MARCELO RIVELINO RODRIGUES

A URNA DE BERNOULLI COMO MODELO FUNDAMENTAL NO ENSINO DE PROBABILIDADE

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
2007

MARCELO RIVELINO RODRIGUES

A URNA DE BERNOULLI COMO MODELO FUNDAMENTAL NO ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profª Drª Cileda Coutinho Queiroz e Silva.**

PUC/SP
2007

Banca Examinadora

DEDICATÓRIA

A meus pais Emílio (em memória)
e Eduvirges, a quem Deus confiou minha vida,
que eles souberam tão bem encaminhar
para uma existência digna.
A meus irmãos Willian, Wilson,
Fernando, Vera (em memória), Cássia e Kelli.

AGRADECIMENTOS

Maiormente, meu agradecimento será a Deus, por sua infinita misericórdia e paciência para comigo. Sem Sua presença em minha vida, certamente a conclusão deste trabalho seria impossível.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela bolsa de estudo.

À minha orientadora Professora Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pela compreensão, apoio incondicional, carinho, dedicação que trouxeram força e coragem para escrever e concluir este trabalho.

À Professora Dra. Lisbeth Kaiserlian Cordani e ao Professor Dr. Benedito Antônio da Silva, pelas valiosas sugestões durante o meu exame de qualificação.

Ao Prof. Dr. Michel Henry pelo incentivo, sabedoria, confiança e parceria, que tanto me ensinaram.

À minha mãe, pelo estímulo, exemplo e compreensão em todos os momentos de minha vida.

A meu irmão Fernando, pela determinação e apoio que sempre contribuíram para minha formação pessoal e profissional.

Aos irmãos Willian, Wilson, Cássia, Kelli e sobrinhos Gabriel, Tatiana e Ricardo, ao amigo Renato, meu irmão em Cristo, a todos estes pelas orações feitas a Deus para minha causa.

À princesa Letícia, inspiração do meu viver.

À Luciana, por quem meu amor é imensurável.

Enfim, a todas as pessoas que acreditaram e contribuíram para a conquista e realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho propomos a utilização da Urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de Probabilidade. Para a representação concreta da urna, usarei a atividade denominada “Garrafa de Brousseau”.

A base que permea este trabalho foi composta por duas teorias: a de “Campos Conceituais”, de Gerard Vergnaud, e a “Teoria das Situações”, de Guy Brousseau.

Realizamos esta pesquisa com alunos da última série do quarto ciclo do Ensino Fundamental, com o intuito de verificar se esses alunos, por meio de uma seqüência de ensino, puderam construir os conceitos probabilísticos de base quando estes são abordados por dois enfoques: o laplaciano e o freqüentista.

Palavras Chave: Probabilidade, Campos Conceituais, Urna de Bernoulli.

ABSTRACT

In this work I am considering the use of the Urn of Bernoulli, as a basic model in the education of Probability. For the concrete representation of the urn I will use the so called activity “The Bottle of Brousseau”.

The theoretical basis present in this research is composed by two main theories: The Conceptual Fields Theory, which belongs to Gerard Vergnaud, and the Theory of the Situations, developed by Guy Brousseau.

The present research was accomplished with students of the last series of the room cycle of Basic Education in order to verify if they, through an education sequence, can be able to construct the probabilistic concepts of base, when these concepts are boarded for two approaches: the Laplaciano approach and the frequency approach.

Words Key: Conceptual Probability, Conceptual Fields, Urn of Bernoulli.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

APRESENTAÇÃO

A insatisfação é, talvez, um dos sentimentos que o ser humano mais repudia e do qual faz de tudo para se livrar, visto que não há quem não deseje estar satisfeito em todos os aspectos de sua vida.

Iniciamos este trabalho de pesquisa com uma questão: quando insatisfeito com alguma situação, o leitor procura a solução para seu problema?

Entendemos que a resposta seja sim, e não poderia ser outra, pois a insatisfação não condiz com o espírito humano e o homem não nasceu para viver insatisfeito. Ao contrário, ele busca durante sua existência justamente a satisfação em todos os aspectos da vida, seja na área pessoal ou na profissional. É natural ao homem procurar o melhor para si, e isto está bem explicitado na palavra “satisfação”.

Dizemos estas coisas, pois foi por um estado de insatisfação que viemos sendo conduzidos ao mundo da pesquisa, na intenção de encontrar uma resposta para a nossa inquietação (leia-se “insatisfação”).

Nossa inquietação/insatisfação se deu no que diz respeito ao ensino de Matemática, mais precisamente, ao ensino de Probabilidade, já que quase todas as decisões que ocorrem no mundo são tomadas após estudos minuciosos de suas probabilidades, avaliando-se a margem de acertos ou de erros, conquistas ou derrotas, ganhos ou perdas.

Nesse momento, diante do por que desses conceitos básicos de Probabilidade não estarem aparentemente sendo ensinos nas séries iniciais do Ensino Fundamental, pelo que nossa experiência como docente mostrava.

A busca de respostas para esse fato foi a motivação para que iniciássemos o curso de Mestrado para, assim, termos bases científicas para a pesquisa.

Sou professor da rede pública da cidade de São Paulo. Iniciei minhas atividades no ano de 1999 e atualmente ministro aulas para os 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e também para o ensino médio.

Ao ingressar na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, identifiquei dentre os vários grupos de pesquisa em atividade um no qual minha inquietação se encaixava. Esse grupo de pesquisa tem os seguintes pontos de investigação:

> Eixo temático: o estudo do processo de formação e desenvolvimento de conceitos segundo os paradigmas da Educação Matemática. Parte-se de uma interrogação sobre o que se passa em classe, segundo o ponto de vista dos alunos, do professor e do ambiente no qual deverá se desenvolver o processo a ser estudado. O interesse é pesquisar fenômenos didáticos ligados ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos e estratégias quando estes estão relacionados a um objeto matemático:
>
> - Quais os processos para a construção do conceito?
> - Quais as concepções espontâneas do sujeito-aprendiz?
> - Como essas concepções evoluem?
> - Quais dessas concepções podem constituir obstáculos para a aprendizagem?
> - Como tratar esses obstáculos?
>
> (Grupo de pesquisa G4 PUC/SP, 2005, disponível em www.pucsp.br/pensamentomatemático)

A idéia principal deste trabalho, com base nos grandes questionamentos deste grupo de pesquisa, é a de estabelecer uma seqüência de ensino baseada nas teorias utilizadas nesta pesquisa. Esta seqüência tem por objetivo buscar a resposta à questão da utilização da urna de Bernoulli como modelo fundamental para o ensino do conceito de probabilidade. Quais as contribuições que o modelo de urna de Bernoulli poderia trazer na construção dos conceitos probabilísticos de base?

Duas teorias irão nortear este trabalho, pois ambas se complementam no tocante à idéia principal desta pesquisa: a Teoria das Situações (Brousseau, 1986) e a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990).

Sob orientação da Professora Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, diversas leituras auxiliaram nessa busca, iniciada como fruto da inquietação que, temos claro, desencadeará outras, com novas reflexões que já aguçam o desejo de novas buscas para futuras pesquisas.

Este documento foi organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos a nossa questão de pesquisa, as leituras dos trabalhos e dos documentos oficiais que ratificam o trabalho.

No capítulo 2 estão as considerações teóricas que embasaram o texto e de como duas teorias (Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud, e Teoria das Situações, de Guy Brousseau) se unem, tomando um único foco, para que o objetivo traçado alcance êxito naquilo em que nos propomos.

No capítulo 3 apresentamos as considerações metodológicas. Também neste capítulo está a atividade “A Garrafa de Brousseau”, que completa a seqüência de ensino utilizada como instrumento de pesquisa neste trabalho.

O capítulo 4 traz as atividades que compõem a seqüência de ensino, além de um quadro destas, onde apresentamos os objetivos a serem alcançados em cada uma delas.

CAPÍTULO 1

1. JUSTIFICATIVA

Aparece neste capítulo uma análise inicial das leituras sobre o ensino dos conceitos de probabilidade no Ensino Fundamental, e de que forma essas leituras geraram as hipóteses da pesquisa.

Aqui serão expostas também as conclusões de alguns pesquisadores, com o objetivo de esclarecer sobre o que cada uma dessas leituras contribuiu para o trabalho.

1.1. O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE PROBABILIDADE

A teoria da probabilidade é o ramo da Matemática que estuda os fenômenos aleatórios. Cordani a define assim: "*Probabilidade é uma medida que quantifica a sua incerteza frente a um possível acontecimento futuro*" (Cordani, 2004, p.6).

Para a formulação deste capítulo, foram feitas diversas leituras em artigos, dissertações, publicações oficiais e também uma análise de livros didáticos, com a finalidade de delimitar de que forma está ocorrendo o ensino e a aprendizagem dos conceitos de probabilidade.

Um dos primeiros trabalhos com o qual tivemos contato foi a dissertação de mestrado de Gonçalves (2004). Uma das observações que este trabalho apresenta é que os professores de Matemática pesquisados por ele, com formação na escola básica nas décadas de 70, 80 e 90, geralmente não introduzem os conceitos básicos de Probabilidade nas séries iniciais do Ensino Fundamental. A alegação desses professores é a de que eles não têm formação suficientemente sólida nesse tema, pois não tiveram um aprofundamento em tal área do conhecimento. No referido trabalho, Gonçalves mostra também que a prática docente desses professores está mais relacionada com as séries nas quais ministrava aulas no momento da pesquisa do que com sua formação inicial (escola básica e curso de licenciatura).

Ao analisarmos os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, observamos que esse conhecimento deve ser introduzido desde o início da escolaridade. Entretanto, uma parcela aparentemente considerável dos estudantes só tem tido contato com essa área do conhecimento no Ensino Médio, quando não só no Ensino Superior.

A pesquisa realizada por Santos (2005) apontou que os professores, sujeitos de sua pesquisa, não consideram viável a introdução dos conceitos de Estocástica no Ensino Fundamental, por entenderem que esses conteúdos são por demais complexos. Além disso, esses professores apresentam uma concepção de ensino de Combinatória e Probabilidade muito arraigada em fórmulas e definições.

Esta última constatação vai ao encontro do que sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais como indicamos na seqüência:

1.2. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

A demanda social é que leva a destacar esse tema como um bloco de conteúdo, embora pudesse ser incorporado aos anteriores. A finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade. Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de Probabilidade, além dos problemas de contagem que envolve o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos. Com relação à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos. Com relação à Probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros

> Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998, p. 52).

Ainda sobre o trabalho de Santos (2005), foram levantadas as seguintes afirmações dos professores pesquisados, que ratificam ainda mais a relevância da presente pesquisa. Esses professores dizem que:

> 1. Não consideram esses conteúdos viáveis para o ensino fundamental e mesmo para o ensino médio, apresentando certa resistência por não dominarem esses conteúdos.
> 2. Esses conteúdos não estão previstos pelas propostas para o ensino fundamental.
> 3. Consideram-nos complexos para o ensino fundamental.
> 4. Afirmam não ter conhecimento do que é proposto pelos PCN's para o ensino de combinatória, probabilidade e estatística.
> 5. Declaram não ter estudado esses conteúdos nos cursos de graduação (Santos, 2005, p. 98).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, a introdução ao pensamento probabilístico deve começar desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, pois se entende que tal com as demais áreas do conhecimento matemático, a Estocástica é de fundamental importância para o desenvolvimento do aluno no que diz respeito à tomada de decisões, além do estudo das probabilidades de um determinado evento.

Os trabalhos de Coutinho (1994, 2001) mostram que os alunos do terceiro ciclo do Ensino Fundamental já apresentam maturidade cognitiva para construírem os conceitos probabilísticos de base. Para essa autora, no caso específico do modelo da urna de Bernoulli, os únicos conteúdos matemáticos necessários como ferramentas para essa modelagem são conceitos introduzidos já no ensino fundamental: freqüências, freqüências relativas e proporções.

Com relação ao processo de modelagem e, especificamente pelo modelo utilizado nesta pesquisa (urna de Bernoulli), esta receberá uma explanação mais completa no capítulo 3.

A importância da identificação desses conceitos é que eles explicam a idéia de experimento aleatório, conceito de probabilidade e a idéia de eventos condicionados/independentes, ressaltando ainda que o conceito de probabilidade tenha como ponto principal a percepção da ação do acaso, possibilidade de reprodutibilidade e possibilidade de identificação de todos os resultados possíveis.

Questionamos, ainda:

- Esses alunos já não teriam em si conhecimentos prévios/intuitivos que os ajudassem a tomar decisões sem fundamentar-se em argumentações do senso comum?
- Que benefícios poderia trazer ao ensino de Probabilidade a utilização dos conhecimentos que os alunos possam ter/trazer?

Esta pesquisa se solidificou a partir do momento em que se verificou, por meio da leitura dos trabalhos citados, que tal conteúdo, de tão relevada importância, aparentemente não estava sendo ensinado nas séries do quarto ciclo do Ensino Fundamental ou em outras.

A conclusão dessas leituras vai ao encontro à proposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, que sugere para o terceiro ciclo, como podemos observar:

> “Neste ciclo amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (**moedas, dados, cartas**) [grifo nosso]. Assim, poderão ir se familiarizando com o modo com que a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana (PCN-EF, p. 70)”.

Em nosso grupo de pesquisa (G4, PUC-SP, 2006) temos por objetivo principal pesquisar a “formação e evolução de conceitos” seja do professor, seja do aluno, onde o grupo procura estabelecer quais os processos para a construção do conceito e quais as concepções espontâneas do sujeito-aprendiz.

Esse estudo se dá a partir das várias necessidades existentes nesta área de pesquisa, dentre estas, por exemplo, o saber como essas concepções[1] espontâneas do sujeito-aprendiz evoluem e quais delas podem constituir obstáculos para a aprendizagem. Ocorrendo a identificação dos obstáculos, deve-se entender como trabalhar com eles.

É importante ressaltar que o termo “concepção”, apresentado por Coutinho (2003), é “uma interiorização do saber e uma forma de mobilização própria a cada indivíduo”. Balacheff adota esse termo no sentido de que: “um conjunto de

[1] Concepção: estrutura mental de caráter geral que inclui crenças, conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências, conscientes ou inconscientes (Thompson, 1992, apud Azcárate, 1996, p. 41)

concepções forma um conhecimento, e um conjunto de conhecimentos formam um conceito" (Balacheff 1997, apud Coutinho, 2003).

A partir desse entendimento buscaremos identificar que princípios (aditivos ou multiplicativos), os alunos mobilizam com o objetivo de levá-los a construir os conceitos probabilísticos de base.

Esta é, portanto, a introdução ao tema "**A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino e na aprendizagem do conceito de probabilidade",** cuja finalidade é verificar que contribuições a urna de Bernoulli poderia trazer para a construção dos conceitos probabilísticos de base.

> "O modelo de urna de Bernoulli pode representar as situações aleatórias da realidade que apresentam a configuração de uma experiência de Bernoulli: uma experiência aleatória que resume as saídas possíveis por dois acontecimentos: "sucesso" ou "fracasso". Uma urna de Bernoulli é então uma que contem bolas supostamente perfeitas, idênticas, com a mesma possibilidade de serem tiradas num sorteio aleatório. Nessa urna, as bolas são de duas cores diferentes, brancas e pretas. Uma urna de Bernoulli servirá para representar abstratamente uma experiência aleatória a duas saídas possíveis: sucesso (bola branca) ou fracasso (bola preta). O caráter pseudo-concreto de uma urna de Bernoulli é destacado pelo processo de construção desse modelo: os alunos podem construir um modelo de urna de Bernoulli a partir da abstração de um pote real preenchido de bolas coloridas, e no qual podem fazer tiragens concretas. (Coutinho, 2001)."

Assim, de um ponto de vista didático, esse modelo permite que, de forma completa, se possa exprimir *"o processo de modelagem, desde a observação da situação aleatória a ser modelada até a explicitação do modelo que representa"* (Coutinho 2004, p. 2).

Entende-se que a maioria das leis discretas para populações finitas, representativas de outros tipos de experiências aleatórias, pode ser construída a partir desse modelo.

Com relação às pesquisas tanto de Gonçalves como a de Santos, estas apontam que os sujeitos por esses autores pesquisados, não ensinam probabilidade a seus alunos por não dominarem, ou por não se sentirem totalmente seguros de dominar os conceitos básicos dessa área do conhecimento, além de entenderem serem que estes conteúdos, são de natureza complexa. Isso reforça a possibilidade de que, a partir de uma seqüência de ensino, embasada nas teorias de Brousseau e Vergnaud, possibilite com que os alunos, sujeitos desta nossa pesquisa, construam os conceitos probabilísticos de base, uma vez que os trabalhos de Gonçalves e de Santos não apresentam problemas relacionados aos alunos, e sim aos professores, no que diz respeito ao ensino/aprendizagem de probabilidade.

Todavia, os trabalhos de Coutinho mostram que alunos do terceiro ciclo do Ensino Fundamental já apresentam maturidade cognitiva para construírem os conceitos probabilísticos de base. Sendo nosso público de pesquisa formado por alunos do quarto ciclo, podemos prosseguir com a proposta de utilizar a urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino e na aprendizagem de probabilidade por meio de uma seqüência de ensino, fundamentada na teoria dos

Campos Conceituais de Vergnaud e na teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

A seguir apresentamos uma análise documental para verificar que contribuições eles trouxeram à pesquisa.

1.3. ANÁLISE DOCUMENTAL E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Apresentaremos as contribuições que as pesquisas já mencionadas trouxeram ao nosso trabalho, como também mostraremos o quanto as leituras dos trabalhos de Silva (2002), Lopes (1998, 2002), além dos livros de Booth, Willians e Colomb e também do livro de Clifford Geertz, que por meio de suas metodologias, contribuíram para que diversos cuidados fossem tomados, tal como a escolha de sujeitos de pesquisa e a formulação das questões às quais esta pesquisa tenta responder. Após essas leituras foi possível definir o ponto de partida deste trabalho. Por fim apresentaremos um quadro orientador do percurso da hipótese já formulada.

1.3.1. ANÁLISE DOS DOCUMENTOS

Citando Lopes:

> A formação básica em Estatística e Probabilidade torna-se indispensável ao cidadão nos dias de hoje e em tempos futuros. Ao ensino da Matemática fica o compromisso de não só ensinar o domínio dos números, mas também a organização de dados e leitura de gráficos. Sob essa visão,

> percebemos que se incluirmos a Estocástica apenas como um tópico a mais a ser estudado, em uma ou outra série do Ensino Fundamental, enfatizando apenas a parte da Estatística Descritiva, seus cálculos e fórmulas não levarão o estudante ao desenvolvimento do pensamento estatístico e do pensamento probabilístico que envolve desde uma estratégia de resolução de problemas, até uma análise de resultados obtidos. Parece-nos essencial à formação de nossos alunos o desenvolvimento de atividades estatísticas que partam sempre de uma problematização, pois, assim como os conceitos matemáticos, os estatísticos também devem estar inseridos em situações vinculadas ao cotidiano deles. Assim sendo, esse estudo os auxiliará na realização de seus trabalhos futuros em diferentes ramos da atividade humana e contribuirá para sua cultura geral (Lopes, 1998, p. 27, 28).

Foi a colaboração dessas leituras que o foco da pesquisa “A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino e a aprendizagem de probabilidade” se solidificou com a questão: “que contribuição a urna de Bernoulli pode trazer na construção dos conceitos probabilísticos de base?”.

Sobre os conceitos probabilísticos de base, utilizaremos uma metodologia de uma seqüência de ensino, de forma que as atividades elaboradas possam permitir aos alunos pesquisados a construção de tais conceitos, detalhados oportunamente no próximo capítulo. Os alunos aos quais aplicaremos as referidas atividades estão na faixa etária dos 14 aos 15 anos, cursando a última série do quarto ciclo do Ensino Fundamental.

Os trabalhos lidos trouxeram importante contribuição, ajudando a apontar resultados já obtidos e limitando nosso tema de pesquisa.

A contribuição que o trabalho de Gonçalves trouxe foi a de apontar que os professores, por ele pesquisado, afirmam não ter uma formação suficientemente sólida no tema Probabilidade em sua formação acadêmica. Este seria um dos motivos para que eles não introduzam os conceitos básicos de Probabilidade nas séries iniciais do ensino fundamental.

Assim como em seus trabalhos Coutinho (1994, 2001) chegou a resultados importantes com alunos do ensino fundamental, o trabalho de Silva (2002) nos apresenta a possibilidade de os alunos poderem construir o conceito de Probabilidade, levando em conta a dualidade dos pontos de vista experimental e teórica (freqüentista e laplaciano). A leitura de seu trabalho ajudou a definir a abordagem por meio da qual deveriam ser introduzidos os conceitos probabilísticos de base. Vejamos outras contribuições:

- Santos: apresentou o quanto os professores pesquisados, apresentam idéias que divergem daquilo que é apresentado pelos PCN's no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem do conceito de probabilidade no Ensino Fundamental.
- Silva: assim como Coutinho havia apresentado em seus trabalhos (1994, 2001) ele também destaca a importância de se levar em conta a dualidade dos pontos de vista (freqüentista e Laplaciano), no ensino e na aprendizagem do conceito de probabilidade.

- Lopes: apresenta estudos já realizados na cidade de Campinas, que apontam a importância e a viabilidade de introdução de tais conceitos nas séries iniciais do Ensino Fundamental.
- PCN's: os livros oficiais abordam esse tema ressaltando a importância da introdução desses conceitos a partir das séries iniciais do Ensino Fundamental.

Acompanhando estes textos, também por meio das disciplinas do curso de Mestrado Acadêmico, outros autores foram importantes para o presente trabalho. Vale destacar o livro "Ciência em Ação: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora", de Bruno Latour, que ratificou (bem como o que ele mesmo chama de exército de aliados, ou seja, autores e cientistas que justificam nossas pesquisas) a importância e a validade científica desta pesquisa.

Colaboração semelhante teve a leitura de "A arte da pesquisa" de Booth, Colomb e Willians, em que se destacou a organização, a metodologia e as técnicas por eles sugeridas. A partir dessa leitura, esta pesquisa passou por reformulações no que diz respeito à coleta de dados e também da análise dos mesmos. Seguindo esse autor, a formulação de nossa hipótese ficou estabelecida da seguinte maneira:

- ***Esta pesquisa deve analisar que concepções os alunos da série final do quarto ciclo do Ensino Fundamental possuem no que diz respeito aos conceitos Probabilidade.***

- ***O intuito é descobrir se a introdução dos conceitos probabilísticos de base por meio de um modelo (urna de Bernoulli) facilitaria a construção desses conceitos.***
- ***Entender por que uma área tão importante do conhecimento matemático não é ensinada nessas séries iniciais (aparentemente, pelo o que apontam as pesquisas analisadas).***

O livro “A Interpretação das Culturas”, de Clifford Geertz foi de fundamental importância para nosso trabalho. Já no primeiro capítulo o autor faz perceber o quanto é importante para uma pesquisa termos uma postura de “estrangeiro” no momento de nossa intervenção na coleta de dados.

Segundo Geertz, o pesquisador deve ter uma postura externa a seu grupo em pesquisa, digo, à população, classe, escola e até mesmo com relação ao indivíduo que será a fonte de pesquisa. O porquê disto está baseado no fato que, só no momento em que se toma esta postura, o pesquisador fará uma coleta e analise de dados bem mais próxima do real. Tomamos o cuidado de esclarecer que, com a expressão “o mais próximo do real”, não dizemos que esta e todas as outras pesquisas não representam a realidade dos fatos.

Quando se fala em aproximação do real, o sentido é que só um “nativo”, tal como cita Geertz, pode fazer uma leitura real de seu cotidiano. Porém, essas leituras para o nativo não têm o porquê, justificando aí a presença do pesquisador.

Este, por sua vez, deve sempre se portar como uma pessoa com uma visão totalmente imparcial sobre o tema e o grupo em pesquisa.

Foi pela compreensão dessa postura de “nativo” que o pesquisador deve ter, e o quanto isso interfere na coleta e análise dos dados, que a leitura desse texto foi importante para esta pesquisa.

São justamente os dados coletados, como eles foram coletados e, principalmente, a análise dos mesmos que darão um status diferenciado a este trabalho.

A seguir, apresentamos um quadro que tem por finalidade sintetizar o nosso objeto. Este quadro apresenta a hipótese de pesquisa e de que forma e dentro de que base teórica a mesma foi conduzida. Vale lembrar que aqui ainda não foram introduzidos explicitamente elementos da teoria das Situações, assim como não foi detalhada a metodologia, que se dará com elementos de uma seqüência de ensino.

Portanto, o que apresentarei comporta somente a hipótese e de que forma a mesma está baseada na teoria dos Campos conceituais de Vergnaud (1991). Segue o quadro:

1.3.2. QUADRO DA LINHA DE PESQUISA

PROBABILIDADE: QUE CONCEPÇÕES QUE OS ALUNOS DA SÉRIE FINAL DO QUARTO CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL POSSUEM NO QUE DIZ RESPEITO AOS CONCEITOS DE PROBABILIDADE?

AÇÃO DO ACASO

POSSIBILIDADE DE REPRODUTIBILIDADE

POSSIBILIDADE DE IDENTIFICAÇÃO DE TODOS OS RESULTADOS POSSÍVEIS

AS NOÇÕES

PROBABILÍSTICAS

DE BASE

PERCEPÇÃO DA ALEATORIDADE

IDÉIA DE EXPERIMENTO ALEATÓRIO

CONCEITO DE PROBABILIDADE

IDÉIA DE EVENTOS CONDICIONADOS / INDEPENDENTES

EXCLUSIVOS

CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS PROBABILÍSTICOS DE BASE

CONCEITO
- S: CONJUNTO DE PROBLEMAS
- R: CONJUNTO DE REPRESENTAÇÕES
- ∑: CONJUNTO DE INVARIANTES

QUE CONCEITOS (VERGNAUD) PROBALÍSTICOS ESSES ALUNOS CONSTRUÍRAM?

QUE INVARIANTES OPERATÓRIOS PODEM SER IDENTIFICADOS QUANDO ELES MOBILIZAM CONCEITOS PROBABILÍSTICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS?

INVARIANTES OPERATÓRIOS: TEOREMAS EM AÇÕES/CONCEITOS EM AÇÃO

Apresentamos até aqui a justificativa e relevância do nosso trabalho de pesquisa, as contribuições científicas e de documentos oficiais para a definição da questão de pesquisa e de como, após essas leituras se deu, conseqüentemente, a definição da hipótese da pesquisa. A partir disto foi possível estabelecer um quadro teórico onde baseamos este estudo. Esse quadro serviu de bússola para as demais leituras e, conseqüentemente, para a elaboração dos demais capítulos.

No próximo capítulo apresentamos as teorias de Gerard Vergnaud (“Teoria dos Campos Conceituais”), e de Guy Brousseau (“Teoria das Situações Didáticas”), e de como nos empenhamos em fazer com que essas teorias convergissem para um único foco.

CAPÍTULO 2

2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Para este estudo teremos como base a Teoria dos Campos conceituais de (Vergnaud, 1991) e a Teoria das Situações (Brousseau, 1986).

O objetivo neste capítulo, primeiramente, é apresentar de que forma se faz a junção das duas teorias, no intuito de fazer com que o aluno sujeito da pesquisa possa, por meio da seqüência de ensino, por nós elaborada, transitar na resolução das atividades entre os princípios aditivos e multiplicativos. Conforme assinala Henry (2006), somente com o domínio do princípio multiplicativo e com um livre transitar entre este e o principio aditivo é que o aluno poderá construir os conceitos probabilísticos de base e como isso poderá ocorrer em uma situação didática.

2.1. DUAS TEORIAS, UM FOCO.

O foco em questão é o de fazer com que os alunos avancem da mobilização de estratégias unicamente no princípio aditivo para uma manipulação também no princípio multiplicativo, utilizando uma seqüência didática cujo principal objetivo é ao fim da quarta atividade fazer com que esses alunos verifiquem a necessidade da manipulação e do consciente transitar entre os dois princípios alcançando, dessa forma, o estágio que Henry (2006) chamou de pré-probabilidade.

Vale ressaltar que a proposta do tema de pesquisa é a utilização da urna Bernoulli como modelo fundamental para ensino e aprendizagem dos conceitos probabilísticos de base, e que toda a seqüência de ensino foi elaborada no intuito de que o aluno use o modelo pseudoconcreto do modelo binomial, representado neste trabalho pela Urna de Bernoulli.

Citando Coutinho:

> O domínio pseudoconcreto é o domínio de transição entre o domínio da realidade e o domínio teórico, quando colocamo-nos num processo de modelização. O domínio pseudoconcreto é aquele no qual se utilizam os nomes dos objetos da realidade para designar objetos abstratos, idealizados, teóricos. Sua função didática é induzir implicitamente o modelo teórico em causa, mesmo se esse modelo não é ainda acessível aos conhecimentos dos alunos. "Pode-se apresentar um modelo por uma analogia, introduzindo-se objetos idealizados da realidade". Isto quer dizer que, num vocabulário corrente, os objetos do modelo são dotados de propriedades características bem definidas, ilustrando a mudança de domínios, necessária quando de um processo de modelização, pelo esquema abaixo:
>
> - Domínio da realidade (experiência concreta).
> - Ação-Domínio pseudoconcreto (experiência de pensamento).
> - Pensamento. Domínio teórico (representação formal).
> - Pensamento formal.
>
> Assim, em tal processo de modelização, a observação e a análise de uma série de experiências reprodutíveis por meio de um mesmo protocolo experimental que permite libertar as

> invariantes para a sua modelização, levam idealizar essas experiências e conduzir à sua descrição no domínio pseudoconcreto: a experiência aleatória. (Coutinho, 2001).

Somente após a aplicação das atividades, e da observação do desenvolvimento das mesmas é que iremos passar para a fase da institucionalização, fase prevista na teoria das situações, onde os conceitos de probabilidade deverão ser formalizados. Dessa forma, faz-se necessária a junção de ambas as teorias, não descartando que outras teorias pudessem alcançar o mesmo objetivo, possibilidade esta que não é nosso objeto de estudo ficando, assim, aberta a possibilidade para que pesquisas futuras respondam a essa questão.

Com a teoria dos campos conceituais, nossa intenção é identificar junto aos alunos pesquisados quais os invariantes operatórios que eles mobilizam na construção dos conceitos probabilísticos de base.

Essa identificação se dará por meio da análise das produções dos alunos na resolução de atividades que irão compor a seqüência de ensino por nós idealizada. A identificação desses invariantes tem como objetivo principal verificar se esses alunos utilizam os princípios aditivos e os princípios multiplicativos, pois, segundo Henry:

> "... o aluno deverá mobilizar na resolução de problemas envolvendo conceitos de probabilidade tanto os princípios aditivos quanto os princípios multiplicativos, pois somente a partir daí o aluno estará apto na construção de tais conceitos (Henry, 2006)".

Caso esses alunos ainda não estejam mobilizando os dois princípios, ocorrerá uma reavaliação das atividades com o objetivo de fazer com que ambos os princípios sejam mobilizados por esses alunos.

Quando ocorrer a mobilização de ambos os princípios, o aluno estará no estágio de “pré-probabilidade” (Coutinho, 2001).

> “Pré-probabilidade é um conceito-em-ação do aluno que associa as "possibilidades" de obter um sucesso quando da realização de uma experiência aleatória (experiência de pensamento) à relação entre o número de bolas brancas e o número total de bolas na urna de Bernoulli, que modela esta experiência. A distinção entre a noção de pré-probabilidade e a de proporção na urna de Bernoulli deve-se à consideração da intervenção do azar. Passa-se, então, do processo de modelização, de uma percepção intuitiva das possibilidades de obter certo resultado de uma experiência aleatória concreta (domínio da realidade), à avaliação da probabilidade da saída representativa quando da realização em pensamento da experiência aleatória (domínio pseudoconcreto). Essa associação entre a noção de probabilidade e a proporção de bolas brancas numa urna de Bernoulli pode ser facilitada pela realização (efetivo ou idealizada) de um grande número de repetições da experiência. É a abordagem experimental dessa noção que, como para a de probabilidade, vai situar-se em duas apreensões: a das "possibilidades de tirar uma bola branca" e a de indicar aproximadamente a freqüência de sucessos de n experimentações (Coutinho, 2001)”.

Segundo essa autora, o estágio pré-probabilidade se caracteriza pela mobilização dos princípios multiplicativos, além dos princípios aditivos na resolução de problemas envolvendo idéias probabilísticas.

Ainda sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, ela irá nos nortear sobre a construção do conceito de probabilidade. Por meio de uma análise *a priori*, iremos identificar quais são os esquemas mentais mobilizados pelo sujeito (aluno) quando quer fazer uso dos princípios aditivos ou multiplicativos na resolução de um determinado problema. Poderemos verificar também quais os conceitos-em-ação ou quais os teoremas-em-ação, relativos a esses princípios para que possamos, na continuidade da coleta dos dados, numa análise *a posteriori*, identificar quais foram às mudanças ocorridas durante o desenvolvimento da seqüência de ensino por nós aplicado.

Com relação à Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986), para introduzir esse assunto faremos uso de uma citação de Almouloud;

> [...] caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo freqüentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos e determinar modelos (de alunos, do professor, de concepções de matéria a ensinar), na medida em que o processo é conhecido nos seus princípios e não na sua materialidade, e as leis que regem esses modelos, ou seja, caracterizar a organização do meio que permite a aprendizagem de um dado saber matemático (Almouloud, 2005, p. 98).

Como situação fundamental para a construção dos conceitos probabilísticos de base, utilizarei a configuração de uma Urna de Bernoulli, aqui representada pela “Garrafa de Brousseau”.

Um relato mais detalhado sobre a “Garrafa de Brousseau” será apresentado no capítulo 3, mas, para isso, devemos antes discorrer sobre a base metodológica usada nesta pesquisa, assunto que será tratado em um próximo capítulo.

Antes faremos um resumo da Teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud, apresentando alguns exemplos que terão a incumbência de mostrar, como veremos futuramente, a necessidade de se elevar um raciocínio aditivo para um multiplicativo, fator este essencial para a construção do conceito de probabilidade como mais à frente buscaremos ratificar.

2.2. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Falaremos da teoria de Vergnaud na intenção de indicar de que forma essa teoria servirá como cabo condutor da pesquisa. Será por meio da evolução de concepções que os alunos possuem que tentaremos à luz dessa teoria, levar esses alunos à construção dos conceitos probabilísticos de base.

2.2.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA

Começamos apresentando o que Vergnaud diz sobre a "Teoria dos Campos Conceituais". Para Vergnaud, essa teoria é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros e, provavelmente entrelaçados durante o processo de construção do conceito.

> "Situações (que podem ser questões de solução matemática), procedimentos (os caminhos para resolvê-las) e representações simbólicas (como a criança descreve o problema e a solução, seja por meio de números, palavras ou de desenhos) formam o que os teóricos chamam de campo conceitual. Na base desse campo estão as convicções da criança" (Falzetta, 2006, p. 54).

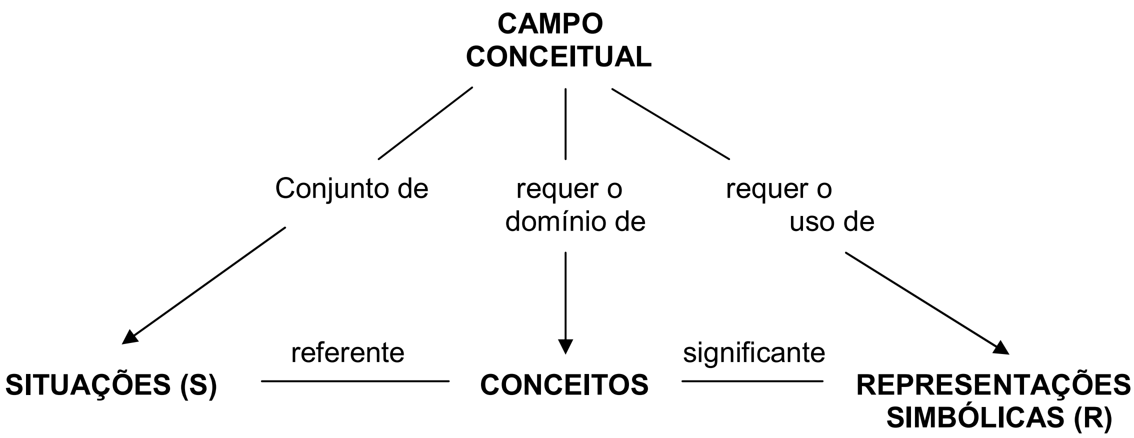
Iniciamos nossas considerações apresentando a interpretação que Franchi trouxe ao termo "conceito":

> "O estudo do desenvolvimento e do funcionamento de um conceito, no decurso da aprendizagem ou quando de sua utilização, deve considerar, ao mesmo tempo: o plano das

> situações, o dos invariantes operatórios e o das representações simbólicas. Não há em geral bijeção entre significantes e significados, nem entre (esquemas) invariantes e situações” (Franchi, 2002, p. 173).

A partir da interpretação de Franchi observamos que na teoria de Vergnaud, a definição de conceito apóia-se em três fundamentos, ou seja, uma terna de três conjuntos: um conjunto de situações (S) que dão sentido ao conceito, um conjunto de invariantes operatórios (∑) composto por “teoremas em ação” e “conceitos em ação”, que darão operacionalidade ao conceito e, por fim, um conjunto de representações simbólicas (R) que podem ser usadas para indicar e representar os invariantes operatórios e os objetos mentais manipulados na mobilização do conceito.

Agora utilizaremos um expediente esquematizado passo a passo para entendermos a teoria dos Campos Conceituais:



Esquema 1

Nosso propósito, a partir de agora, é de uma forma bem sucinta, explanar a respeito de cada um desses conjuntos (situações [S], invariantes operatórios [∑] e conjunto de representações simbólicas [R]), além daquilo que Vergnaud denominou de “esquemas”.

A teoria dos Campos Conceituais supõe que o âmago do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização e que essa conceitualização se dá primordialmente por meio das situações em que determinado conceito está implícito. Ou seja: são as situações e não os conceitos que constituem a principal entrada de um campo conceitual, pois ele vê que um campo conceitual é um conjunto de situações em primeiro lugar, cujo domínio requer o domínio de vários conceitos de natureza distintos.

2.2.2. Situações

Franchi interpreta assim situação: “Pensar em situação como um dado complexo de objetos, propriedades e relações num espaço e tempo determinado, envolvendo o sujeito e suas ações” *(2002, p.158).*

Outra interpretação que colabora com o nosso trabalho:

> O conceito de situação empregado por Vergnaud não é o de situação didática, mas sim o de tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. A dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das diferentes

> subtarefas envolvidas, mas é claro que o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global (Moreira 2004, p.5).

Vergnaud apóia-se no conceito que os psicólogos dão à situação como um processo cognitivo e as respostas do sujeito são em função das situações com as quais é confrontado. Por isso, para Vergnaud, muitas das nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou mesmo de nossas experiências em tentar modificá-las.

Ressaltamos que são as situações que dão sentido ao conceito. Com essa afirmação, Vergnaud deixa claro que o desenvolvimento cognitivo é um processo de longo prazo, pois a construção do conhecimento depende das concepções as quais o sujeito possua, adquiridas por meio das situações vivenciadas que esse sujeito pôde dominar. Dessa forma, Vergnaud se distancia um pouco das teorias de Piaget já que, para ele, não se é possível pré-determinar "fases" onde este ou aquele conhecimento é construído por um individuo. A construção do conhecimento se dá por causa da necessidade das situações vivenciadas pelo indivíduo e de uma forte interação social por parte deste. "Uma forte interação social" quer dizer que quanto maior for o contato do indivíduo com situações que o levem a elaborar concepções que o possibilitem transitar por diversas situações, construindo links entre objetos pertinentes e existentes nessas varias situações, mais esse sujeito estará "apto" a construir conhecimentos mais complexos. Para Vergnaud, a construção do conhecimento é uma "construção social", isso servindo para quantificar a importância das situações na construção de determinado conceito.

A partir do entendimento dado, a situação irá se ocupar em entender como o individuo a enfrenta e como mobiliza concepções e conhecimentos já internalizados por ele para que, dessa forma, ele dê significado ao conceito, Vergnaud definiu isto como esquemas.

2.2.3. Esquemas

Faremos uso da interpretação de "esquemas" dada por Franchi como sendo um conceito relacionado "à forma estrutural da atividade, à organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações dadas" (2002, p.164). Essa interpretação nos permite ver "esquemas" como uma parte imprescindível na construção de um conceito. São nos esquemas que tornam evidentes os conhecimentos em ação do sujeito.

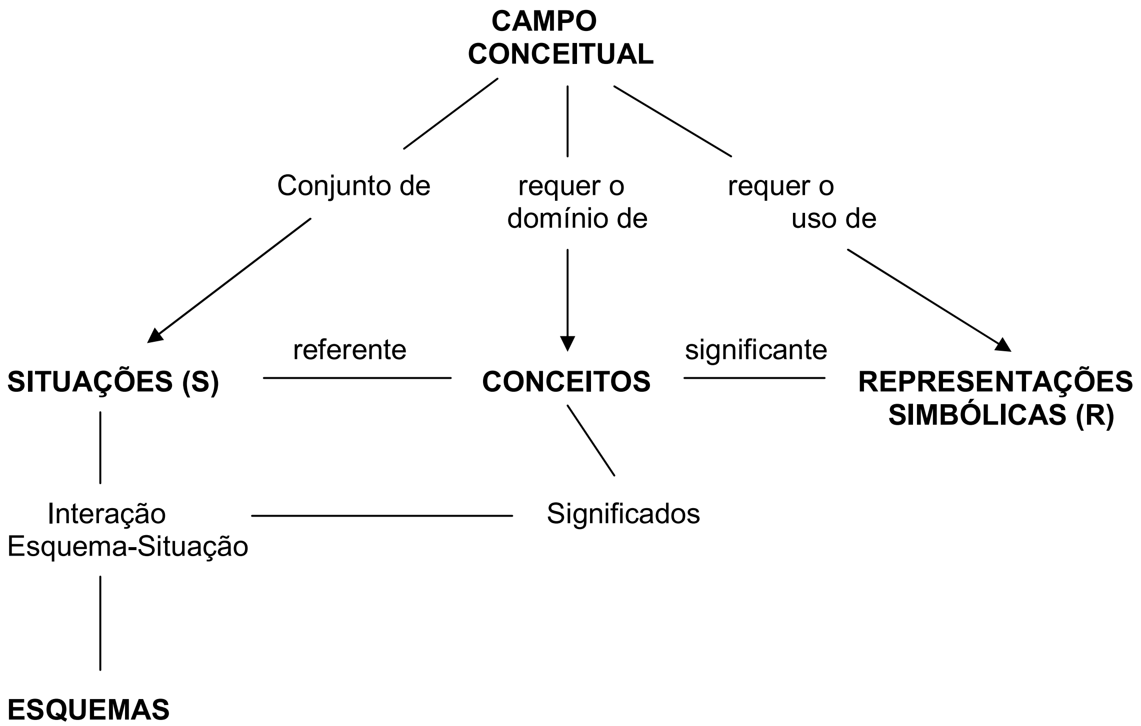
Para exemplificar, usemos um exemplo formulado por essa autora:

> O esquema de enumeração de uma pequena coleção de objetos discretos por uma criança de cinco anos, por mais que varie a forma de contar (por exemplo: copos na mesa, cadeiras na sala, pessoas sentadas de maneira esparsa em um jardim), não deixa de ter uma organização invariante essencial para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e gestos dos dedos e das mãos, enunciação correta da série numérica, identificação do último elemento da série como o cardinal do conjunto enumerado (acentuação ou repetição do último "número" pronunciado). Vê-se facilmente que o esquema descrito recorre a atividades perceptivo-motoras, a significante (a palavra números) e a construções conceituais, tais como as

> de correspondência biunívoca entre conjuntos de objetos e subconjuntos de números naturais, a de cardinal e ordinal e outras (Franchi, 2002, p.165).

A isso Franchi chamou de conhecimento em ação, pois são esses conhecimentos e conceitos que orientam o desenvolvimento da ação. Na fase inicial da construção dos conhecimentos aritméticos a explicação é praticamente impossível de ocorrer, pois esses são implícitos.

Desta forma, o esquema para a teoria dos Campos Conceituais atualizado fica assim formulado:



Esquema 2

Muitos esquemas podem ser evocados sucessivamente, e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito. Isso só é possível porque um esquema permite fazer antecipações do objetivo a alcançar.

Ao se estabelecerem as regras de ação do tipo “se... então” que constituem as partes geradoras dos esquemas, utilizando inferências que permitam “calcular”, “aqui e agora”, tais regras e também as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que dispõe o sujeito permitirá que este avance em seus esquemas mentais.

2.2.4. Invariantes Operatórios

Invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) orientam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação e a apreensão da informação sobre a situação a tratar (Vergnaud, 1990, p. 159).

Os invariantes operatórios é que definem as diferenças entre um esquema e outro, tornando-se, desta forma, imprescindíveis para os campos conceituais. Trataremos dos invariantes operatórios nos termos de teoremas-em-ação e de conceitos-em-ação.

2.2.5. Teoremas-em-ação e Conceitos-em-Ação

Teorema-em-ação é tido como uma proposição avaliada como verdadeira ou falsa sobre um determinado domínio de validade. Isto implica que os teoremas-em-ação funcionem como instrumentos operatórios pelo sujeito.

Teorema-em-ação é a forma como o sujeito apreende e mobiliza uma propriedade matemática, independentemente de ter aprendido essa propriedade.

Conceitos-em-ação é uma categoria de pensamentos considerada como pertinentes, um predicado, um objeto.

Segundo Moreira (2002), entre os conceitos-em-ação mais utilizados pelos alunos encontra-se os de grandeza e magnitude, valor unitário, razão e fração, função e variável, taxa constante, dependência e independência, quociente e produto de dimensões. Com relação aos teoremas-em-ação este autor diz que os mais importantes desenvolvidos pelos alunos encontram-se as propriedades isomórficas da função linear

$f(x + x') = f(x) + (x')$

$f(x - x') = f(x) - (x')$

$f(c_1x_1 + c_2x_1) = c_1f(x_1) + c_2f(x_2)$

e as propriedades de coeficiente constante dessa mesma função

$f(x) = ax$

$x = \frac{1}{a} f(x)$

e algumas propriedades específicas de funções bilineares como

$f(c_1x_1, c_2x_1) = c_1c_2f(x_1, x_2)$

Para este autor, existe uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação:

> "... uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Mas seria um erro confundi-los. Conceitos - em-ação são ingredientes necessários das proposições. Mas conceitos não são teoremas, pois não permitem derivações (inferências ou computações); derivações requerem proposições. Proposições podem ser verdadeiras ou falsas; conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes. Ainda assim não existem proposições sem conceitos. Reciprocamente, não há conceitos sem proposições, pois é a necessidade de derivar ações das representações do mundo e de ter concepções verdadeiras (ou pelo menos adequadas) do mundo que tornam necessários os conceitos. Um modelo computável do conhecimento intuitivo deve compreender conceitos-em-ação e teoremas-em-ação como ingredientes essenciais dos esquemas. Esquemas são fundamentais porque geram ações, incluindo operações intelectuais, mas podem gerá-las porque invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) é que formam o núcleo da representação (Moreira, 2002)."

Para dar uma idéia do que vem a ser teorema-em-ação, usamos um exemplo de Franchi (2002 p. 167-169).

1) Ofertas de sabonete

Em uma loja estavam anunciados os seguintes preços para uma oferta de sabonete:

Sabonete de glicerina – 1 unidade: R$ 1,60.

Sabonete de lavanda – caixa com 4 unidades: R$ 7,60.

Sabonete de algas – 1 unidade: R$ 2,30.

Problema 1: Maria comprou 6 sabonetes do mesmo tipo. Pagou por eles R$ 9,60. Maria comprou sabonetes do tipo _______________

Problema 2: Paulo gastou R$ 15,20 para comprar 8 sabonetes. Ele comprou sabonetes do tipo ________________

Atemos-nos à resolução do problema 2, mais especificamente sobre a resposta de uma aluna de nome Raquel:

“Eu já tinha feito muitas contas e não conseguia nada, então a tia Áurea deu uma explicação. Foi aí que pensei que, se numa caixa tem 4 sabonetes e 2 têm 8, então veio na minha cabeça que se fizesse R$ 7,60 por 2”.

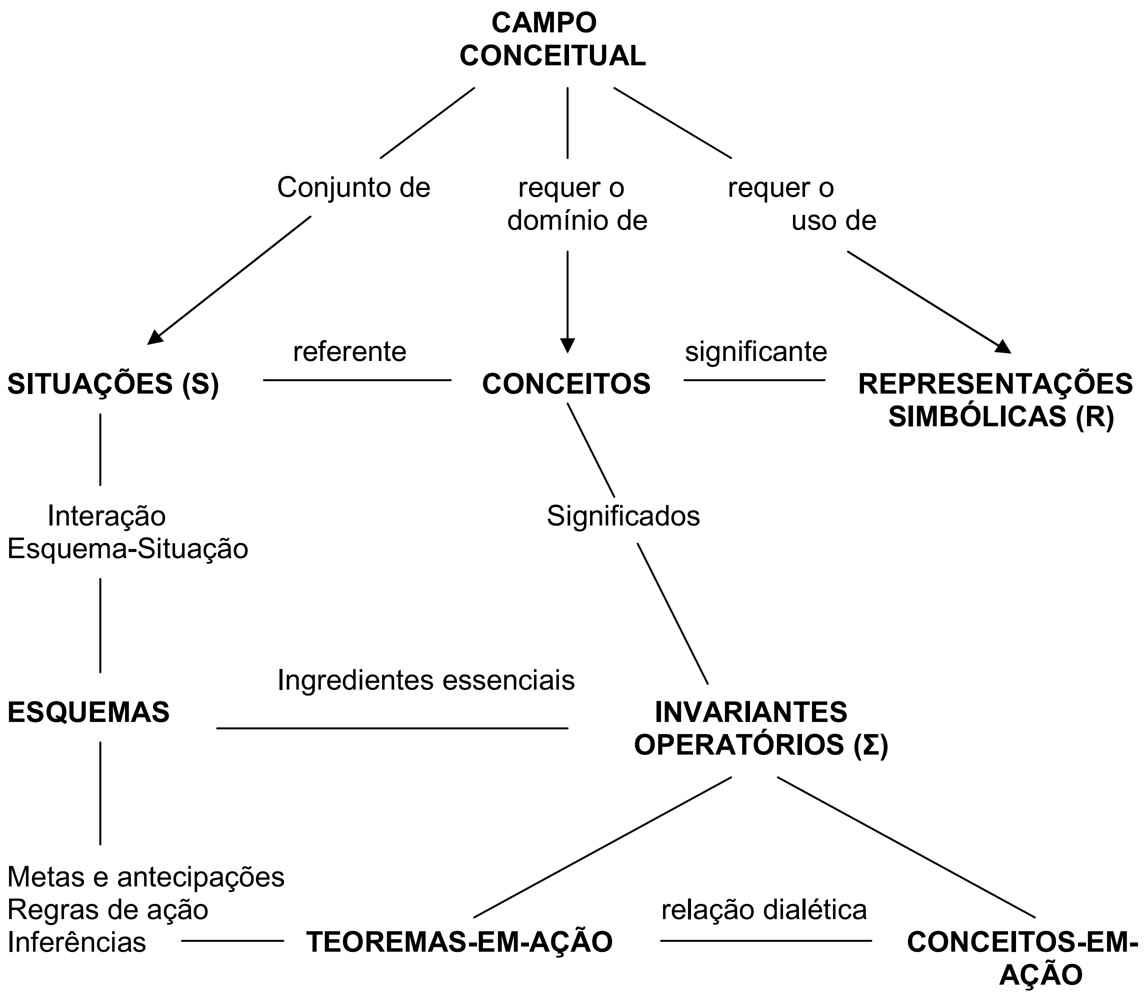
Refletindo sobre o invariante operatório, tomemos a justificativa de Raquel. Sua resposta pode ser entendida como: se 4 objetos custam R$ 7,60, então 8 (2 vezes 4) objetos custam 2 x 7,60 ou 2 vezes mais.

Esse conhecimento pode ser expresso pelo teorema em ação:

$f(nx) = nf(x)$

Mas esses teoremas-em-ação não são teoremas a menos que se tornem explícitos.

Com esses últimos incrementos, nosso esquema para a teoria dos Campos Conceituais fica assim:



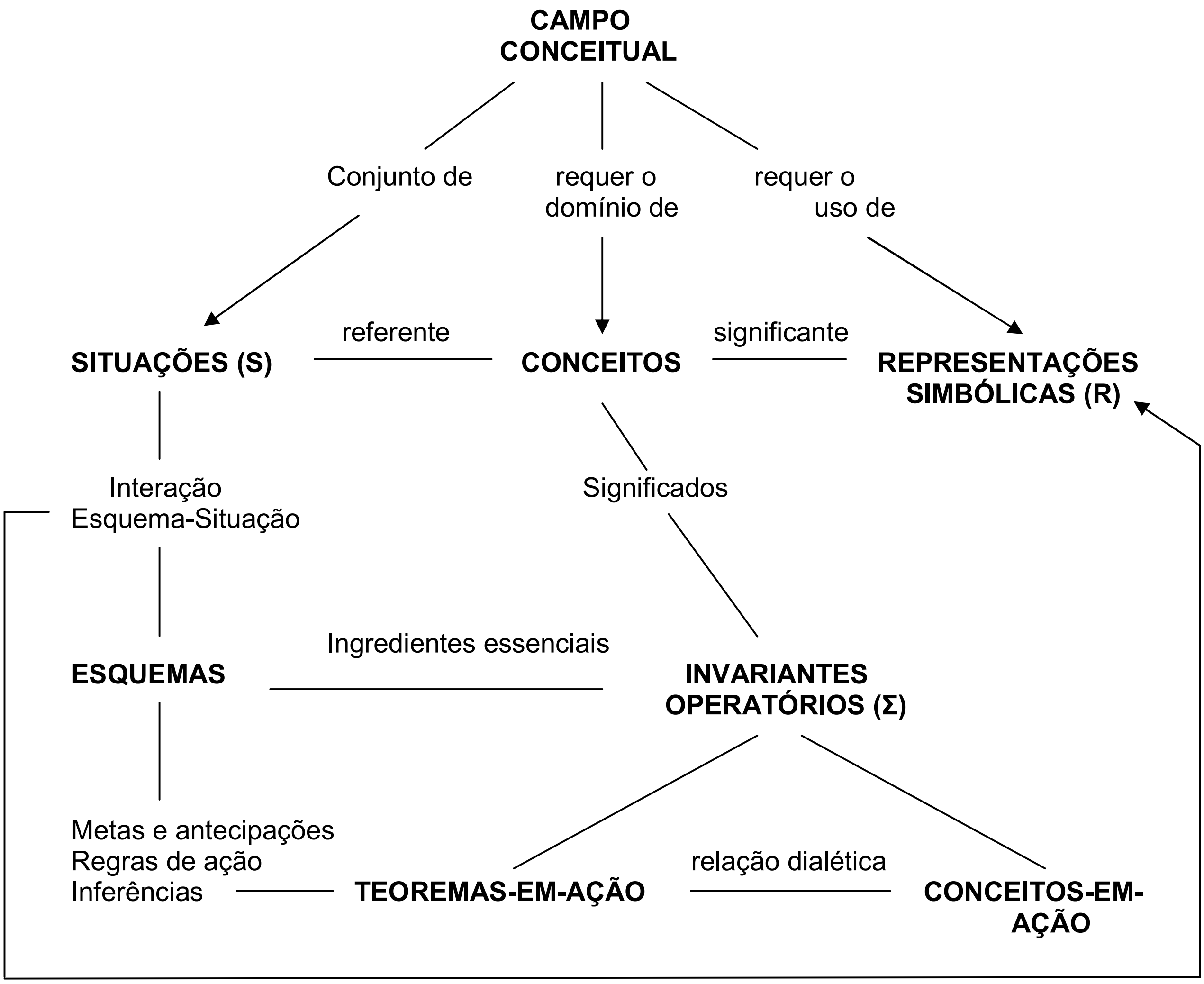
Esquema 3

Como um "Esquema" sempre se dirige a uma classe de situações na qual o sujeito pode descobrir uma possibilidade de resolução de sua atividade, caso isso não ocorra de imediato, as metas e antecipações podem levar a submetas na busca de uma solução para a situação.

Para fechar a questão da terna, resta-nos falar sobre as representações simbólicas.

2.2.6. Representações Simbólicas

Representações simbólicas são as linguagens naturais, gráficos e diagramas, sentenças formais etc., que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.



Esquema 4

Para concluir, a Teoria dos Campos Conceituais supõe que o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização do real. É uma teoria psicológica de conceitos, na qual a conceitualização é considerada a pedra angular da cognição. Para Vergnaud, o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do aprendiz, ocorre ao longo de um largo período de tempo através de experiências, maturidade e aprendizagens (Vergnaud 1982, p. 40, apud Moreira, 2004, p. 2).

2.3. A TEORIA DAS SITUAÇÕES

Discorreremos sobre a Teoria das Situações (Brousseau, 1986), descrevendo seus principais aspectos para validar a hipótese de que os alunos pesquisados podem construir conceitos probabilísticos de base utilizando o modelo pseudoconcreto da Urna de Bernoulli.

2.3.1. APRESENTAÇÃO DA TEORIA

"O aluno aprende adaptando-se a um meio. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas novas respostas que são a prova da aprendizagem" (Brousseau, 1986 apud Almouloud, 2005).

Para Brousseau, um meio sem intenções didáticas se torna insuficiente para a aquisição do conhecimento. Para tanto, o professor tem a incumbência de criar e organizar um meio e situações suscetíveis de provocar essa aprendizagem. Esse meio e essas situações devem englobar os saberes matemáticos cuja aquisição é visada.

"Um novo conhecimento é construído a partir de conhecimentos antigos e também contra esses mesmos conhecimentos" (Bachelard, 1938 apud Coutinho, 2001).

A teoria das situações tem como objeto central a situação didática, composta de um conjunto de relações estabelecidas explicita e/ou implicitamente entre o aluno ou um grupo de alunos, o meio e o professor que tem a missão de fazê-los adquirir um saber constituído ou em constituição.

O ”meio” é considerado, nessa teoria, como a “caixa preta”, e revelar esse “meio” ficam a cargo do comportamento dos alunos. Afinal, para Brousseau, os “alunos aprendem adaptando-se ao meio, e esse meio deve respeitar três condições principais”:

1. Deve ser fator de contradições: meio antagônico.
2. Deve permitir que o aluno possa evoluir de forma autônoma e
3. Conseqüentemente, a aprendizagem deve prever o domínio dos saberes matemáticos identificados, e não somente a dominação de técnicas operacionais.

Ou seja: o meio interage com o aluno, desafiando-o para que ele possa avançar em seu aprendizado, de forma autônoma.

Com esses dados, passamos a ver como modelar o ensino e a aprendizagem da matemática e, para isso, a teoria das situações classifica esse processo em quatro fases.

A primeira fase é a da ação, na qual o aluno, com os conhecimentos que possui, realiza determinadas ações imediatas, traçando um modo operacional por meio de seu conhecimento.

A segunda fase, definida por Brousseau como fase da formulação, é quando, na resolução do problema, o aluno passa a utilizar-se de um esquema com natureza mais teórica, em que um raciocínio mais elaborado é constituído, utilizando-se conhecimentos e informações anteriores.

Na terceira fase, classificada como fase de validação, mecanismos de prova usados pelos alunos e os saberes por eles já elaborados passam a ser usados com uma finalidade de justificar suas respostas.

Para Perrin-Glorian e Hersant (2003)

> "Para a ação temos uma interação direta com o milieu (efetivo ou evocado); para a formulação, a interação com o milieu não é mais direta. Ela necessita da troca de informações entre dois sujeitos que cooperam em uma tarefa comum, tem como conseqüência a aparição de um saber. Para a validação, necessita-se das trocas sobre as asserções concernentes ao milieu e aos saberes enunciado." (Perrin-Glorian e Hersant, 2003, p.220).

Por fim, temos a quarta fase, que Brousseau chamou de institucionalização. Nesta fase, o professor formaliza o conhecimento a ser ensinado, fazendo a descontextualização do mesmo.

Esse processo de ensino-aprendizagem apóia-se na noção de devolução, isto é, o ato pelo qual o professor transfere para o aluno a responsabilidade pelo aprendizado fazendo com que o aluno aceite o desafio que a atividade traz a tal ponto que este busque sua solução como se fosse um problema seu. Após a fase da validação, ocorre a devolução por parte do aprendiz na forma de resposta da atividade que ele havia aceitado como sendo um problema seu.

O objetivo, nesse capítulo, foi apresentar os principais aspectos das teorias dos Campos Conceituais e das Situações Didáticas, a fim de aplicá-las aos alunos pesquisados através da seqüência de ensino.

Enquanto à luz da Teoria dos Campos Conceituais verificaremos a manipulação por partes dos alunos dos princípios aditivo e multiplicativo, na resolução das atividades propostas. Por outro lado a teoria das Situações nos dará a base para que essas atividades estabeleçam uma situação didática, para que assim todas as fases previstas nesta teoria sejam todas alcançadas.

Ressaltamos que o nosso objetivo é o de verificar se a utilização de um modelo, o por nós utilizados a urna de Bernoulli, facilitaria aos alunos, a construção dos conceitos probabilísticos de base.

Este modelo estará inserido implicitamente em toda a seqüência de ensino elaborada dentro dos preceitos da Teoria das Situações e, no decorrer da aplicação e verificação da resolução das atividades observaremos se os alunos, sujeitos de nossa pesquisa, mobilizam os princípios aditivo e multiplicativo, os quais fazem parte daquilo que Vergnaud chamou de Invariantes Operatórios na sua Teoria dos Campos Conceituais.

Observa-se que se faz necessário que essas teorias (Situações e dos Campos Conceituais) sejam seguidas de forma incondicional para garantir os resultados previstos.

CAPÍTULO 3

3. CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Apresentamos a seguir a intervenção de ensino elaborada por nós, que visa diagnosticar concepções probabilísticas entre os alunos. A organização das atividades buscou oferecer condições para que os alunos se desenvolvam de forma autônoma na dialética da ação, formulação, validação e institucionalização. Será feita uma análise *a priori* e uma *a posteriori*, buscando levantar dados necessários para o diagnóstico das concepções.

Também neste capítulo apresentarei atividade denominada de: “Garrafa de Brousseau”.

3.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE A METODOLOGIA UTILIZADA

No desenvolvimento deste trabalho foi citada diversas vezes a intenção de utilizar uma seqüência de ensino. Essa seqüência foi desenvolvida conjuntamente com a orientadora desta pesquisa, Professora Dra. Cileda, e também o Prof. Dr. Michel Henry, que atuava como professor visitante na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo por ocasião da concepção e aplicação das atividades.

Todas as quatro atividades foram aplicadas em turmas-piloto, ou seja: as modificações necessárias com relação às atividades foram a partir desses testes-piloto.

Como já foi citado, o grupo escolhido para a aplicação das atividades era composto por alunos do último ano do quarto ciclo do Ensino Fundamental, com idades entre 14 e 15 anos.

Ocorreram dois encontros. No primeiro foram aplicadas as atividades 1, 2 e 3, o número de alunos neste encontro era de 39, e estes foram divididos em dez grupos, um com três integrantes e nove com quatro integrantes.

Neste encontro a participação do professor foi a de informar as regras para a resolução das atividades propostas que eram: os integrantes do grupo deveriam discutir as estratégias para a resolução de cada atividade e os grupos não deveriam trocar informações entre si.

O objetivo era o de fazer valer as fases de ação, formulação, validação e institucionalização prevista na Teoria das Situações.

As respostas obtidas nessas atividades foram por via escrita e essas compõem o material em anexo juntamente com o vídeo da quarta atividade. Resolvemos gravar a quarta atividade, pois, conforme aparecerá descrito, a composição da garrafa tem por objetivo colocar-se como meio antagônico.

No segundo encontro a turma era composta por 40 alunos que foram divididos em quatro grupos. Para grupo foi fornecida uma garrafa com composição idêntica as demais.

Após a fase em que alunos buscavam responder qual a composição da garrafa, a estes foram passadas as informações da tarefa a ser desenvolvida. Cada grupo realizaria um número de 100 observações anotando a cor da bola que ficava isolada no gargalo da garrafa após esta ser entornada.

Cada um dos dois encontros teve a duração de 40 minutos.

A criação de uma seqüência didática dá-se num processo interativo no qual o objetivo é a elaboração de um grupo de decisões para que os processos tenham significados e as estratégias sejam mais efetivas. Levam-se em consideração as respostas dos alunos e as condições às quais estão submetidas.

Dessa forma, o processo envolve: uma análise teórica da situação proposta, das condições da organização, da escolha de estratégias baseadas nas análises da instrução dada, da determinação de critérios de avaliação, da elaboração de questões que estejam de acordo com os critérios determinados e uma revisão de todo processo em função desta avaliação.

Avaliaremos as contribuições do uso do modelo “Urna de Bernoulli” na construção dos conceitos probabilísticos de base pelos alunos pesquisados. As conclusões às quais chegamos com a análise dos dados aparecerão nas considerações finais.

Antes de passar para a apresentação e descrição do que vem a ser a “Garrafa de Brousseau”, faremos um resumo do objetivo desta pesquisa.

Com os trabalhos e os documentos oficiais lidos, procuramos ratificar a relevância da pesquisa. Com as teorias utilizadas, buscamos embasar e justificar a necessidade de utilização das mesmas para a construção deste trabalho. A metodologia utilizada serviu para validar a importância de uma situação didática elaborada com atividades que possam levar os alunos à construção do conceito de probabilidade.

Para tanto, os pressupostos de uma engenharia didática, metodologia elaborada por Michele Artigue (1990), com as fases de análise *a priori*, *a posteriori* e validação se fazem estritamente necessários, pois só a partir dessa seqüência é que teremos dados para confirmar ou não a hipótese desta pesquisa.

3.2. A GARRAFA DE BROUSSEAU

Na atividade chamada Garrafa de Brousseau, que Guy Brousseau apresentou em 2002, o autor sugere uma representação concreta do modelo probabilístico da “urna de Bernoulli”.

A urna de Bernoulli é um modelo pseudoconcreto de probabilidade, e representa dada uma experiência aleatória, um modelo binomial resultando em dois eventos possíveis: “sucesso” ou “fracasso”. Por que pseudoconcreto? Porque os alunos podem expressá-lo utilizando um vocabulário corrente, quotidiano, mesmo trabalhando com objetos abstratos, já idealizados a partir de objetos da realidade.

Esse modelo permite, conforme comentou Coutinho (2004), exprimir de uma forma completa o processo de modelagem, desde a observação da situação aleatória a ser modelada até a explicitação do modelo que representa. Além disso, caracteriza-se por ser a base da modelagem da maioria das leis discretas, para populações finitas, representativas de outros tipos de experiências aleatórias.

Coutinho (2001, 2003 e 2004) definiu modelagem assim:

> "Modelagem é um processo que é desencadeado pelo aluno quando lhe é solicitado o reconhecimento do modelo probabilista que melhor representa e interpreta a situação da realidade que ele quer estudar. (Coutinho, 2003, p.1)"

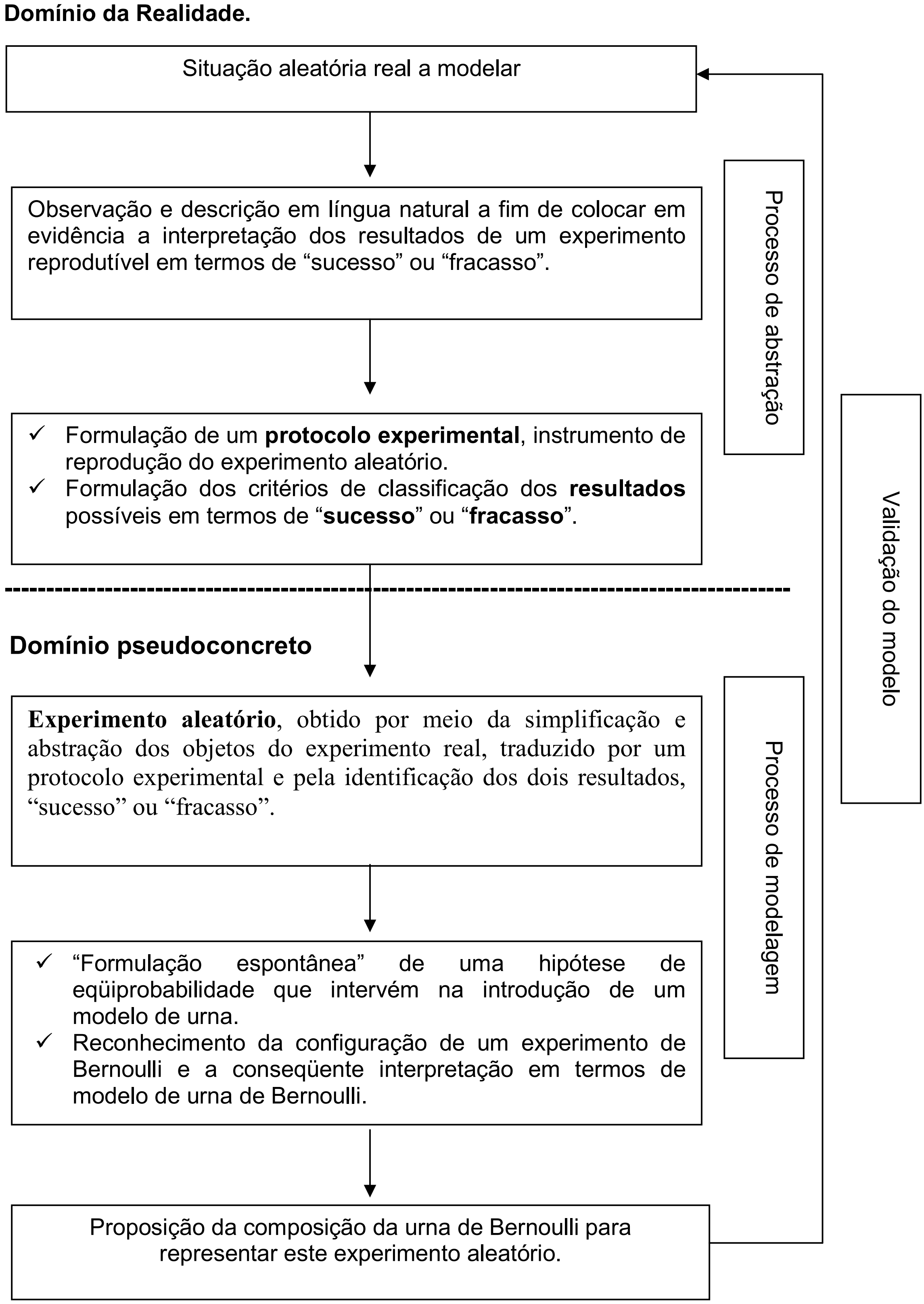
O processo de ensino pela modelagem significa para nós uma metodologia de resolução de problemas na qual o aluno deve reconhecer uma configuração do modelo teórico (no nosso trabalho, o modelo binomial).

O uso da modelagem, como tem mostrado o trabalho de Coutinho (2001), como instrumento de um processo de aprendizagem permite ao aluno construir o significado do conceito que lhe é apresentado: cabe ao aluno reconhecer e selecionar as características do fenômeno que são pertinentes ao modelo.

Esta autora relata:

> "Com isto, este aluno estará apto a reconhecer estas características em outros fenômenos passíveis de serem representados por um mesmo modelo. No caso do esquema de Bernoulli, por exemplo, o aluno deverá identificar a aleatoriedade do fenômeno, a possibilidade de representar esse fenômeno por uma tiragem ao acaso em uma população e finalmente, à possibilidade de classificar os resultados possíveis segundo duas categorias disjuntas, "sucesso" ou "fracasso". (Coutinho, 2003, p.3)".

O esquema que segue também foi desenvolvido por essa autora.



3.2.1. DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

A atividade baseia-se em estimar a composição das bolas dentro de uma garrafa não transparente, ou seja, em buscar uma estratégia para estimar a proporção de bolas brancas na garrafa na qual foram colocadas bolas brancas e pretas. Espera-se que os alunos percebam a necessidade da modelagem, e especificamente a do modelo pseudoconcreto da Urna de Bernoulli pelo reconhecimento de sua configuração. Neste caso, o aluno estaria mobilizando a pré-probabilidade. Para isso é necessário que os alunos tenham conhecimento de proporção para que possam, por meio dos conceito-em-ação, construírem os conceitos probabilísticos de base.

São necessárias as escolhas das variáveis didáticas como a quantidade de bolas brancas e pretas dentro do saco e o desconhecimento por parte dos alunos desse total, bem como a escolha de cinco bolas para serem colocadas dentro da garrafa não transparente, que também vemos como uma variável interessante nesse processo. Acreditamos que esses fatores produzam o que, na Teoria das Situações, Brousseau chamou de milieu.

Para ratificar nossa proposição, apresento os diálogos que aparecem no artigo de Brousseau (2002), em uma situação onde a atividade da garrafa é proposta a determinado grupo de alunos:

> “Em uma garrafa não transparente e vazia colocaremos cinco bolas, tomadas em um saco opaco que contém cerca de trinta bolas. Devemos verificar que há no saco apenas bolas brancas e bolas pretas”.

Após misturar, retirar 5 bolas, permitimos aos alunos a constatação da quantidade (mas não a cor). Colocar as 5 bolas na garrafa, fechando seu gargalo com material transparente, simulando um funil.

A questão a ser colocada: Como estimar a composição na garrafa? Ou seja, como estimar a proporção de bolas brancas na garrafa?

Esta pergunta choca evidentemente as modalidades de raciocínio deterministas em uso na classe e os alunos não compreendem qual o cálculo eles poderiam fazer para obter a solução deste problema.

Começam, por conseguinte, a olhar através da tampa. Seguidamente um inverte a garrafa e, através da tampa, agora poderá ver a cor da bola que pára na tampa.

- É branca! – dirá o aluno.

A pergunta que vem espontaneamente, então, é: teria também uma preta?

Ao entornar novamente a garrafa... Ainda é branca.

É a mesma?

Seria outra?

A idéia de que, se há uma preta, ela vai terminar por mostrar-se, justifica as reversões até que o acontecimento produza-se (ou não).

E ao final não saberia justificar o pensamento, pois continuar a entornar a garrafa surtiria o efeito desejado?

"A leitura de um segundo exemplar de um mesmo jornal confirma as notícias do primeiro?"

Mas em geral as crianças fazem hipótese que vão começar o processo:

- Recomeça cinco vezes de modo que se verão todas as bolas – diz uma criança que tem a idéia de que as bolas devem mostrar-se sucessivamente em boa ordem.

- Aí está! Há três bolas brancas e duas pretas!

> A história não tem mais razão de ir adiante... "Exceto se essa idéia de que as bolas mostram-se sabiamente na mesma ordem for questionada pelo professor ou por um aluno".

Para tal questionamento é proposto pelo professo/pesquisador fazer grupos de cinco observações com idéia de representar o conteúdo da garrafa. Essas observações deverão ser anotadas para posterior análise dos alunos. O professor aparece como mediador do debate.

Vale salientar que a opção da variável garrafa não transparente é a de limitar ao aluno, executor da atividade, pois a curiosidade de pegar as bolas contá-las ou mesmo verificar a sua cor fica prejudicado, uma vez que o aluno somente poderá olhar as bolas uma a uma pelo gargalo transparente da garrafa.

Outra opção seria aquela adotada em Coutinho (2001): um pote transparente contendo inúmeras contas coloridas (duas cores: azul e vermelha). O total de contas não era acessível pela simples observação do pote (a autora trabalhou com 50 a 100 contas no pote), mas caso o aluno quisesse (por curiosidade ou como validação dos resultados observados), poderia contá-las abrindo o pote. Na tampa do pote existia um gargalo que permitia a passagem de uma única conta colorida, que deveria ter sua cor anotada e então ser devolvida ao pote. Os sorteios se repetiriam após o pote ter sido devidamente agitado para misturar as contas.

Também é importante ressaltar que a sugestão de Brousseau é que se coloque em torno de cinco bolas, e não muito mais que isso dentro da garrafa, para que as mesmas não obstruam seu gargalo.

Até aqui foi apresentada a metodologia, por nós utilizada, que será uma seqüência de ensino baseada nos pressupostos de uma engenharia didática, nos moldes da metodologia apresentada por Artigue (1990), onde foram feitas uma análise *a priori* e uma *análise a posteriori* quando da elaboração e da aplicação em um teste piloto das atividades que compõem a seqüência de ensino utilizada em nossa pesquisa. A escolha das variáveis didáticas, o termo "variáveis didáticas" foi apresentado por Brousseau em sua teoria das Situações (1986), como os alunos escolhidos, a divisão e composição dos grupos, o número de observações realizadas na quarta atividade, entre outras variáveis que se fizerem pertinentes, no que tange ao objetivo por nós traçado possibilitou uma reorganização da seqüência de ensino.

No próximo capítulo apresentaremos as atividades, pontuamos que a escolha da atividade da "Garrafa de Brousseau" foi com o objetivo de uma representação concreta da urna Bernoulli.

A "Garrafa de Brousseau" é uma experiência concreta da urna de Bernoulli com o objetivo de transpor alguns obstáculos por ele observados com relação à urna de Bernoulli, como por exemplo, a possibilidade de o aluno querer contar as bolas, coisa que é possível na urna, mas que é impossível na garrafa.

CAPÍTULO 4

4. ATIVIDADES

O objetivo deste capítulo é o de apresentar as atividades elaboradas para o desenvolvimento de nossa experiência didática.

Com relação às atividades, todas de uma forma ou de outra mantêm uma relação com o material apresentado por Henry durante suas atividades na PUC-SP, em junho de 2006. A atividade 1 foi colhida e adaptada do mini-curso ministrado por ele. As atividades 2 e 3 foram sugeridas por Henry em encontros de orientação. Vale assinalar que a atividade 2 foi elaborada e utilizada em Coutinho (2001).

A atividade 4 apresentada por Henry foi retirada de um artigo publicado por Brousseau (Brousseau, Brousseau e Warfield, 2002) no Journal of Mathematical Behavior.

Antes de detalhar as quatro atividades que serão aplicadas junto ao grupo de alunos pesquisados, apresentaremos um quadro mostrando os objetivos de cada uma das atividades, bem como a evolução pretendida a partir delas.

Vale ressaltar que, em nossa questão de pesquisa, procuramos verificar a contribuição que a urna de Bernoulli (aqui tendo como representação concreta a garrafa de Brousseau), poderia trazer na construção dos conceitos probabilísticos de base, de forma que entendemos da necessidade da apresentação deste quadro para verificar a evolução almejada nos alunos pesquisados, que entre outras são:

- ✓ Evolução do princípio aditivo para o princípio multiplicativo;
- ✓ Um livre trânsito entre esse dois princípios;
- ✓ A instauração de um modelo na resolução das atividades;
- ✓ Verificação da manutenção do modelo de uma atividade para ao outra.

Segue o quadro das atividades:

4.1. QUADRO DAS ATIVIDADES

ATIVIDADE 1	ATIVIDADE 2	ATIVIDADE 3	ATIVIDADE 4
POTE DE BALAS	ANIVERSÁRIO 1	ANIVERSÁRIO 2	A GARRAFA DE BROUSSEAU
OBJETIVO * Identificar mobilização do princípio aditivo e do princípio multiplicativo na resolução da atividade. * Observar quais foram os modelos de resolução que os alunos adotaram.	OBJETIVO * Observar junto ao grupo de alunos pesquisados a percepção destes com relação à população tomada como referência a ser utilizada na resolução da atividade. * Verificar se os alunos usam o modelo introduzido na atividade 1 (sucesso, fracasso).	OBJETIVO * Verificar as manifestações dos alunos com relação à informação que possibilita a mudança da população a ser tomada como referência utilizada na resolução da atividade.	OBJETIVO * Introduzir o sorteio aleatório em uma garrafa com bolas coloridas. * Instaurar em jogo os elementos da situação aleatória para evidenciar o modelo adequado. * Evidenciar a insuficiência de um pequeno número de observações para poder dar, de maneira única, a composição da urna de Bernoulli que modela a situação.

4.1.1. ATIVIDADE 1

“Letícia prefere balas de laranja ao invés de balas de limão.

Existem dois potes de balas, ambos contendo balas de laranja e balas de limão. Sabendo que ela deverá escolher um dos potes, responda:

- Qual dos potes Letícia deve escolher para retirar sua bala preferida, já que o pote 1 contém 6 balas de laranja e 10 de limão e que o pote 2 contém 8 balas de laranja e 14 de limão?”.

Nessa atividade, o objetivo é de identificar que princípios, aditivo ou multiplicativo, os alunos mobilizam na resolução do problema.

Também faz parte do nosso intento introduzir um modelo com resultados do tipo “sucesso” ou “fracasso”, objetivando a busca da regularidade de um modelo adequado na resolução das atividades por parte dos alunos pesquisados. É a introdução da configuração do modelo de urna de Bernoulli.

A análise dos diálogos, durante a aplicação da atividade, terá como objetivo identificar os invariantes operatórios mobilizados pelos alunos. Essa identificação se dará também através da justificativa das respostas dadas.

4.1.2. ATIVIDADE 2

“Qual é a chance de se escolher um aluno da sala de aula, ao acaso, e de o aniversário desse aluno, neste ano, ser num domingo?”.

Mantendo a linha de pesquisa por nós estabelecida, que seja a de ratificar a necessidade intuitiva por parte dos alunos da utilização de modelo probabilístico pertinente para a resolução do problema, essa atividade tem o objetivo de, além de verificar a ocorrência ou não de mudança do princípio aditivo para o multiplicativo, ou ainda, no caso dos alunos que na atividade 1 fizeram uso do princípio multiplicativo, a continuidade da manipulação desse princípio por parte desses alunos, verificar também a manutenção ou não o modelo probabilístico utilizado pelos alunos na resolução da atividade anterior.

4.1.3. ATIVIDADE 3

"Sabendo que seis alunos dessa sala fazem aniversário num domingo, você mudaria sua resposta na questão anterior? Justifique".

Na atividade 2, é solicitado aos alunos a probabilidade *a priori*, sem informação particular sobre a população visada. O viés da eqüiprobabilidade se apresenta então sobre os dias da semana. É um problema de modelagem probabilista.

Por esse viés, na ausência de informações sobre a experiência aleatória, pode-se supor a eqüiprobabilidade sobre os dias. Nesse modelo, o conjunto formado pelos dias da semana foi tomado como referência de espaço amostral da experiência aleatória de "sortear um dia da semana" no conjunto de dias representados pelos alunos da classe. Outros modelos análogos tomariam os dias do ano como espaço amostral, para determinar a razão entre o número de domingos e o número total de dias. Nesse caso, a associação entre dias e alunos da classe fica completamente implícita.

Na atividade 3 é introduzida uma informação sobre a composição dessa população, visando uma reavaliação da composição da urna de Bernoulli que representa esse experimento aleatório. Assim, se pedirmos aos alunos para repensar sobre a resposta da atividade 2, é com o objetivo didático de compreender porque o primeiro modelo, ainda que razoável, sobretudo se os alunos são numerosos, é muito aproximativo e não pode dar um bom valor á probabilidade solicitada uma vez que, o espaço amostral a ser tomado como referência deveria ser o número de alunos na sala de aula. Isso coloca em evidência a importância de tratar os problemas de probabilidade em termos de modelos e de cálculos teóricos quando nos propomos a aplicá-los à realidade.

Nesse sentido, essas atividades se mostram muito simples para isso, visto que os problemas tradicionais de moedas ou dados não permitem claramente distinguir realidade de modelo, visto que estes instrumentos são geradores de acaso (quase) perfeitos.

Nestas duas atividades, o aluno pode identificar certas similaridades quanto à atividade 1: sorteio em uma população determinada, podendo resultar em duas possibilidades, “sucesso” ou “fracasso”. Temos assim a configuração de urna de Bernoulli.

Assim, após essa inserção de esclarecimento sobre a pertinência das atividades 2 e 3, que tem por objetivo tornar claro o porquê da utilização dessa seqüência de ensino e da manutenção das atividades, voltamos à apresentação da atividade restante.

4.1.4. ATIVIDADE 4

Finalizando a seqüência de ensino, a atividade 4 vem fechar o processo da necessidade da modelagem quando da resolução da atividades. E como nosso objetivo era utilizar a urna de Bernoulli como modelo fundamental na construção do conceito de probabilidade (aqui representada por meio da Garrafa de Brousseau), nesta atividade é apresentado aos alunos esse modelo. Após a conclusão da atividade, coube-nos institucionalizar o modelo utilizado durante todo o processo da seqüência de ensino.

“Em uma garrafa não transparente e vazia colocaremos cinco bolas, tomadas de um saco opaco que contém cerca de trinta bolas. Devemos verificar que haja no saco apenas bolas brancas e bolas pretas.

Após misturar, retirar 5 bolas, permitindo aos alunos a constatação da quantidade (mas não a cor). Colocar as 5 bolas na garrafa, fechando seu gargalo com material transparente, simulando um funil.

Questão a ser colocada: como estimar a composição na garrafa? Ou seja, como estimar a proporção de bolas brancas na garrafa?”.

Após as mais diferentes tentativas de se descobrir qual a cor das bolas dentro do saco, inclusive a de entornar a garrafa para observar a cor da bola através da tampa transparente (esse processo de tentativa de resolução por parte dos alunos está prevista na Teoria das Situações – meio antagônico e a tentativa de evoluir de forma autônoma), propor uma atividade com as seguintes regras:

1 – Misturar as bolas na garrafa.

2 – Entornar a garrafa e observar a cor bola que aparece na tampa transparente.

3 – Anotar a cor dessa bola.

a) Faça 5 blocos de 20 sorteios sucessivos, preenchendo o quadro abaixo com os resultados. Use (B) para branca e (P) para preta.

sorteio	cor	sorteio	cor	sorteio	cor	sorteio	cor	sorteio	cor
01		21		41		61		81	
02		22		42		62		82	
03		23		43		63		83	
04		24		44		64		84	
05		25		45		65		85	
06		26		46		66		86	
07		27		47		67		87	
08		28		48		68		88	
09		29		49		69		89	
10		30		50		70		90	
11		31		51		71		91	
12		32		52		72		92	
13		33		53		73		93	
14		34		54		74		94	
15		35		55		75		95	
16		36		56		76		96	
17		37		57		77		97	
18		38		58		78		98	
19		39		59		79		99	
20		40		60		80		100	

Essa atividade de 5 sorteios deverá ser repetida 20 vezes, totalizando 100 sorteios.

b) Qual a quantidade de bolas brancas e de bolas pretas na garrafa? Justifique sua resposta.

c) Qual a chance de ser sorteada uma bola branca?

d) E qual a chance de ser sorteada uma bola preta?

e) Retomemos à atividade dos potes de balas. Para você, esses sorteios que acabou de fazer são equivalentes à atividade dos potes de balas?

f) Como deve ser a composição da garrafa para que essas duas experiências sejam equivalentes?

g) A experiência do sorteio das bolas é equivalente à atividade do aniversário? Por quê?"

Apresentadas as atividades que serão aplicadas com os alunos pesquisados, detalhando como elas deverão ser desenvolvidas, de forma a que todas as fases da Teoria das Situações sejam observadas, e de como estas foram analisadas à luz da Teoria dos Campos Conceituais os esquemas e os invariantes operatórios que os alunos mobilizaram na resolução das atividades.

A seguir apresentaremos a análise *a priori* das quatro atividades, feita durante os testes-piloto das atividades.

4.2. ANÁLISE A PRIORI

Trataremos da análise *a priori* das atividades aplicadas em nossa pesquisa, para verificar, no decorrer da aplicação dessas atividades, se ocorrem as fases pertinentes da Teoria das Situações, assim como a verificação da utilização de esquemas e que princípios, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, os alunos mobilizam na resolução das atividades.

Ressaltamos novamente que a metodologia utilizada nesta pesquisa traz os pressupostos de uma engenharia didática, muito embora esteja muito aquém do que seja realmente a engenharia didática nos moldes elaborados por Michele Artigue.

4.2.1. PRIMEIRA ATIVIDADE:

ELEMENTOS DE ANÁLISE TEÓRICA

Domínio de conhecimentos

Aritmético: relato, proporção, idéia de probabilidade.

Análise da tarefa

Objetivo:

- Levar o aluno a dar-se conta de que não é suficiente escolher o pote que tem mais balas de laranja ou menos balas de limão, mas que é necessário também perceber as duas quantidades simultaneamente. Isso deverá ser feito por meio de um relato comparativo de grandezas (ou seja, um estudo da proporção entre as quantidades que compõem os potes de balas).

- Determinar seguidamente e comparar os relatórios dos números de balas de laranja e de limão por meio de razões (de mesmo denominador ou numerador).
- Determinar e comparar os relatórios do número balas de laranja e o número total de balas de cada pote.
- Ou ainda planificar um raciocínio proporcional, do tipo: num pote de 6/10 haveria a mesma possibilidade que num pote de 12/20. Preparar uma lista do tipo:

Laranja	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	...
Limão	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	...
Total	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	...

Laranja	8	16	24	32	40	48	56	64	72	...
Limão	14	28	42	56	70	84	98	112	126	...
Total	22	44	66	88	110	132	154	176	198	...

- Levar a refletir que se pode comparar facilmente 42/70 e 40/70, 66/176 e 64/176, 24/ 64 e 24/ 66 ou 48 /128 e 48/132, para deduzir que, com a escolha do primeiro pote, é mais favorável que se tire uma bala de laranja.

Nessa atividade, já fazemos menção aos trabalhos de Coutinho (1994, 2001) e de Silva (2002) no que diz respeito à importância da introdução do conceito de Probabilidade através de uma visão Laplaciana, mas sempre confrontando com o enfoque freqüentista.

Aqui o aluno deverá observar a razão entre o total de casos favoráveis com o total de casos possíveis, ou seja, a forma clássica do conceito de Probabilidade.

Ao evocar um sorteio aleatório nesses potes, o aluno deve ser capaz de avaliar os resultados possíveis e suas respectivas chances.

Nessa avaliação, caso o aluno utilize do raciocínio aditivo, suas ações serão geridas pela análise das diferenças entre os totais de cada tipo de balas nos dois potes. Pode, portanto, buscar o pote com o maior número de balas de laranja ou menor número de balas de limão.

4.2.2. SEGUNDA ATIVIDADE:

ELEMENTOS DE ANÁLISE TEÓRICA

Domínio de conhecimentos

Aritmético: proporção, idéia de probabilidade.

Análise da tarefa

Objetivos:

- Levar a perceber que o total a ser considerado deve ser o de alunos na sala de aula, e que a resposta se baseia em eventos favoráveis entre número de eventos possíveis.
- Ou planificar um raciocínio proporcional, do tipo: na sala há 39 alunos. Destes, um me interessa, aquele que será escolhido ao acaso.

Já nesta atividade, a intenção é a de se fazer observar pelos alunos pesquisados qual o total a ser considerado na resolução do problema. Aqui também fazemos referência aos trabalhos de Coutinho, que apresentam a importância da utilização de uma rede de conhecimentos (razão, proporção, contagem etc.) para que o aprendiz possa construir os conceitos almejados pelo professor/pesquisador.

Esta atividade supõe a mobilização de raciocínio proporcional, envolvendo o princípio multiplicativo. Ao buscar interpretar o problema, o aluno terá como recurso:

a) Considerar o número de dias na semana como seu conjunto de base (população a qual será feita o sorteio). Nesse caso, o resultado que representa o sucesso é o domingo.
b) Considerar o número de dias no ano e, entre eles, contar o número de sucessos possíveis (número de domingos).

Estes dois modelos podem representar a experiência em jogo de forma aproximativa. Outros modelos podem ser sugeridos pelos alunos. Ressaltando, que o modelo apropriado a ser adotado pelos alunos pesquisados é o número de alunos na sala de aula.

Com relação à teoria de Vergnaud (1990) devemos verificar a mobilização dos invariantes operatórios pelos alunos na resolução do problema, além de observar se esses alunos mobilizam além dos princípios aditivos, também os princípios multiplicativos (tal como é descrito por Henry, 2006). Será a partir das mobilizações desses princípios que esses alunos alcançarão o estágio que Henry chamou de “pré-probabilidade”.

4.2.3.TERCEIRA ATIVIDADE:

ELEMENTOS DE ANÁLISE TEÓRICA

Domínio de conhecimentos

Aritmético: proporção, idéia de probabilidade.

Análise da tarefa

Objetivo:

- Levar a perceber que o total a ser considerado deve ser o de alunos na sala de aula, e que a resposta se baseia agora no número de eventos favoráveis que passam a ser 6 no número de eventos possíveis,

- Ou planificar um raciocínio proporcional, do tipo: na sala há 39 alunos; destes, seis me interessam.

Essa atividade é uma que complementa a anterior, no que tange, o objetivo por nós traçado o de buscar a manutenção do modelo utilizado de uma atividade para a outra, e seu objetivo é fazer com que os alunos percebam a mudança do total a ser considerado para, dessa forma, evoluir na construção do conceito de probabilidade por meio da forma teórica (Laplaciano).

4.2.4. QUARTA ATIVIDADE:

ELEMENTOS DE ANÁLISE TEÓRICA

Domínio de conhecimentos

Aritmético: proporção, idéia de probabilidade, freqüência.

Análise da tarefa

Objetivo:

Nessa tarefa utilizamos a representação concreta da urna de Bernoulli, tal como sugerida na atividade elaborada por Brousseau (2002). Dessa forma, como apontam os trabalhos de Coutinho (1994, 2001) e Silva (2002), fica patente a necessidade da introdução do conceito de Probabilidade, levando-se em conta a dualidade dos pontos de vista experimental e freqüentista.

A utilização atividade da Garrafa de Brousseau, como representação concreta da urna de Bernoulli, caracteriza nossa tentativa de levar o aluno a construir o conceito de Probabilidade, evoluindo do modelo concreto para o pseudoconcreto, como salientou Coutinho (2001).

Nosso objetivo é o de identificar quais os princípios, aditivos ou multiplicativos, que os alunos pesquisados mobilizaram na resolução das questões, além de verificar se ocorreu uma evolução na utilização de um princípio aditivo para um princípio multiplicativo (que, na Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud chamou de teoremas-em-ação).

Também gostaríamos de verificar, na ocorrência dessa evolução, que conceitos-em-ação os alunos mobilizaram na justificativa de suas respostas.

Valem lembrar que, na aplicação das atividades, a metodologia utilizada foi a da Teoria das Situações Didáticas, elaborada por Guy Brousseau, em que as fases de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização foram todas verificadas.

Nesta atividade também o aluno pode reconhecer a configuração de urna de Bernoulli, introduzida pelas atividades anteriores.

Optamos por não transcrever todas as respostas, tendo elas sido separadas por grupos, com a transcrição de uma que representasse o grupo. Seguem a selecionadas.

CAPÍTULO 5

---

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES

Com relação aos dados colhidos, optemos por dividir as respostas das atividades em grupos. Por exemplo: um grupo formado pelos alunos que, na atividade 1, fizeram uso de princípios multiplicativos. Outro exemplo foi a divisão por grupo de alunos que, na segunda atividade, consideraram como total, os dias do ano, ou pelos que consideraram o total o número de alunos, e assim por diante.

A partir dessa divisão por grupos, decidimos apresentar apenas respostas que representassem o grupo para, de uma forma mais objetiva, apresentar a ocorrência ou não da evolução de princípios, além identificar a pertinência de uma modelagem por parte dos alunos na busca de um melhor resultado para as respostas.

Transcrevemos de forma fidedigna o que foi respondido pelos alunos. Em cima dessas respostas, faremos comentários para situar os leitores naquilo a que nos propuseram quando da elaboração desta pesquisa. Deixaremos para um próximo capítulo a exposição de nossas conclusões.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Atividade 1.

"Letícia prefere balas de laranja ao invés de balas de limão.

Existem dois potes de balas, ambos contendo balas de laranja e balas de limão. Sabendo que ela deverá escolher um dos potes, responda:

Qual dos potes Letícia deve escolher para retirar sua bala preferida, já que o pote 1 contém 6 balas de laranja e 10 de limão, e que o pote 2 contém 8 balas de laranja e 14 de limão?".

Para essa atividade, apresentamos as seguintes respostas:

O aluno **D1** respondeu:

"Ela deve escolher o pote 1, porque tem 4 balas de diferença do 2, que tem 6 balas de diferença".

O teorema-em-ação utilizado pode ser explicitado na forma: dados x_1, x_2 e y_1, y_2, se $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$, então $f(x_1 + x_2) < f(y_1 + y_2)$.

Já com relação aos conceitos-em-ação podemos identificar: ganho e perda, aumento e diminuição, estado inicial e final, entre outros.

No desenvolvimento desta análise faremos menção apenas aos princípios manipulados pelos alunos na resolução das atividades, pois temos como objetivo, observar os possíveis avanços dos aditivos para os multiplicativos e também da manipulação simultânea destes, como apontou Henry (2006).

O aluno **J** respondeu:

"Ela deve escolher o pote 1, pois só há 4 balas de diferença, pois 10 - 6 = 4, então ela terá só 4 chances a mais de errar. Já o pote 2 tem 6 chances de errar, pois 14 – 8 = 6. Então é preferível ela ter apenas 4 balas de diferença do que 6".

A aluna **R** respondeu:

"Bem, Letícia sabendo quantas balas tem em cada pote, deverá escolher o primeiro pote, pois contém menos balas de limão, e facilitará muito a ela pegar a bala de laranja".

Aqui vemos que a aluna **R** fez uso do princípio aditivo: comparou a quantidade de balas de limão em cada pote e concluiu que a possibilidade de sucesso (bala de laranja), será maior na escolha do pote que contiver um número menor de balas de limão.

O grupo de alunos que **D1, J** e **R** representam optou por mobilizar os princípios aditivos na resolução da atividade 1. Aparentemente esses alunos se encontram num estágio anterior àqueles que mobilizaram os princípios multiplicativos da resolução desta atividade (como é o caso dos grupos que os alunos **D2** e **I** representam), conforme as suas respostas a seguir.

O aluno **D2** respondeu:

"Bom, eu fiz as contas e ficou assim: pote 1 (6 laranjas + 10 limão = 16 balas, 6 ÷ 16 = 0,375 ou 37,5%). Já o pote 2 tem: (8 laranjas + 14 limão = 22, 8 ÷ 22 = 0,3637, ou 36,37%). Portanto, a probabilidade de ela pegar uma bala de laranja é maior no pote 1 do que no pote 2".

Já a resposta de **I** foi:

" Pote 1	***Pote 2***
P(A) = 6 / 16 = 0,37	***P(A) = 8/22 = 0,36***

Letícia deve escolher o pote 1, pois a probabilidade de tirar as balas preferidas é maior”.

Na resolução da atividade, o aluno **D2** mobilizou com clareza os princípios aditivos e os princípios multiplicativos. Dessa forma, ele se apresenta mais apto a construir os conceitos básicos de probabilidade, pois, ao que parece, para alunos como **D2** o professor deverá descontextualizar o conceito implícito e institucionalizar o conceito, já que ele apresenta as ferramentas necessárias para a resolução de problemas dessa natureza.

Já o aluno **I** mobilizou os princípios multiplicativos para resolver o problema. Mas isso não dizer, em hipótese alguma, que **I** não saiba mobilizar os princípios aditivos. Isso porque, segundo Henry, ambos os princípios devem ser mobilizados na resolução de problemas de caráter probabilista.

Atividade 2.

Para analisar as atividades 2 e 3 é necessário saber que a sala de aula pesquisada contava com 39 alunos no dia da aplicação das atividades.

“Qual é a chance de se escolher um aluno da sala de aula, ao acaso, e que o aniversário desse aluno, neste ano, seja num domingo?”.

O aluno **R** respondeu desta forma:

“Suponhamos que a sala tem 35 alunos, a probabilidade é de 1/7. A cada 7 alunos 1 pode ter nascido em um domingo”.

As respostas do grupo ao qual o aluno **R** pertence, tomaram como total de referência o número de alunos na sala de aula, que no dia contava com 39 alunos.

Para a resposta que o aluno **R** apresentou cabem algumas considerações que achamos pertinentes observar: o aluno em sua resposta apresenta uma interpretação errônea no cálculo por ele efetuado, uma vez que ele apresenta a probabilidade de 1/7, ou seja, em um número de 35 alunos escolhendo-se ao acaso 1 aluno, este fazer aniversário no domingo. Verificamos que para tal probabilidade **R** utilizou o número 5 como dias da semana. Também observamos que este aluno fez uso de um esquema de aproximação, quando preferiu utilizar uma divisão exata, e para isso supôs a existência de 35 alunos ao invés dos 39 que ali se encontravam. Ainda podemos dizer que ele mobilizou os princípios multiplicativos utilizando o conhecimento dos múltiplos de 7.

Este e outros grupos que tomaram por referencial o total de alunos, dias do ano e dias do mês, formam o grupo que alegou falta de dados suficientes no texto da atividade.

O aluno **D2** respondeu desta forma:

"A probabilidade de 1 em 7, pois em uma semana tem 7 dias, contando 1 domingo"

Eis a resposta da aluna **G**:

"A probabilidade é de 1 em 7."

Tanto aluno **D2** como a aluna **G** e os grupos que eles representam fizeram uso do modelo Laplaciano, ou seja: a razão entre os eventos desejados e os eventos possíveis, considerando como total os dias da semana.

Assim respondeu a aluna **F**:

"1 / 7 = 0,1428571"

A aluna **F** está em um estágio de pré-probabilidade, pois forneceu uma resposta aceitável para a questão, já que levou em conta o número de dias da semana na sua justificativa além, é claro, de mobilizar o princípio multiplicativo pertinente nesta atividade.

Atividade 3.

"Sabendo que seis alunos desta sala fazem aniversário num domingo, você mudaria sua resposta na questão anterior? Justifique".

Nessa atividade, a aluna **F** deu a seguinte resposta:

"Sim, porque as chances são maiores de fazer aniversário no domingo do que na atividade anterior, pois agora são 6/39".

Nessa atividade, a aluna **C** deu a seguinte resposta:

"Sim, porque a quantidade de alunos é maior e as chances de fazer aniversário também são".

Para os alunos do grupo do qual as alunas **F** e **C** fazem parte, da questão 2 para a questão 3 mudou o total de referência. Para eles, o total passou de 7 dias/ semana para 39 alunos. Verificamos que o modelo adotado por esses alunos na atividade anterior não foi utilizado nesta. O modelo agora utilizado se mostra muito mais apropriado.

O fato dos alunos buscarem um modelo mais apropriado, juntamente com a ocorrência de uma evolução no que diz respeito à mobilização do princípio aditivo para o multiplicativo, deve constar como observações importantes para o professor na fase da institucionalização do conceito almejado.

Para essa atividade o aluno **D2** deu a seguinte resposta:

"6 / 365 = 0,01 possibilidades.

"Sim mudaria, pois a possibilidade diminuiu.".

Na resposta o aluno **D2** confunde o número de alunos com o número de dias. Chamou atenção a resposta deste aluno, pois, na atividade 2 ele tomou como referencial os dias da semana, agora dispondo da informação de que 6 alunos fazem aniversário no domingo, caso mantivesse o referencial dias da semana resultaria numa proporção de 6/7. Por certo esta nova informação trouxe um desconforto fazendo que ele mudasse o referencial para dias do ano.

O aluno **D2** representa o grupo que tomou como referencial os dias do ano para a atividade 3, e que por isso acha que mudaria a suas respostas.

Chamemos a atenção para este fato, pois aqui se apresenta uma necessidade gritante da modelagem para questões de caráter probabilista, uma vez que os alunos apresentam certa dificuldade para determinar um total como referencial.

Resposta da aluna **G**:

"Não, porque eu não saberia se o aluno que eu escolhi fará aniversário no domingo ou não".

Observemos que, analisando as respostas do aluno **D2** e da aluna **G** para a segunda questão, fica evidente que eles não estão num estágio pré-probabilidade em que o conceito é algo ainda desconhecido. Por força do contrato didático, elas buscam respostas mesmo que, às vezes, contraditórias em a relação a outras já dadas, e mesmo respostas sem algum significado, como no caso do aluno **D2**.

Resposta da aluna **F** para esta atividade:

"6 / 7 = 0,8571".

"Sim, mudaria, pois na atividade anterior havia apenas uma chance, agora há seis possibilidades de um aluno fazer aniversário no domingo".

A aluna **F** também encontra dificuldade para justificar sua resposta, muito embora ela faça parte do grupo que, na atividade 2, já mobilizava os princípios multiplicativos, além de fazer uso do modelo Laplaciano $p(A) = n(A) / n(\Omega)$. Ela tal como o aluno **D2**, confunde o número de alunos com o número de dias, a aluna **F** com os dias da semana e o aluno **D2** com os dias do ano.

Os resultados aqui apresentados mostram que na atividade 2, dois alunos utilizaram o conceito de probabilidade, em que se verifica que a probabilidade da ocorrência de determinado evento provém da razão do número de eventos satisfatórios pelo número de eventos possíveis de determinada experiência.

Já na atividade 3, vemos que alguns alunos (que na atividade 2 já utilizavam, mesmo sem se dar conta, o conceito de probabilidade Laplaciano), não o ratificaram na atividade 3, pois encontraram dificuldades para justificar suas resposta por meio deste conceito: a mudança explícita na população na qual se fará o sorteio provocou o erro destes alunos que não souberam mudar de referencial para a determinação da probabilidade procurada.

Por outro lado há um grupo de alunos que percebeu a mudança no total de referencia, e desta forma aplicaram em ambas as atividades o conceito de probabilidade a partir do modelo $p(A) = n(A) / n(\Omega)$.

São estes alunos que Henry classificou num estágio pré-probabilidade. Eles possuem, mesmo sem a formalização do mesmo, o conceito de probabilidade e, na busca da resolução dos problemas, mobilizaram os princípios aditivos e os princípios multiplicativos.

Atividade 4.

“Em uma garrafa não transparente e vazia colocaremos cinco bolas, tomadas de um saco opaco que contém cerca de trinta bolas. Devemos verificar que haja no saco apenas bolas brancas e bolas pretas.

Após misturar, retirar 5 bolas, permitindo aos alunos a constatação da quantidade (mas não a cor). Colocar as 5 bolas na garrafa, fechando seu gargalo com material transparente, simulando um funil.

Questão a ser colocada: como estimar a composição na garrafa? Ou seja, como estimar a proporção de bolas brancas na garrafa?”.

Esta seqüência foi elaborada de forma que as atividades 1, 2 e 3 concorressem para a atividade 4, ou seja, todas as anteriores à atividade 4 têm o objetivo implícito de fazer com que o modelo da urna de Bernoulli, utilizado nesta atividade, sirva de modelo para as demais também. Mas isso o aluno só perceberá a partir da institucionalização feita pelo professor após a aplicação da atividade citada.

O meio antagônico que ela apresenta (garrafa não transparente e tampa transparente, porém lacrada) irá colaborar para o total desenvolvimento da atividade à luz Teoria das Situações, uma vez que ocorreram as fases de “Ação”, “Formulação”, “Validação” e, por fim, a “Institucionalização” (por meio deste pesquisador).

As questões “c”, “d”, “e”, “f” e “g” da atividade 4 não apresentam respostas escritas, pois as mesmas foram respondidas durante o debate que precedeu a fase de institucionalização. Como toda a atividade 4 foi gravada em vídeo, as respostas dadas oralmente pelos alunos se encontram nas fitas que ficaram disponíveis na biblioteca do programa. Utilizaremos a transcrição dessas respostas para apresentá-las neste estudo.

Observamos também que, para uma maior coleta de dados, e na intenção de uma total participação dos alunos nesta atividade, foram utilizadas 4 garrafas durante sua aplicação.

Resposta do aluno **W** o item “b”:

“Conseguimos mexer a garrafa 400 vezes, sendo que saiu 243 vezes bolas brancas e 157 bolas pretas”.

243 = 60,75% brancas.

157 = 39,25% pretas.

Então, na garrafa, tem 5 bolinhas, sendo 3 brancas e 2 pretas”.

A resposta do aluno **W** representa a resposta da maioria dos alunos. **W** utilizou a informação de que, ao todo, foram feitas 400 amostras com a exibição da bolinha no gargalo da garrafa (sorteios com reposição).

A partir desta informação, o aluno usou o conhecimento que possuía sobre cálculo de porcentagem na elaboração de sua resposta. Esse aluno apresenta uma evolução no que diz respeito à mobilização dos invariantes operatórios na resolução da atividade, além de mobilizar os princípios aditivos e multiplicativos.

Nesse momento da pesquisa passamos à fase didática, tomando o controle da classe para a fase de institucionalização do conceito de probabilidade a partir do modelo binomial, onde a probabilidade é medida entre "sucesso" e "fracasso". Então comentamos sobre a validade em se realizar um grande número de experimentos que caracteriza o modelo freqüentista de probabilidade. Feitas essas institucionalizações, passamos às questões "c", "d", "e", "f" e "g", da atividade 4. Para essas questões, obtivemos as seguintes respostas:

Aluno **W,** com relação às questões "c" e "d":

"A chance de ser sorteada uma bola branca é a de 3 em 5, e de ser sorteada uma bola preta é de 2 em 5".

Para a questão "e", a aluna **F** respondeu:

"Sim são equivalentes, pois no pote 1 a chance de pegar uma bala de laranja é 6 em 16 que é maior do que a do pote 2 que é de 8 em 22, e se você dividir tudo por 2 fica 3 em 5 no pote 1 e 4 em 7 no pote 2".

Para a questão "f", **W** respondeu dessa forma:

"Pega duas garrafas, em uma coloca 6 bolas brancas que são as balas de laranja e 10 bolas pretas que são as balas de limão. Na outra garrafa coloca 8 bolas brancas e 14 bolas pretas".

Aos alunos foi explicado o porquê o total a ser considerado na atividade dois dever o numero de alunos e que o sucesso seria escolher ao acaso justamente o aluno aniversariante no domingo.

Para a questão “g”, a aluna **C** também respondeu que sim:

“Agora, professor, dá para ver que todas as atividades podem ser respondidas através da garrafa, naquela atividade que a gente não sabia quantos alunos faziam aniversário no domingo tinha que ser uma garrafa com 39 bolas, 1 branca representando o aniversariante do domingo e 38 pretas representando os outros alunos”.

Quando perguntei à aluna **C** sobre a atividade 3, esta titubeou. Aparentava não ter certeza do total a ser utilizado. Então ao professor coube explicar que o total continuaria mesmo, e o que mudou foi as chances de obter sucesso que passou de 1 na atividade 2, para 6 na atividade 3.

O aluno **I** comentou o seguinte:

“Aí tem que ter 39 bolas na garrafa 6 brancas representando o domingo e 33 pretas representando os outros dias da semana”.

Nova intervenção do professor esclarecendo para o aluno I não confundir dias da semana com números de alunos, afinal a composição da garrafa deve ser com 39 bolas, 6 brancas representando os alunos aniversariantes no domingo e 33 bolas pretas representando os outros alunos.

Tanto para o aluno **I** como para os demais alunos que compartilham desta resposta, o modelo de uma urna de Bernoulli possibilita a construção dos conceitos de Probabilidade, visto que esses não manifestaram dúvidas com relação a essa composição da garrafa na representação da atividade 3.

O aluno **I** complementa: ***"As chances de escolher uma aluno que faça aniversário no domingo é de 6 em 39."***

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A introdução dos conceitos probabilísticos de base por meio de um modelo, e o utilizado por nós nesta pesquisa foi o modelo pseudoconcreto da Urna Bernoulli, possibilitaria a construção desses conceitos?

A conclusão a que chegamos é que sim. A modelização na introdução dos conceitos de probabilidade possibilitou a construção dos mesmos pelos alunos sujeitos de nossa pesquisa.

Pode-se observar que, ao final da quarta atividade, esses alunos haviam alcançado o estágio de pré-probabilidade a que Coutinho (2001) faz menção.

A partir dessa constatação, faço algumas considerações retomando os pontos primordiais da pesquisa que destacamos como: “a relevância”, “o embasamento em duas teorias agindo num único foco”, “uma seqüência de ensino que culmine numa modelagem e, mais precisamente, o modelo pseudoconcreto da Urna de Bernoulli”.

Com relação à relevância deste estudo, pode-se dizer que ele está apoiado nos trabalhos realizados por Coutinho (1994, 2001, 2003), Lopes (1998) e Silva (2002). Esses autores mostram a importância da dualidade na introdução do conceito de Probabilidade por meio de modelo “clássico” e “freqüentista”. Seus estudos indicam a real possibilidade da construção dos conceitos probabilísticos de base por alunos das séries intermediárias e finais do Ensino Fundamental.

Já com relação aos resultados apresentados nos trabalhos de Gonçalves (2004) e Santos (2005), o presente trabalho aponta a possibilidade da construção dos conceitos de Probabilidade quando da utilização do modelo de uma urna de Bernoulli, ressaltando que a pesquisa se deu com alunos do Ensino Fundamental (8ª série), e isto, contradiz as opiniões dos professores pesquisados por esses dois últimos autores, quando estes dizem entre outras coisas que, este conteúdo é de natureza complexa para ser ensinado a alunos do Ensino Fundamental.

Uma vez que aqui foram apresentados resultados satisfatórios quando da utilização da Urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino desses conceitos, logo fica a questão se não seria o caso de reavaliar os cursos de formação, para que os professores possam ter base teórica para o ensino dessa área do conhecimento.

Pode-se afirmar que esta pesquisa utiliza-se dos trabalhos de Gonçalves e Santos para fechar uma questão: a de que, no sistema didático, todos os elementos (aluno, saber, professor) devem interagir de forma a não tirar a autonomia do aluno na construção de seus conhecimentos como ficou comprovado no decorrer das atividades.

Esta pesquisa também ratifica as orientações dos documentos oficiais que dizem que tal área do conhecimento deve ser ensinada já nas séries iniciais. Aqui se abre mais uma linha de pesquisa, que é para verificar a construção desses conceitos em séries anteriores, às quais esta pesquisa se ateve.

Com relação às teorias utilizadas nesta pesquisa, fico tranqüilo em dizer que ambas se mostraram eficientes e necessárias naquilo a que se propôs esta pesquisa, ressaltando que outras teorias podem surtir o mesmo efeito.

Por meio da identificação dos invariantes operatórios, tais como os conceitos-em-ação do tipo: ganho e perda, aumento e diminuição, estado inicial e final e razão e proporção. Assim como os teoremas-em-ação do tipo:

$$f(x + x') = f(x) + (x')$$

$$f(x) = ax$$

$$x = \frac{1}{a} f(x)$$

Dos princípios mobilizados, da evolução (aditivo para o multiplicativo) e da manipulação simultânea dos mesmos, pudemos avançar no ensino dos conceitos de probabilidade. Por meio da Situação Didática formulada e por meio da seqüência de ensino, os alunos foram atores e autores na construção do seu conhecimento, pois, ao final, na fase de institucionalização, o trabalho deste professor foi singelo ao perceber que o conceito de probabilidade por um modelo freqüentista já estava sendo utilizada pelos alunos na fase de validação da situação didática, facilitando sobremaneira a situação de institucionalização por parte do professor.

Após essas conclusões vejo que esta pesquisa aponta para a viabilidade do ensino do conceito de probabilidade de base, tendo como modelo fundamental a Urna de Bernoulli.

Deus seja louvado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S.A., Fundamentos da didática da Matemática, CEMA, PUC-SP: 2005.

ARTIGUE, M. Epistémologie et didactique. Recherches em didactique des Mathématiques, RDM, v. 10, n. 2-3, p. 241-286, Grenoble, 1990.

AZCÁRATE, P.G. Estudio de lãs concepções disciplinares de futuros professores de primaria em torno a lãs nociones de aleatoriedad y probabiladad. Granada: Comares, 1996.

BALACHEFF, N., Cadre, register e conception: note sur lês realciones entre trois concepts clés de la didactique. Laboratoire Leibniz – IMAG. ISSN: 1298-020X Sep. 2002.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, v.7, n.2, pp. 33-116. Grenoble, 1986.

BROUSSEAU, G., **BROUSSEAU**, N., **WARFIELD**, V., “An experiment on the teaching of statistics and probability”. Journal of Mathematical Behavior, 20, (2002).

BOOTH, W.C., **COLOMB**, G, **WILLIAMS**, J. M., A arte da pesquisa. São Paulo: Editora Martins Fontes, 2000.

CORDANI, L.K., Oficina “Estatística para todos”. Artigo publicado nos anais do II Bienal da SBM. Universidade Federal da Bahia – Bahia, 2004.

COUTINHO, C.Q.S., Introdução ao conceito de probabilidade pela visão freqüentista – estudo epistemológico e didático. 1994 - São Paulo. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

COUTINHO, C.Q.S., Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d’expériences de Bernoulli dans l’environnement informatique Cabri-géomètre II, 2001. 330 p. Tese (Doutorado em educação matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble I, França.

COUTINHO, C.Q.S., Modelagem, simulação e as orientações dos PCN-EF para o ensino de Probabilidade. Artigo publicado nos anais do IX seminário IASI de Estatística Aplicada – “Estatística na Educação e Educação em Estatística” – Rio de Janeiro, 2003.

COUTINHO, C.Q.S., Atelier: Introdução aux situations aléatoires et à leur modélisation - http://www-leibniz.imag.fr/EM2000/Actes/Ateliers/COUTHINO.pdf (10 de março de 2007).

COUTINHO, C.Q.S., **GONÇALVES**, M.C.G. O livro didático e a formação do professor de Matemática para o ensino de probabilidades. In: II SEMINÁRIO

INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003, Santos. Anais do II SIPEM. São Paulo: SBEM, 2003

COUTINHO, C.Q.S., **RODRIGUES**, L.L. A introdução do conceito de probabilidade no ensino fundamental por meio de processo de modelagem de situações aleatórias. Artigo publicado nos anais do VII EPEM. Universidade de São Paulo – São Paulo, 2004.

FALZETTA, R. Todas as contas num punhado só. São Paulo: Revista Nova Escola, Ano XX! – nº195, p. 54. 2006.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In MACHADO, S. (org) Educação Matemática. Uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

FREITAS, J.L.M., Situações didáticas. In MACHADO, S. (org) Educação Matemática. Uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

GEERTZ. C. A interpretação das culturas. Rio: LTC, 1989. "Uma descrição densa: por uma teoria interpretativa da cultura" (cap. 1).

GONÇALVES, M.C.G., Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica, 2004 148 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP. São Paulo (SP). Orientadora: Cileda de Queiroz e Silva Coutinho.

G4, Grupo de Pesquisa (G4) – Formação e Evolução – CoFe. PUC-SP, 2005.

HENRY, M., Mini-curso da didática da Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

LATOUR, B. Ciência em ação: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

LOPES, C. A. E., A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular. Campinas. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação. Universidade de Campinas.

LOPES, C. A. E., A probabilidade e estatística na educação infantil: um estudo sobre a formação e a prática do professor – Extrato do projeto de Tese de Doutorado. Universidade Federal de Campinas. VI EBRAPEM, 2002,

MACHADO, S.D.A., Engenharia Didática. In MACHADO, S. (org) Educação Matemática. Uma Introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

MOREIRA, M.A., A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área – Investigações em ensino de ciências, Vol. 7, N. 1, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2002. - http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm

NAVARRO-PELAYO, V., **ROA**, R., Razonamiento combinatório e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad – Departamento de didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

PERRIN-GLORIAN, M-J., **HERSANT**, M., Milieu et Contrat Didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. In Recherches em Didactique des Mathèmatiques, vol 23, nª 2, pp. 217 – 276. Grenoble: La pensée Sauvage. 2003.

SANTOS, C.R., O tratamento da informação: currículos prescritos, formação de professores e implementação na sala de aula. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias PUC-SP. São Paulo. Orientadora: Dra. Célia Maria Carolino Pires.

SILVA, I. A., Probabilidades: a visão laplaciana e a visão freqüentista na introdução do conceito. 2002 147p. Dissertação Tese (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, PUC-SP. São Paulo (SP). Orientador: Saddo Ag Almouloud.

VERGNAUD, G. La théoria des champs conceptuals. Recherches des didactique des Mathematiques. RDM, v.10, n. 2/3, pp. 133-169. Grenoble, 1990.