquanto que na teoria pura da extensão, a quantidade delas se pode aumentar até o infinito.

12. Para sua determinação exata, a diversidade das leis necessita de outra lei, através da qual vai de um sistema a outro. E a passagem de um sistema a outros forma, portanto, uma segunda etapa natural no campo da teoria da extensão e, com isso, fecha a descrição elementar desta ciência.

A teoria do espaço corresponde à passagem de um sistema a outros, rotação, e com ela se relaciona a magnitude angular, o comprimento absoluto, a perpendicularidade, etc.; o qual será incluído na segunda parte da teoria da extensão.

### D. Forma de representação

13. É próprio do método filosófico avançar nos contrates para ir do geral para o particular; o método matemático, ao contrário, avança dos conceitos mais simples para os mais complexos.Os conceitos mais gerais são adquiridos mediante a conexão com o particular.

> Isto é, enquanto que na filosofia predomina a visão do conjunto e o desenvolvimento consiste na progressiva ramificação e na decomposição do todo, aqui rege a conexão com o particular e cada desenvolvimento encerrado é uma ligação para a conexão seguinte. Essa diferença do método baseia-se no conceito, pois para a filosofia a origem é a unidade da idéia, porém, na Matemática, a origem é o particular e a idéia é o alvo a que se aspira.

14. Como tanto a Matemática como a filosofia são ciências no sentido mais estrito, deve encontrar-se algo comum no método de ambas que precisamente caracteriza o método científico. Isto posto, chamamos científico um desenvolvimento quando o leitor é levado, por um lado, necessariamente, ao reconhecimento de cada uma de suas verdades e, por outro, quando o leitor é

capaz de prever de cada ponto do desenvolvimento a direção em que se seguirá avançando.

> Estarão todos de acordo de que há necessidade absoluta do primeiro, isto é, do rigor científico. Em relação ao segundo, temos um ponto a que a maioria dos matemáticos não atribui toda a sua importância. Vê-se, com freqüência, demonstrações nas quais não se poderia saber aonde se quer chegar, se o teorema não estiver enunciado no princípio, chegando de repente ao que se tratava de demonstrar, depois de ter pensado cegamente e sem saber para que sobre cada passo. Tal demonstração talvez seja perfeitamente rigorosa, mas não é científica, pois lhe falta a segunda condição:a clareza. Portanto, quem segue tal demonstração não atinge um livre conhecimento da verdade, sempre que não consiga a visão de conjunto por seus próprios meios,
>
> cai em completa dependência da maneira especial com que está sendo deduzida aquela verdade. Este sentimento de falta de liberdade que aparece em tal caso é muito desconfortável para aquele que está acostumado a pensar livre e independentemente e a apreender o conhecimento vivo. Se, ao contrário, o leitor tem a possibilidade de ver em cada ponto do desenvolvimento a direção aonde se vai, então dominará a matéria, já não estará sujeito à forma especial da descrição e a apreensão do conhecimento se transforma em uma verdadeira reprodução.

15. Em cada ponto do desenvolvimento está determinado o prosseguimento do desenvolvimento por uma idéia diretriz, que pode ser somente uma suposta analogia com outros ramos conhecidos do conhecimento, ou, e este é o melhor dos casos, que é diretamente uma intuição da verdade a buscar em primeiro lugar.

A analogia somente é por referir-se a outros campos do conhecimento, uma necessidade inevitável, salvo o caso em que se trate precisamente de ressaltar a analogia entre dois ramos do saber[85]. A intuição parece ser estranha à ciência pura e,sobretudo,à Matemática. Não obstante, sem ela seria impossível encontrar verdades novas: não se chega a estas combinando cegamente os resultados obtidos; o que se combina e a maneira de combinar devem ser determinados por uma idéia diretriz, e esta idéia somente pode aparecer, antes de ser comprovada cientificamente, na forma de uma intuição. Conseqüentemente, esta intuição é algo imprescindível dentro da ciência. Ela é, sempre que for verdadeira, a síntese de toda uma série de desenvolvimentos que levam à nova verdade, síntese na qual não aparecem ainda separados seus distintos passos e que, portanto, no princípio é somente um obscuro pressentimento; ao separá-lo, isto é, ao fazer a análise do desenvolvimento, encontra-se a verdade e se realiza a crítica daquele pressentimento.

16. A descrição cientifica é, conseqüentemente, uma combinação de duas séries de desenvolvimentos, das quais uma representa o verdadeiro conteúdo, nos leva com todo rigor de uma verdade à outra, em compensação, domina o método e a forma. E na Matemática se nota, de maneira mais acentuada, a separação entre ambas.

Há muito tempo, Euclides deu o exemplo, foi costume na Matemática aparecer somente um de ambos os sistemas de desenvolvimento, a saber, aquele que forma o

[85] Este é o caso desta ciência com a Geometria que têm elegido, geralmente, a analogia como caminho de descrição.

verdadeiro conteúdo deixando por conta do leitor o trabalho de compreender (ler entre linhas) o outro. Desta maneira,é impossível, por mais completa e perfeita que seja a descrição dos desenvolvimentos, proporcionar àquele que deseja aprender a ciência, a visão do conjunto a cada instante do desenvolvimento, para tornar assim a possibilidade de prosseguir livremente por seus próprios meios. Para isto é necessário colocar o leitor, o quanto for possível, no mesmo estado em que se encontrava o descobridor da verdade. O descobridor da verdade reflete constantemente sobre a seqüência do desenvolvimento; forma-se em uma série de pensamentos acerca do caminho que deve tomar e acerca da idéia fundamental em que se baseia todo o desenvolvimento; esta série de pensamentos forma o núcleo da verdade e o espírito de sua atividade, enquanto o desenvolvimento conseqüente das verdades é somente a materialização daquela idéia. Pretender que o leitor prossiga independentemente o caminho do descobridor, sem conduzir previamente tais raciocínios significa colocá-lo acima do mesmo descobridor da verdade, invertendo a relação existente entre o leitor e o autor, resultando, neste caso, supérflua a redação da obra. Esta é a razão pela qual alguns matemáticos modernos, sobretudo os franceses, empenharam-se a entrelaçar ambos os sistemas do raciocínio. As obras resultam assim atraentes, porquanto o leitor se sente livre e não está sujeito às formas, a que, em outro caso, deve subjugar-se totalmente, por não dominá-las. Esta é a particularidade de seu método (nº13), em que ambas as séries de raciocínio se distinguem na Matemática de maneira mais clara. Como elas avançam do particular por meio de uniões sucessivas, resulta que a unidade da idéia é o final. Por isso, a segunda série de desenvolvimento tem um caráter completamente oposto ao da primeira, e é mais difícil que em qualquer outra ciência entrelaçar ambas. Entretanto, não se deve por isso renunciar a todo o procedimento, como fazem muito sutilmente os matemáticos alemães.

Na presente obra, é seguido, conseqüentemente, o caminho indicado, parecendo-me isso tanto mais necessário por tratar-se de uma nova ciência, da qual se deve entender principalmente a idéia diretriz.

# ANEXO II

**Reproduzimos a Tabela seguinte objetivando evidenciar o tratamento dado por Grassmann ao Grossenlehre.**

**Os termos usados por Grassmann para definir as operações não são possíveis de serem traduzidos em termos atuais e eram desconhecidos até mesmo para os alemães de sua época. Ela nos possibilita notar a perspectiva estrutural-algébrica, a qual permeia todo seu trabalho.**

| **Operação** | **a o (b o e) = (a o b) o e**<br>**e denota uma unidade arbitrária (§30; grundf.)** | **$e_1$ o $e_2$ = $e_2$ o $e_1$**<br>**$e_1$ e $e_2$ denota unidades arbitrárias (§36 Grundf.)** | **$\exists\ \mu\ \forall$ a( a o $\mu$ = $\mu$ o a = a) $\mu$ : nada ändernde Gröse (§ 40;Satz)** | **$\exists\ \nu\ \forall$ a (a $\circ\ \nu$ = $\nu\ \circ$ a = $V$ ); $\nu$ : nada; änderbare Gröse(§42;Satz)** | **a $\circ$ b=a $\circ$ c $\Rightarrow$ b=c**<br>**b $\circ$ a=c $\circ$ a $\Rightarrow$ b=c**<br>**w $\circ$ a $\neq$ $V$ (§ 46;Satz)** |
|---|---|---|---|---|---|
| Anreihung (§28) | | | | | |
| Einigung (§29-34) | $\otimes$ | | | | |
| Vertauschung (§35-38) | $\otimes$ | $\otimes$ | | | |
| Antrennung (§9-52:53-54) | | | $\otimes$ | opcional | $\otimes$ |
| Eintrennung(§39-52:55-60) | $\otimes$ | | $\otimes$ | opcional | $\otimes$ |
| Abtrennung (§39-52:61-68) | $\otimes$ | $\otimes$ | $\otimes$ | opcional | $\otimes$ |

**Propriedades básicas de uma operação binária entre magnitudes arbitrárias.**